

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas / Faculdade de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Jonathan Esteban Arroyo Silva

**Acoplamento de Interface Iterativo MEF–MEFE para Problemas do tipo
Sólido-Fluido no Domínio do Tempo**

Juiz de Fora

2018

Jonathan Esteban Arroyo Silva

**Acoplamento de Interface Iterativo MEF–MEFE para Problemas do tipo
Sólido-Fluido no Domínio do Tempo**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Felipe dos Santos Loureiro

Juiz de Fora

2018

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Jonathan Esteban Arroyo.

Acoplamento de interface iterativo MEF-MEFE para problemas do tipo sólido-fluido no domínio do tempo / Jonathan Esteban Arroyo

Silva. -- 2018.

77 f. : il.

Orientador: Felipe dos Santos Loureiro

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2018.

1. Acoplamento Iterativo. 2. Elastodinâmica. 3. Fluido Acústico. 4. MEF. 5. Elementos Espectrais. I. Loureiro, Felipe dos Santos, orient.
II. Título.

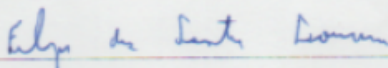
Jonathan Esteban Arroyo Silva

**Acoplamento de Interface Iterativo MEF-MEFE para Problemas do tipo
Sólido-Fluido no Domínio do Tempo**

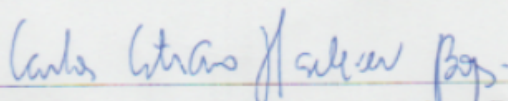
Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Modelagem Computacional.

Aprovada em 27 de Março de 2018.

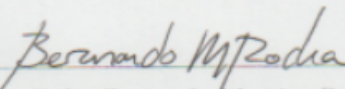
BANCA EXAMINADORA



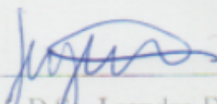
Prof. D.Sc. Felipe dos Santos Loureiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



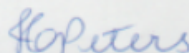
Prof. D.Sc. Carlos Cristiano Hasenclever Borges
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Bernardo Martins Rocha
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D.Sc. Leandro Di Bartolo
Observatório Nacional



Prof. D.Sc. Franciane Conceição Peters
Universidade Federal do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, na sua essência. Aos meus pais, irmã, irmãos e minha companheira pelo apoio, amor e incentivo ao longo destes anos. Ao meu orientador Felipe pela excelente orientação e por todo o conhecimento transmitido. Gostaria de agradecer também aos demais professores e aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da UFJF, sem os quais não teria sido possível a realização deste trabalho.

Agradeço a FAPEMIG, CAPES e CNPq pelo apoio financeiro durante o curso.

‘A alegria está na luta, na tentativa,
no sofrimento envolvido
e não na vitória propriamente dita.’

Mahatma Gandhi

RESUMO

Resumo: Neste trabalho será proposto um método de acoplamento iterativo de interface com um esquema de subcycling no tempo eficiente e preciso. Este será aplicado a problemas do tipo sólido-fluido discretizados, respectivamente, pelos métodos dos elementos finitos clássico (MEF) e espectral (MEFE). Adicionalmente, será proposta uma melhoria no esquema de subcycling, de modo que para convergir não sejam necessários métodos de relaxação. Aplicando o MEFE em subdomínios com geometrias pouco distorcidas, pode-se usufruir da alta precisão numérica com baixo custo de armazenamento oferecidos pelo método ao mesmo tempo em que é possível aplicar o MEF aos subdomínios com geometrias complexas, acrescentando versatilidade ao método. Diferentes exemplos numéricos são apresentados e analisados para demonstrar a precisão e a potencialidade das formulações numéricas propostas.

Palavras-chave: Acoplamento Iterativo. Elastodinâmica. Fluido Acústico. MEF. Elementos Espectrais.

ABSTRACT

Abstract: In this work, an iterative interface coupling method with an efficient and precise time subcycling scheme is proposed. It is applied to solid-fluid type problems discretized respectively by classical finite element method (FEM) and spectral finite element method (SFEM), additionally, an improvement in the subcycling scheme is proposed so as not to require relaxation methods to converge. Applying the SFEM in subdomains with low distorted geometries one can take advantage of the high numerical precision with low cost of storage offered by the method, while it is possible to apply the FEM in subdomains with complex geometries, adding versatility to the method. Many numerical examples are presented and analyzed here to show the accuracy and potentiality of the proposed numerical formulations.

Key-words: Iterative Coupling. Elastodynamic. Acoustic Fluid. FEM. Spectral Elements.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Métodos de acoplamento de interface	10
1.2	Método dos Elementos Finitos Espectral (MEFE)	11
1.3	Acoplamento MEF-MEFE	13
1.4	Justificativa, Objetivos e organização da tese	13
2	MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE ACOPLAMENTO SÓLIDO-FLUIDO	15
2.1	Subdomínio Fluido	15
2.2	Subdomínio sólido	16
2.3	Solução via MEFE	19
2.3.1	Elementos sub-paramétricos - mapeamento linear	19
2.3.2	Funções de interpolação e distribuição de pontos internos	20
2.3.3	Integração numérica	24
2.3.4	Condensação Estática	26
2.4	Solução via MEF	27
2.5	O método de marcha no tempo Hilbert-Hughes-Taylor (HHT)	28
2.6	Exemplos numéricos	30
2.7	Onda acústica – meio fluido	30
2.7.1	Coluna sólida	33
3	ACOPLAMENTO ITERATIVO	38
3.1	Acoplamento de interface do tipo sólido-sólido MEF-MEFE	38
3.1.1	Acoplamento iterativo e parâmetro de relaxação ótimo	39
3.1.2	Acoplamento espacial – passos de tempo com tamanhos iguais	41
3.1.2.1	Forças de superfície	43
3.2	Acoplamento de interface do tipo sólido-fluido MEF-MEFE	44
3.2.1	Acoplamento espacial – passos de tempo com tamanhos iguais	44
3.2.1.1	Cálculo numérico das integrais na superfície de acoplamento	46
3.2.1.2	Mapeamento inverso unidimensional	47
3.2.1.3	Parâmetro de relaxação dinâmico	48
3.2.2	<i>Subcycling</i> no tempo – Passos de tempo distintos	49
4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	52
4.1	Acoplamento sólido-sólido	52
4.1.1	Caso-1	54

4.1.2	Caso-2	54
4.1.3	Caso-3	57
4.2	Acoplamento sólido-fluido	60
4.2.1	Coluna aço-água	61
4.2.2	Sistema de barragem-reservatório	63
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	69
	REFERÊNCIAS	71

1 INTRODUÇÃO

Em muitas áreas de atuação da modelagem computacional existe uma interação de dois ou mais sistemas físicos, tendo, como resultado, um sistema de equações diferenciais acoplado relacionando os sistemas entre si. Tal acoplamento pode ocorrer de várias formas, como sugerido por Zienkiewicz em [1], estas podendo ser classificadas, de maneira geral, como:

- Acoplamento de domínio: o acoplamento ocorre através das equações diferenciais governantes, descrevendo diferentes fenômenos físicos no mesmo domínio espacial, de forma parcial ou total.
- Acoplamento de interface: problemas nos quais o acoplamento se dá por uma interface via condições de contorno impostas, podendo intercorrer entre sistemas físicos de natureza semelhante ou distinta.

No presente trabalho, abordada-se a segunda classe de acoplamento, focando em problemas do tipo sólido-fluido. Neles o acoplamento surge da necessidade de simular situações, através de uma determinada interface, em que haja interação entre fluidos, como água e ar; ou de lubrificantes com sólidos, como edifícios, barragens, estruturas *offshore*, componentes mecânicos, vasos de pressão, etc., segundo sugerido pela Figura 1.

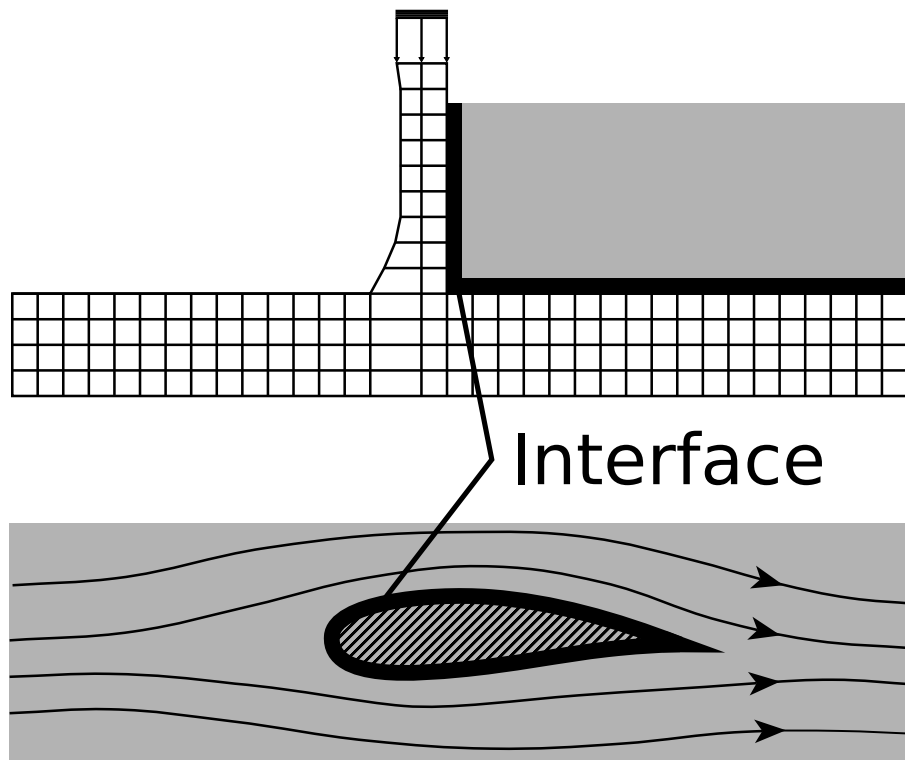


Figura 1 – Exemplos de acoplamento de interface sólido-fluido.

O correto tratamento da interface de interação (condições de compatibilidade entre os subdomínios) é de suma importância uma vez que o comportamento ao longo do tempo de um dos subdomínios muitas vezes é influenciado diretamente pelo comportamento do outro.

Neste sentido, é de interesse utilizar técnicas de discretização específicas que apresentem um desempenho melhor em determinado subdomínio de forma a melhorar a precisão nos resultados e diminuir o custo computacional. Por exemplo, seria muito vantajoso utilizar o Método dos Elementos Finitos (MEF) em subdomínios governados por equações com comportamento não linear ou que apresentem uma geometria complexa, ou ainda em meios heterogêneo complexos que são os casos onde a flexibilidade do MEF se destaca; enquanto que, poderia-se utilizar o Método dos Elementos de Contorno (MEC) nas regiões onde se simule um meio infinito ou semi-infinito ou em regiões onde ocorram pontos de singularidade, já que estas características podem ser incluídas diretamente na sua formulação, sendo representadas de maneira mais precisa; também pode querer-se utilizar o Método dos Elementos Finitos Espectral (MEFE) em subdomínios onde seja preciso simular dinâmica de fluidos ou em regiões governados pela equação da onda, que é onde este método se destaca pela sua precisão com baixo custo computacional, ou ainda, utilizar o Método das Diferenças Finitas (MDF) apenas pela sua conhecida simplicidade de implementação e alta precisão nos resultados; neste sentido poderia-se citar muitos outros exemplos de métodos de discretização espacial e suas distintas vantagens.

Outro ponto a ser levado em consideração em problemas de acoplamento de interface é a possibilidade de utilizar em cada subdomínio métodos de integração temporal distintos (e.g., métodos explícitos/implícitos, de primeira ou segunda ordem, com amortecimento numérico ou que melhor se adequem à discretização espacial utilizada), assim como tamanhos de passos de tempo que sejam mais adequados ao subdomínio de forma a obter naturalmente um ganho computacional, ao não utilizar um passo de tempo tão pequeno em regiões onde não seja necessário.

De modo geral, os métodos utilizados para resolver problemas com acoplamento de interface podem ser divididos em dois tipos, os métodos diretos e os desacoplados. No primeiro tipo, o sistema acoplado global é resolvido de maneira direta, enquanto que no segundo tenta-se aproveitar o particionamento espacial dos subdomínios, desacoplando-os e resolvendo os sistemas individualmente, utilizando alguma metodologia para o tratamento da interação entre estes na interface.

A seguir é apresentada uma revisão bibliográfica sobre métodos de acoplamento de interface, o Método dos Elementos Finitos Espectral e o acoplamento MEF-MEFE.

1.1 Métodos de acoplamento de interface

Como comentado anteriormente, os métodos de acoplamento podem ser separados em dois tipos, os métodos diretos e os desacoplados.

Como exemplo do primeiro tipo de acoplamento, podem-se citar os trabalhos de [2, 3, 4], nos quais foram propostos métodos de acoplamento direto entre o MEF e o MEC, tanto para problemas estáticos quanto para transientes. Sem um prévio tratamento, o sistema global resultante do acoplamento direto é mal-condicionado, e adicionalmente, como as matrizes referentes à discretização de cada metodologia possuem características distintas (i.e., enquanto as matrizes do MEF são simétricas e esparsas, as do MEC são assimétricas e não-esparsas) o problema fica ainda mais mal-condicionado.

Assim, as metodologias propostas nos trabalhos citados anteriormente visavam melhorar o mal-condicionamento do sistema global mudando a formulação do MEC, obtendo-se, por exemplo, matrizes simétricas, recuperando-se assim algumas vantagens numéricas de armazenamento e possibilitando a utilização de *solvers* mais eficientes para a resolução deste tipo de sistemas de equações. Como também comentado anteriormente, estes trabalhos visavam aproveitar a flexibilidade do MEF em análises não-lineares e modelar as geometrias complexas das estruturas e a facilidade do MEC em incorporar na formulação domínios infinitos ou semi-infinitos para assim modelar grandes dimensões do fluido e/ou solo.

Em 1977, por outro lado, Park [5] apresentava o método de acoplamento *staggered* para problemas do tipo sólido-fluido como alternativa ao acoplamento direto. Nesse trabalho são mostradas as vantagens e desvantagens do método, dentre as quais podem ser citadas: a possibilidade de tratar os domínios de maneira individual – possibilitando utilizar métodos distintos em cada subdomínio e abrindo a possibilidade de tratar os subdomínios em hardwares distintos – podendo estender o problema para casos não-lineares no domínio sólido e podendo enriquecer as informações no domínio fluido de maneira simples, mesmo possuindo condições de estabilidade fortemente restritivas.

Em meados dos anos 80 surgiram as primeiras metodologias de acoplamento de interface do tipo iterativo, nos trabalhos de [6, 7] o acoplamento foi realizado entre sistemas físicos semelhantes que eram governados por equações elípticas de segunda ordem e discretizados por métodos espectrais; já em [8] o acoplamento é realizado entre subdomínios discretizados pelo MEF para o mesmo tipo de problema. Diferentemente do acoplamento do tipo staggered, no método iterativo as condições de equilíbrio e continuidade do sistema global são satisfeitas através de um processo iterativo das condições de contorno, ao invés de utilizar um esquema preditor-corretor.

Em [9, 10, 11], o método iterativo é aplicado a problemas de elasticidade estática entre o MEC-MEF, sendo que em todos estes trabalhos o método de acoplamento itera-

tivo é aplicado em malhas com nós coincidentes na interface de contato, sendo apenas posteriormente estendido a malhas com nós não coincidentes, como será mostrado mais adiante. O método de acoplamento iterativo expandiu-se com sucesso a problemas transientes, além de possibilitar o uso de diferentes tamanhos de passos de tempo quando utilizado esquemas de marcha no tempo (o que não é simples de realizar nos métodos de acoplamento direto em problemas transientes como será comentado posteriormente).

Ressalta-se também que, ao utilizar métodos de acoplamento iterativo, podem-se escolher métodos computacionais otimizados de acordo à técnica de discretização escolhida em cada subdomínio (e.g. métodos específicos para matrizes simétricas do MEF) modificando minimamente códigos existentes. Outra vantagem é a fácil implementação para problemas não lineares, como explorado em trabalhos como [12, 13], nos quais é utilizado o acoplamento iterativo MEC-MEF para solução de problemas dinâmicos cujas regiões governadas por comportamentos não-lineares foram resolvidas através do MEF.

Em [14], o método de acoplamento iterativo foi utilizado para problemas elastodinâmicos em 3D, este trabalho apresenta um estudo paramétrico com respeito à escolha do parâmetro de relaxação utilizado no cálculo das variáveis de interesse na interface de contato. Estes métodos de relaxação, são utilizados para obter a convergência das soluções de maneira mais eficiente, é visto também que a escolha acertada do parâmetro de relaxação é muito importante nesta metodologia, podendo até mesmo fazer com que os resultados divirjam caso escolhida de maneira errônea, como será visto posteriormente.

Em [15, 16] é apresentado um método iterativo para a solução de problemas dinâmicos no domínio do tempo e de interação fluido-estrutura no domínio da frequência, respectivamente, no qual o parâmetro de relaxação é calculado a cada passo de iteração ao minimizar o funcional do erro ao quadrado entre fluxos da interface do passo anterior e atual, como feito em [9] para o caso estático. Mais recentemente, nos trabalhos [17, 18], é adotado o *método de Aitken's Δ^2* para um cálculo ótimo do parâmetro de relaxação no domínio da frequência para problemas de interação solo-estrutura e do tempo para problemas elastodinâmicos, respectivamente.

1.2 Método dos Elementos Finitos Espectral (MEFE)

O MEFE, que pode ser entendido como sendo uma variação do MEF com uso de polinômios de alta ordem, surgiu em problemas de dinâmica de fluidos [19, 20, 21]. É conhecido na literatura que os métodos espectrais apresentam excelentes resultados neste tipo de problemas, porém ficando restritos a domínios com geometrias e condições de contorno mais simples [22, 23]. Neste sentido, o MEFE propõe juntar a flexibilidade do MEF na criação de malhas em domínios com geometrias mais complexas e o baixo erro de dispersão presente nos métodos espectrais, assim como o decrescimento exponencial do erro em função da ordem dos polinômios.

Nos trabalhos de [24, 25], são apresentados estudos do erro de dispersão nas malhas 2D e 3D do MEF e MEFE, juntamente com alguns critérios numéricos de estabilidade quando usadas metodologias explícitas de marcha no tempo para problemas de ondas acústicas e elásticas. Em [23] é constatado que para malhas do MEFE com elementos de ordem 4 ou superior o erro de dispersão é menor do que 0.2% quando utilizados 4 ou 5 nós por comprimento de onda chegando a se comparar com o MDF que é classicamente utilizado para este tipo de problema.

Uma das principais diferenças entre o MEFE e outros métodos espectrais [26] é que na primeira metodologia, o domínio é dividido em elementos e as funções base são especificadas em cada elemento, tornando esta adequada para lidar com geometrias complexas. Na segunda metodologia, por outro lado, as funções base são globais e infinitamente diferenciáveis. Outra diferença fundamental é que na primeira metodologia as funções teste são as mesmas utilizadas para as funções base (formulação de Galerkin), já na segunda são utilizadas funções *delta de Dirac* como funções teste (esquema de colocação).

Diferentemente do MEF de alta ordem, o MEFE não apresenta o chamado *fenômeno de Runge* que é responsável por adicionar oscilações espúrias nos resultados por causa do alto grau dos polinômios interpoladores usados em conjunto com a distribuição equidistante dos nós internos [27], o que pode levar a uma interpretação errada dos resultados, como será visto no próximo capítulo. Apesar de ter a flexibilidade oriunda do MEF para a criação de malhas, é conhecido que a presença de elementos muito distorcidos em malhas do MEFE influencia diretamente na qualidade dos resultados [28], sendo importante levar isto em consideração nas simulações.

O MEFE também é muito utilizado em simulações de propagação de ondas acústicas e elásticas [29, 30, 31, 32], por sua capacidade de obter soluções com a precisão desejada utilizando poucos pontos por comprimento de onda, como comentado anteriormente, diminuindo o custo computacional necessário para as simulações. Por exemplo, nos trabalhos [33, 34, 35, 36] o MEFE é utilizado na simulação tridimensional da resposta sísmica nas bacias de Los Angeles, Caracas, Shidian e Sichuan, respectivamente, comprovando a eficiência do método para problemas de grande escala.

Em [37, 38, 39] o MEFE é aplicado a problemas elastodinâmicos com materiais possuindo propriedades que variam de forma gradual ao longo do domínio, os conhecidos FMG da sigla em inglês *Functionally Graded Material*. Em [40] por outro lado, é aplicado um procedimento através do Método das Células Finitas (MCF) em malhas do MEFE para lidar com materiais heterogêneos e geometrias complexas sem precisar distorcer os elementos perto das fronteiras onde os materiais mudam ou acabam, obtendo-se uma metodologia mais flexível. Em [41] é proposto um método staggered-MEFE a fim de juntar as vantagens de ambas as metodologias na resolução de problemas elastodinâmicos, obtendo soluções mais precisas. Em [42, 43, 44] o MEFE é utilizado nas formulações mistas

de problemas como do autovalor de Maxwell e de acústica para frequências medianas, obtendo excelentes resultados.

1.3 Acoplamento MEF-MEFE

No âmbito do acoplamento MEF-MEFE, apenas o fato de se poder utilizar o MEF para as partes do domínio onde a malha possui elementos mais distorcidos e o MEFE para as partes onde a malha possui elementos pouco distorcidos ou regiões que precisam de mais precisão dos resultados, apresenta-se como uma estratégia numérica atraente, desde que se possa aproveitar as características de ambos os métodos.

Assim, com o propósito de manter malhas estruturadas ou com elementos não muito distorcidos perto da interface de contato no subdomínio discretizado pelo MEFE, foram realizados estudos utilizando o método de *mortar* na interface de acoplamento como visto em [45, 46, 47], onde o acoplamento ocorre entre sistemas físicos semelhantes governados por equações elípticas de segunda ordem e com metodologias de acoplamento direto. Em [48, 49] utilizou-se multiplicadores de Lagrange no âmbito do método de mortar, em problemas de elastodinâmica e de acoplamento acústico-elástico respectivamente. Entretanto, estas estratégias mostram-se complexas e sofisticadas, resultando na modificação drástica de códigos existentes.

Nas metodologias de acoplamento iterativo, por outro lado, é realizado um procedimento de interpolação nodal dos valores na interface de acoplamento, resultando num esquema simples de ser implementado, uma vez que as mudanças tanto na formulação quanto na modificação de códigos são mínimas [16]. Em [50] o acoplamento iterativo do MEF-MEFE é aplicado a problemas de elastodinâmica e a interpolação dos valores na interface de interação é feita através das funções de interpolação de cada método e nas integrais de superfície. Ainda neste trabalho, é utilizado um processo de interpolação/extrapolação temporal no esquema de *subcycling*, permitindo utilizar passos de tempos distintos em cada subdomínio, melhorando a eficiência computacional do método.

Por outro lado, em [51] um estudo foi feito no acoplamento por superposição do tipo fluido-estrutura para problemas de hemodinâmica do sistema cardiovascular, utilizando o MEFE para modelar o fluido e o MEF para a estrutura, demonstrando a capacidade e versatilidade do método.

1.4 Justificativa, Objetivos e organização da tese

Resumidamente, o estudo e desenvolvimento de metodologias de acoplamento entre métodos distintos é de grande interesse científico uma vez que:

- Utilizar distintos tipos de discretização, de modo geral, é vantajoso ao descrever

domínios onde existam regiões com características específicas. Neste trabalho o MEFE será usado para a região do fluido e o MEF para a do sólido, conseguindo explorar de maneira ideal ambos os métodos, aumentando a eficiência computacional e obtendo-se resultados mais precisos.

- Nos subdomínios podem ser aplicados diferentes esquemas de marcha no tempo, como explícito e implícito e ainda podem ser escolhidos distintos tamanhos do passo de tempo, aumentando ainda mais a eficiência computacional.

Referente ao acoplamento iterativo, as principais vantagens desta metodologia são:

- Os subdomínios podem ser analisados de maneira isolada, resultando em sistemas de equações menores e bem condicionados, os quais por sua vez podem ser resolvidos por metodologias otimizadas a cada tipo de discretização.
- Somente a implementação de uma rotina para o acoplamento da interface é necessária, podendo reutilizar rotinas existentes.
- Não são necessárias malhas com nós coincidentes na interface de acoplamento; como comentado anteriormente, é feito um esquema de interpolação entre os valores nodais na interface de acoplamento.
- Não são necessários passos de tempo com mesmo tamanho (podendo utilizar um passo ótimo de acordo com cada método e malha), o que é realizado de maneira eficiente através de um processo de interpolação/extrapolação dos valores no esquema de *subcycling*.
- Análises não-lineares são facilmente adaptadas.

Assim, este trabalho tem como objetivo o estudo e desenvolvimento de um método preciso e eficiente de acoplamento iterativo MEF-MEFE para problemas do tipo sólido-fluido com múltiplos tamanhos de passos de tempo nos subdomínios.

O trabalho está dividido em 5 capítulos, no primeiro é apresentado uma introdução e revisão bibliográfica sobre tema. No segundo é apresentada a parte teórica do problema tratado, i.e. são apresentadas as equações governantes e a fundamentação teórica dos métodos utilizados neste trabalho. O terceiro capítulo é dedicado a apresentar o método de acoplamento iterativo implementado e as mudanças propostas, introduzindo o assunto através do acoplamento iterativo sólido-sólido. No quarto capítulo, experimentos numéricos são apresentados a fim de demonstrar a precisão, versatilidade e potencialidade do método proposto, enquanto que no quinto capítulo são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE ACOPLAMENTO SÓLIDO-FLUIDO

Neste capítulo, inicialmente serão abordados os aspectos teóricos, relativos à modelagem matemática, de problemas de acoplamento do tipo sólido-fluido. Será apresentada a modelagem de um fluido acústico no qual ocorre acoplamento de interface com um meio sólido, e em seguida, a modelagem elastodinâmica de um sólido no qual ocorre acoplamento de interface com um meio fluido. Posteriormente serão abordados os aspectos numéricos e computacionais do problema, será apresentado o processo de discretização espacial, via MEFE, de um fluido acústico no qual ocorre acoplamento de interface com um meio sólido, para, em seguida, apresentar o processo de discretização espacial via MEF de um sólido no qual ocorre acoplamento de interface com um meio fluido. A continuação, será apresentado o método- α de marcha no tempo, também chamado de método Hilbert-Hughes-Taylor ou **HHT**, o qual é utilizado para resolver os sistemas de EDO resultantes das técnicas de discretização supracitadas, i.e., MEF e MEFE. Finalmente, serão apresentados exemplos numéricos com a finalidade de comparar o desempenho do MEF e MEFE em cada um dos subdomínio sólido e líquido de maneira isolada (i.e., não havendo interação entre eles).

2.1 Subdomínio Fluido

Com o objetivo de tornar a modelagem do escoamento mais simples, as equações de Navier-Stokes são simplificadas adotando-se as seguintes hipóteses: i) termos advectivos desprezíveis; ii) escoamento invíscido (termos viscosos desprezíveis) e compressível com pequenas variações também para a densidade; e iii) pequenos deslocamentos para as partículas de fluido. Desta forma, como visto em [52, 53, 54], as equações da conservação da quantidade de movimento e conservação da massa (continuidade) levando em consideração a equação de estado podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\rho_f \ddot{u}_i^f + p_{,i} - f_i^f &= z_0 \text{ em } \Omega_f \times I, \\ \dot{u}_{i,i}^f + \dot{p}/\kappa_f &= 0 \text{ em } \Omega_f \times I,\end{aligned}\tag{2.1}$$

nas quais, as variáveis $p : \Omega_f \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $\dot{u}_i^f : \Omega_f \times I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\ddot{u}_i^f : \Omega_f \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representam o campo de pressões, velocidades e acelerações do fluido respectivamente, $f_i^f : \Omega_f \times I \rightarrow \mathbb{R}$ as forças de volume, $\rho_f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $\kappa_f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}_+$ a densidade e o coeficiente de compressibilidade referente ao domínio Ω_f , que no caso homogêneo são constantes ao longo deste.

Das equações anteriores, obtém-se a equação da onda acústica:

$$p_{,ii} - \frac{1}{v_f^2} \ddot{p} + \frac{b^f}{\kappa_f} = 0,\tag{2.2}$$

na qual, a variável $v_f = \sqrt{\kappa_f/\rho_f}$, representa a velocidade de propagação da onda e $b^f : \Omega_f \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma fonte no domínio. Embora este seja um modelo simplificado, é muito utilizado em problemas nos quais ocorre interação com o sólido por ter uma influência substancial nos resultados.

Considerando a seguinte partição $\partial\Omega_f = \Gamma_f = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ de forma que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ quando $i \neq j$, tem-se as condições de contorno da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} \text{ on } \Gamma_1 \times I, \quad q \equiv p_{,j} n_j^f = \bar{q} \text{ on } \Gamma_2 \times I, \\ q &= -\frac{1}{v_f} \dot{p} \text{ on } \Gamma_3 \times I, \quad q = \rho_f \ddot{u}_i^s n_i^s \text{ on } \Gamma_4 \times I, \end{aligned} \quad (2.3)$$

nas quais as variáveis $\bar{p} : \Gamma_1 \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{q} : \Gamma_2 \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representam as pressões e fluxos prescritos na superfície, a variável $\dot{p} : \Gamma_3 \times I \rightarrow \mathbb{R}$, relacionada com as condições de contorno não reflexivas, representa a derivada temporal das pressões na superfície, e ainda $\ddot{u}_i^s$ e n_i^s representam as componentes das acelerações e do vetor unitário e normal à superfície Γ_4 relativas ao subdomínio sólido. Adicionalmente, as condições iniciais são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 \\ \dot{p} &= \dot{p}_0 \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega_f \text{ quando } t = 0. \quad (2.4)$$

Analogamente à modelagem do subdomínio sólido, a forma fraca do problema em questão consiste em: achar $p \in S_f$, tal que $\forall t > 0$ e $\forall w \in V_f$ e que seja verdade a seguinte equação:

$$\left(w, \frac{1}{v_f^2} \ddot{p} \right) + a_f(w, p) = \left(w, \frac{1}{\kappa_f} b^f \right) + (w, \bar{q})_{\Gamma_2} + \left(w, \frac{1}{v_f} \dot{p} \right)_{\Gamma_3} + (w, q)_{\Gamma_4}, \quad (2.5)$$

na qual, $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{\Omega_f}$, $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_i}$ com $i = 1, \dots, 4$ é o produto interno $L^2(\Omega_f)$ usual em Ω_f , Γ_i , respectivamente, e o operador bilinear $a_f(\cdot, \cdot)$ de $H^1(\Omega_f)$ é o produto interno definido como:

$$a_f(w, p) = \int_{\Omega_f} w_{,i} p_{,i} d\Omega_f, \quad (2.6)$$

e no qual o espaço de soluções admissíveis é dado por:

$$S_f = \left\{ p \mid p(\cdot, t) \in H^1(\Omega_f), p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_1 \times I \right\}, \quad (2.7)$$

e o espaço V_f das funções teste w é dado por:

$$V_f = \left\{ w \mid w \in H^1(\Omega_f), w = 0 \text{ em } \Gamma_1 \right\}. \quad (2.8)$$

2.2 Subdomínio sólido

Seja $\Omega_s \subset \mathbb{R}^d$, um subdomínio finito aberto qualquer com um contorno $\partial\Omega_s = \Gamma_s$ do tipo Lipschitz com d representando o número de dimensões do problema e s o domínio

sólido. Sendo $I = (0, T] \subset \mathbb{R}^+$ o tempo de análise (domínio temporal), o sistema de equações diferenciais parciais que descreve problemas elastodinâmicos com acoplamento de interface é dado por:

$$\rho_s \ddot{u}_i^s - \sigma_{ij,j} = b_i^s \text{ em } \Omega_s \times I. \quad (2.9)$$

Nesta equação, a variável $u_i^s : \Omega_s \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representa as componentes do campo de deslocamentos, $b_i^s : \Omega_s \times I \rightarrow \mathbb{R}$ as componentes das forças de volume por unidade de volume, $\sigma_{ij} : \Omega_s \times I \rightarrow \mathbb{R}$ as componentes do *tensor de tensões de Cauchy* e $\rho_s : \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}_+$ a densidade de massa.

Considerando a partição $\partial\Omega_s = \Gamma_s = \Gamma_{D_i} \cup \Gamma_{N_i} \cup \Gamma_{It_i}$ na qual ocorre a seguinte relação $\Gamma_{D_i} \cap \Gamma_{N_i} = \Gamma_{D_i} \cap \Gamma_{It_i} = \Gamma_{N_i} \cap \Gamma_{It_i} = \emptyset$, e sendo Γ_{It_i} o contorno relacionado com o acoplamento de interface, as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned} u_i^s &= \bar{u}_i^s \text{ em } \Gamma_{D_i} \times I, \\ \tau_i &\equiv \sigma_{ij} n_j^s = \bar{\tau}_i \text{ em } \Gamma_{N_i} \times I, \\ \tau_i &= -pn_i^s \text{ em } \Gamma_{It_i} \times I. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nestas equações, a variável $\bar{u}_i^s : \Gamma_{D_i} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representa as componentes dos deslocamentos prescritos, $\bar{\tau}_i : \Gamma_{N_i} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representa as componentes das forças de superfície prescritas e n_i^s as do vetor unitário e normal à superfície Γ_{It_i} , ainda $p : \Gamma_{It_i} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ representa a pressão hidrostática relativa ao fluido na interface de acoplamento, o qual será tratado em detalhes mais à frente.

As condições iniciais são dadas pela relação:

$$\left. \begin{aligned} u_i^s &= u_{0i}^s \\ \dot{u}_i^s &= v_{0i}^s \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega_s \text{ quando } t = 0, \quad (2.11)$$

na qual, a variável $v_{0i}^s : \Gamma_{D_i} \rightarrow \mathbb{R}$ representa as componentes do campo de velocidades no tempo inicial.

A fim de realizar uma descrição completa do comportamento de um sólido elástico é necessário levar em conta as relações constitutivas do meio, que para o caso da elasticidade linear são dadas pela relação tensão-deformação (Lei de Hooke generalizada) descrita por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.12)$$

na qual, o *tensor de elasticidade* de quarta ordem C_{ijkl} que num caso mais geral possui 81 componentes, terá esse número reduzido a 21 componentes independentes como pode ser visto em [55, 56].

A partir da Eq. (2.12) e da definição do *tensor de deformações linear* pode-se reescrever a equação (2.9)

$$\rho_s \ddot{u}_i^s - (C_{ijkl} u_{k,l}),_j = b_i^s \text{ em } \Omega_s \times I, \quad (2.13)$$

que será utilizada na subseção a seguir.

Ainda, neste trabalho será considerado apenas o caso de um sólido isotrópico, fazendo com que as 21 componentes independentes citadas anteriormente se tornem apenas duas (2), resultando na seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.14)$$

na qual a variável ε_{kk} definida como $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ representa a *dilatação*, λ e μ são as conhecidas constantes de Lamé do material a partir das quais se definem o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.15)$$

A fim de montar a forma fraca ou variacional do problema descrito pelas Eqs. 2.10 e 2.13, define-se o seguinte espaço das soluções admissíveis $\mathbf{S}$, no qual a solução u_i^s é tal que:

$$\mathbf{S} = \left\{ u_i^s \mid u_i^s(\cdot, t) \in H^1(\Omega_s), u_i^s = \bar{u}_i^s \text{ em } \Gamma_{D_i} \times I, i = 1, \dots, d \right\}, \quad (2.16)$$

e, analogamente, define-se o espaço $\mathbf{V}$ das funções teste w_i da seguinte forma:

$$\mathbf{V} = \left\{ w_i \mid w_i \in H^1(\Omega_s), w_i = 0 \text{ em } \Gamma_{D_i}, i = 1, \dots, d \right\}. \quad (2.17)$$

O espaço $H^1(\Omega_s)$ representa o espaço de Sobolev clássico das funções de quadrados integráveis cujas primeiras derivadas parciais são também quadrado integráveis no domínio Ω_s [57], ou seja:

$$H^1(\Omega_s) = \left\{ w_i \in L^2(\Omega_s) \mid w_{i,j} \in L^2(\Omega_s) \text{ e } i, j = 1, \dots, d \right\}, \quad (2.18)$$

no qual $L^2(\Omega_s)$ representa o espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$(u_i^s, w_i) = \int_{\Omega_s} u_i^s w_i d\Omega_s. \quad (2.19)$$

Como visto em [58], a forma fraca do problema considerado consiste em: achar $\mathbf{u}^s \in \mathbf{S}$, tal que $\forall t > 0$ e $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ seja verdade a seguinte equação:

$$(w_i, \rho \ddot{u}_i^s) + a_s(w_i, u_i^s) = (w_i, b_i^s) + (w_i, \bar{\tau}_i)_{\Gamma_{N_i}} + (w_i, \tau_i)_{\Gamma_{I_i}}, \quad (2.20)$$

na qual, $(\cdot, \cdot) \equiv (\cdot, \cdot)_{\Omega_s}$ e $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ são, respectivamente, o produto interno L^2 clássico em Ω_s e em Γ , e a forma bilinear $a_s(\cdot, \cdot)$ em H^1 é definida como:

$$a_s(w_i, u_i^s) = \int_{\Omega_s} C_{ijkl} u_{k,l}^s w_{i,j} d\Omega_s. \quad (2.21)$$

2.3 Solução via MEFÉ

A partir da forma fraca das equações governantes do subdomínio líquido, é obtida a formulação semi-discreta do MEFÉ, na qual o domínio físico Ω_f é discretizado em nel_f elementos não sobrepostos Ω_{fe} , i.e. $\Omega_f^h = \cup_{e=1}^{nel_f} \Omega_{fe}$ e $\Omega_{fe} \cap \Omega_{fe'} = \emptyset$ para $e \neq e'$. De forma que exista um difeomorfismo que preserve a orientação, chamado de função mapeamento, e que relacione cada elemento Ω_{fe} com o elemento de referência Λ^2 , neste caso um quadrilátero bi-unitário $\Lambda^2 = [-1, 1]^2$, definido como:

$$\mathcal{F}_e : \Lambda^2 \rightarrow \Omega_{fe}, \quad (2.22)$$

e que envie os vértices do elemento de referência para os vértices de Ω_{fe} , como esquematizado na Figura 2.

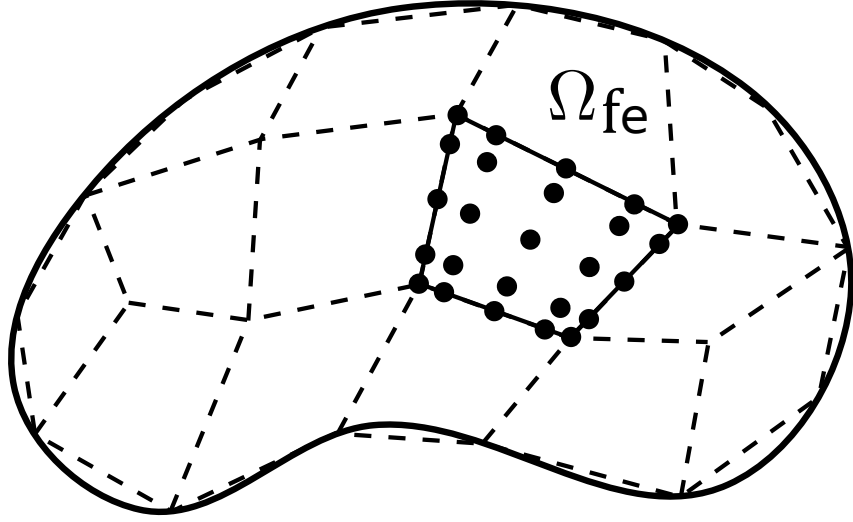


Figura 2 – Representação da discretização espacial via MEFÉ.

A seguir, tomando-se $S_f^h \subset S_f$ e $V_f^h \subset V_f$ como os espaços de elementos finitos, e sendo $\mathbb{P}(\Lambda^2)$ o espaço gerado pelo produto tensorial dos polinômios de Lagrange de ordem $\leq p$, tem-se:

$$\begin{aligned} S_f^h &= \left\{ p^h \mid p^h(\cdot, t) \in H^1(\Omega_f), p^h = \bar{p}^h \text{ em } \Gamma_1 \times I \right. \\ &\quad \left. \text{e } p^h|_{\Omega_{fe}} \circ \mathcal{F}_e \in \mathbb{P}(\Lambda^2) \right\} \\ V_f^h &= \left\{ w^h \mid w^h \in H^1(\Omega_f), w^h = 0 \text{ em } \Gamma_1 \right. \\ &\quad \left. \text{e } w^h|_{\Omega_{fe}} \circ \mathcal{F}_e \in \mathbb{P}(\Lambda^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3.1 Elementos sub-paramétricos - mapeamento linear

Neste trabalho, decidiu-se adotar uma aproximação sub-paramétrica nos elementos do MEFÉ, i.e., para a aproximação geométrica dos elementos (funções de forma) usam-se funções lineares, enquanto que no espaço de soluções são usados polinômios de alta ordem como funções de interpolação. Diferente do MEF padrão, que utiliza a mesma ordem de

polinômios tanto para as funções de forma quanto para a interpolação, resultando nos chamados elementos isoparamétricos.

Cabe ressaltar que existem métodos mais robustos de mapeamento para elementos de alta ordem, como por exemplo, as baseadas em funções do tipo Blending (*Blending mapping*), que são usualmente usadas nas formulações do MEF-p e que permitem uma boa representação de geometrias curvas, para mais informações o autor sugere as seguintes referências [59, 60, 61].

As funções do mapeamento linear possuem as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ \bar{N}_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ \bar{N}_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ \bar{N}_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta),\end{aligned}\tag{2.24}$$

nas quais ξ e η são as coordenadas do ponto local $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta) \in \Lambda^2$, a partir do qual define-se o ponto global $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega_{fe}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_i^e,\tag{2.25}$$

na qual, os pontos $\mathbf{x}_i^e$ são as coordenadas referentes aos vértices do elemento Ω_{fe} , como é possível ver na Figura 3. Resta comentar que estas funções de forma são as mesmas utilizadas na formulação isoparamétrica do MEF padrão com elementos quadrilaterais bilineares.

2.3.2 Funções de interpolação e distribuição de pontos internos

Diferentemente do MEF, no qual são utilizados pontos internos equidistantes nos elementos de alta ordem, no MEFE, a distribuição dos pontos internos, que também serão utilizados para a construção das funções de interpolação, é dada pela regra de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL).

Estes pontos, localizados no intervalo $\Lambda = [-1, 1]$, são definidos como raízes da equação:

$$\frac{\partial P_p}{\partial \xi}(\xi^2 - 1) = 0,\tag{2.26}$$

na qual P_p é o p -ésimo polinômio de Legendre, como pode ser visto em [29, 62]. Para o caso bidimensional, no qual são utilizados elementos quadrilaterais, a distribuição dos pontos no elemento é realizada através do produto tensorial dos $n_{gl} = p + 1$ pontos GLL, totalizando n_{gl}^2 pontos. Na Figura 4 são apresentados alguns elementos espectrais de acordo ao número de pontos n_{gl} utilizados.

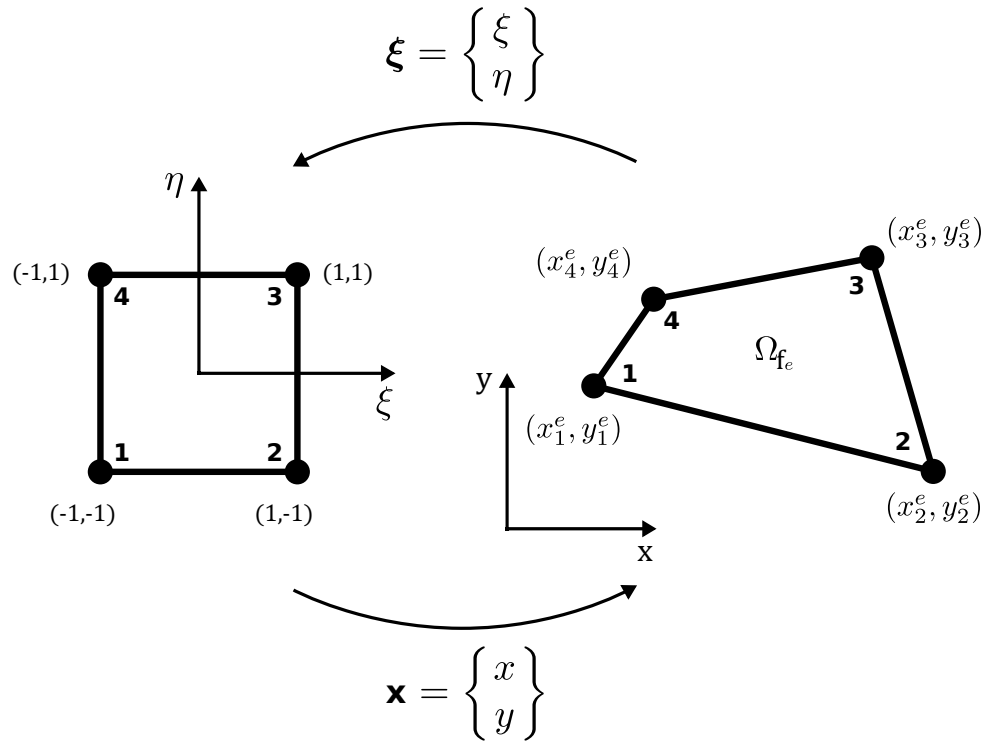


Figura 3 – Mapeamento do elemento bilinear.

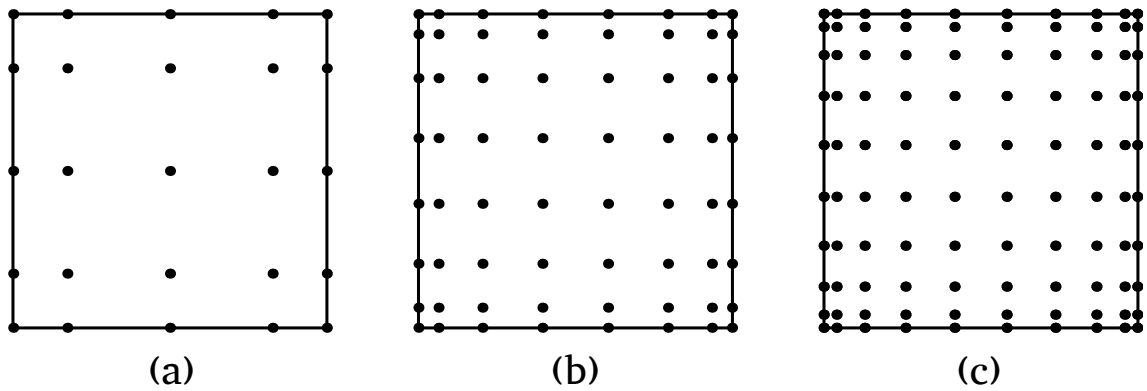


Figura 4 – Diferentes elementos espectrais 2D de acordo ao número de pontos n_{gl} utilizados:
(a) 5×5 ; (b) 8×8 ; (c) 10×10 .

Como visto na Eq. (2.23), a solução aproximada será resultado da interpolação por polinômios de Lagrange, gerados no elemento a partir dos pontos GLL citados anteriormente. Assim, os polinômios interpoladores de Lagrange são definidos como sendo:

$$l_i^p = \prod_{j=1; j \neq i}^{p+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}, \quad (2.27)$$

e possuem uma característica importante: cada polinômio l_i^p é exatamente 1 no ponto ξ_i e exatamente 0 em todos os outros pontos ξ_j , ($i \neq j$), do elemento, não tendo porém restrições nos valores entre cada pontos. Esta propriedade é expressada através da seguinte relação:

$$l_i^p(\xi_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, p+1, \quad (2.28)$$

na qual δ_{ij} é o operador delta de Kronecker.

Para o caso bidimensional onde são utilizados elementos quadrilaterais, as funções de interpolação N_i , são obtidas através do produto tensorial dos polinômios interpoladores de Lagrange de ordem p nos n_{gll} pontos de GLL.

Na Figura 5 é possível observar algumas funções de interpolação do MEF e MEFE num elemento quadrilateral, na primeira e segunda coluna de gráficos, respectivamente. Nos gráficos correspondentes ao MEF, é possível ver o aparecimento de oscilações de amplitudes elevadas perto das extremidades do domínio, chegando a aparecer valores com amplitudes de até 10 vezes maior do que o valor unitário (1.0). No gráfico do meio e de baixo, por exemplo, não é possível identificar onde a função de interpolação tem seu valor unitário, i.e. onde é cumprida a relação dada pela Eq. (2.28), se fazendo necessário utilizar uma seta para possibilitar sua visualização.

O aparecimento destas oscilações nos polinômios de Lagrange de ordem elevada é conhecido como *fenômeno de Runge*, como comentado anteriormente e são causadas pela escolha dos pontos igualmente espaçados. Como é possível observar na segunda coluna de gráficos da Figura 5 as funções de interpolação apresentam uma amplitude controlada, sendo seu valor $|N_i(\xi)| \leq 1$ em todos os casos, mostrando que na formulação do MEFE é mais robusta e que esse tipo de erro não ocorre.

A seguir definem-se as funções de interpolação globais em função das locais, previamente definidas: tomando um ponto nodal global pertencente ao domínio de algum elemento e qualquer, i.e., $\mathbf{x} \in \Omega_{fe}$, de forma que não pertença a nenhum outro (i.e., um ponto interno), então a função de interpolação global correspondente ao nó local j é dada por $N_j(\xi(\mathbf{x}))|_{\Omega_{fe}}$ tal que $N_j(\mathbf{x}(\xi))|_{\Omega_{fe}} = N_j(\xi)$ e é zero caso contrário, resultando numa função do tipo bolha.

Por outro lado, caso o ponto nodal $\mathbf{x}$ esteja localizado no contorno de mais de um elemento, pode-se expressar $\mathbf{x}_e(\xi)$ para cada um desses elementos, a função de interpolação $N_j(\mathbf{x}_e(\xi))|_{\Omega_{fe}} = N_j(\xi)$ em relação a cada elemento de tal forma que a função de

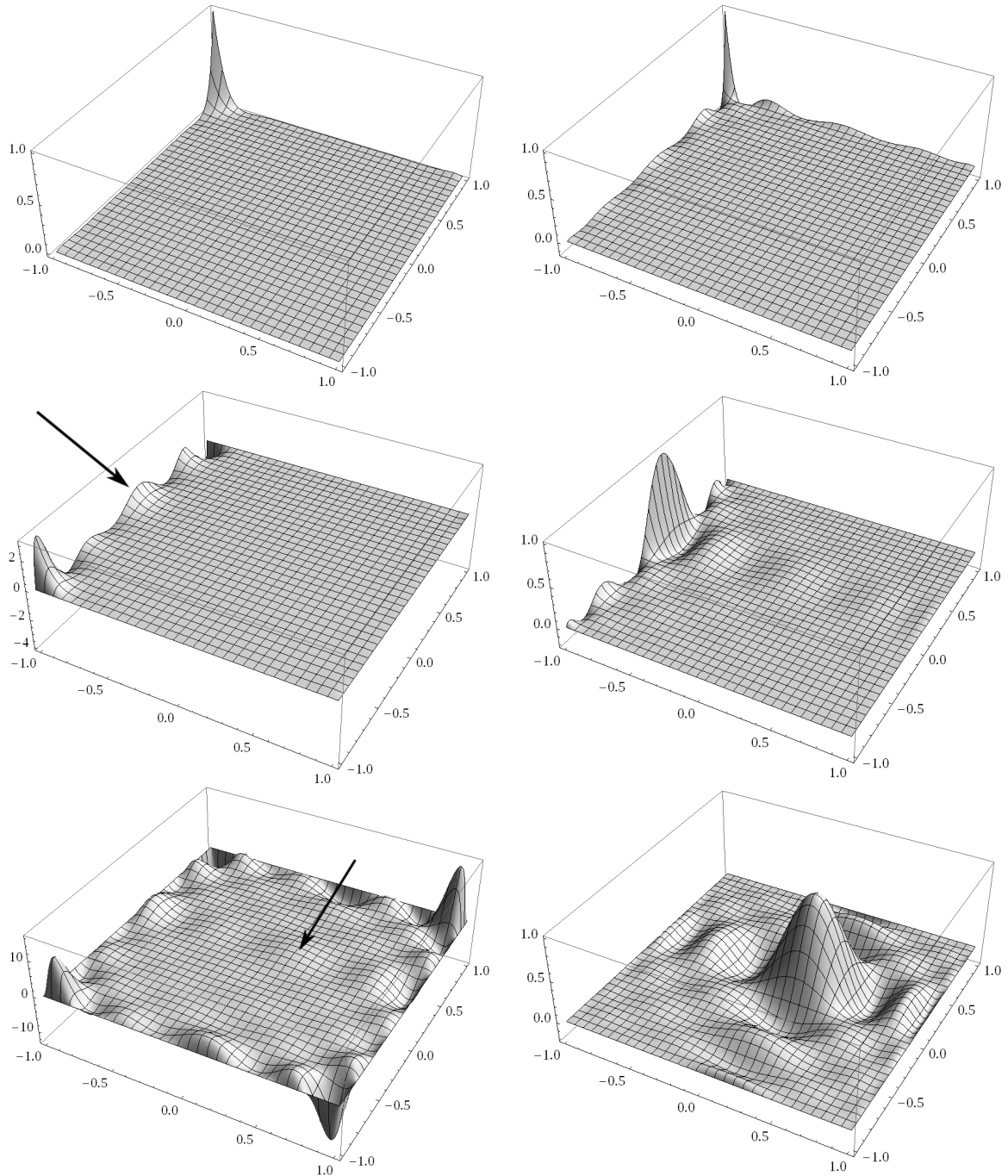


Figura 5 – Comparação entre os polinômios de Lagrange com $p = 9$, com raízes em pontos equidistantes (lado esquerdo) e GLL (lado direito). De cima para baixo, são apresentadas funções de interpolação cujo valor unitário (propriedade Eq. (2.28)) está localizado num ponto: Vértice, lado e interno.

interpolação global é formada pela união destas sendo zero para elementos não adjacentes. Assim, define-se o campo de pressões aproximado a partir das funções de interpolação globais como: $p^h(\mathbf{x}, t) = \sum_i^{nn_f} p_i(t) N_i(\mathbf{x})$, no qual o espaço e tempo são tomados como sendo independentes e nn_f representa o número de nós da malha do domínio Ω_f .

2.3.3 Integração numérica

Dada a formulação integral das equações governantes, estas precisam ser avaliadas numericamente. Ao construir a quadratura Gaussiana ou de *Gauss* utilizando os zeros dos polinômios de *Legendre* no intervalo $(-1, 1)$, é obtida a quadratura de *Gauss-Legendre* a qual consiste em: sendo $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_p$ as raízes do $p+1$ -ésimo polinômio de Legendre, P_{p+1} , e sendo $w_0, \dots, w_p$ a solução do sistema linear

$$\sum_{j=0}^N (\xi_j)^k w_j = \int_{-1}^1 \xi^k d\xi, \quad 0 \leq k \leq p, \quad (2.29)$$

na qual se cumprem os seguintes pontos:

i) $w_j > 0$, para $j = 0, \dots, N$ e

$$\sum_{j=0}^N \mathbf{p}(\xi_j) w_j = \int_{-1}^1 \mathbf{p}(\xi) d\xi, \quad \text{para todo } \mathbf{p} \in \mathbb{P}_{2p+1}(-1, 1), \quad (2.30)$$

denotando por $\mathbb{P}_{2p+1}(-1, 1)$ os polinômios de ordem menor ou igual a $2p+1$ definidos no intervalo $(-1, 1)$, e por w_i números positivos chamados de pesos, dados por

$$w_j^p = \int_{-1}^1 l_j^p(\xi) d\xi, \quad (2.31)$$

sendo l_j^p o polinômio de Lagrange de ordem p apresentados anteriormente;

ii) Não é possível encontrar $\xi_j, w_j, j = 0, \dots, p$, de forma que a Eq. (2.29) sirva para todos os polinômios $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_{2p+1}(-1, 1)$.

Adicionando como raízes, os extremos do intervalo $(-1, 1)$ às raízes do $p+1$ -ésimo polinômio de Legendre P_{p+1} , é obtida a quadratura de *Gauss-Lobatto-Legendre*, que será utilizada neste trabalho e cujos pesos ω_i^p são dados explicitamente por:

$$\omega_j^p = \frac{2}{p(p+1)} \frac{1}{P_p(\xi_j)}. \quad (2.32)$$

Para o caso bidimensional, é realizado o produto tensorial dos pesos do caso unidimensional [63], e escolhendo os pontos da quadratura ξ_j como sendo os mesmos pontos GLL apresentados anteriormente, é possível integrar de maneira exata todos os polinômios de ordem $\leq 2p-1$.

Tabela 1 – Tabela de pontos e pesos GLL.

n_{gll}	$\pm\xi_j$	ω_j^p
2	1.000 000 000 000 000	1.000 000 000 000 000
3	0.000 000 000 000 000	1.333 333 333 333 333
	1.000 000 000 000 000	0.333 333 333 333 333
4	0.447 213 595 499 958	0.833 333 333 333 333
	1.000 000 000 000 000	0.166 666 666 666 667
5	0.000 000 000 000 000	0.711 111 111 111 111
	0.654 653 670 707 977	0.544 444 444 444 444
	1.000 000 000 000 000	0.100 000 000 000 000
6	0.285 231 516 480 645	0.554 858 377 035 486
	0.765 055 323 929 465	0.378 474 956 297 847
	1.000 000 000 000 000	0.066 666 666 666 667
7	0.000 000 000 000 000	0.487 619 047 619 048
	0.468 848 793 470 714	0.431 745 381 209 863
	0.830 223 896 278 567	0.276 826 047 361 566
	1.000 000 000 000 000	0.047 619 047 619 048
8	0.209 299 217 902 479	0.412 458 794 658 704
	0.591 700 181 433 142	0.341 122 692 483 504
	0.871 740 148 509 607	0.210 704 227 143 506
	1.000 000 000 000 000	0.035 714 285 714 286

Na Tabela 1 podem ser vistos os pontos de integração e os seus respectivos pesos para alguns valores de n_{gll} .

Cabe ressaltar que, da utilização desta quadratura em conjunto com os polinômios de Lagrange como funções de interpolação, construídos a partir dos pontos internos apresentados na sessão 2.3.2, a matriz de rigidez resultante da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é integrada de maneira exata, e todas as matrizes originadas do produto interno L^2 , i.e., $(\cdot, \cdot)$, são naturalmente diagonais [29], obtendo-se uma propriedade muito importante do ponto de vista computacional, uma vez que a inversão desta matriz é trivial, o que é muito útil quando utilizados métodos de marcha no tempo explícitos por exemplo, nos quais comumente são utilizadas técnicas de diagonalização na matriz de massa para em seguida poder invertê-la.

Além das técnicas de diagonalização serem utilizadas pra melhorar o desempenho computacional e de armazenamento, é conhecido que melhora a precisão dos resultados em problemas de propagação de ondas, nos quais apresentam menor quantidade de oscilações espúrias se comparados com metodologias de marcha no tempo implícitas e utilizando matrizes de massa consistentes¹ [64].

Por outro lado, mesmo que a integração da matriz de massa não seja realizada de maneira exata, este esquema possui conservação de massa em elementos de ordem alta,

¹ Matriz de massa consistente é a que não passou por técnicas de diagonalização.

diferentemente do MEF de alta ordem, que possui alguns problemas numéricos e físicos de conservação de massa no momento da diagonalização [64, 65].

Finalmente, da aplicação da formulação semi-discreta do MEFE no problema em questão, obtém-se o seguinte sistema de EDO:

$$\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{C}_f \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_f \mathbf{P} = \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_4, \quad (2.33)$$

no qual $\mathbf{M}_f \in \mathbb{R}^{nq_f \times nq_f}$ e $\mathbf{K}_f \in \mathbb{R}^{nq_f \times nq_f}$ são as matrizes globais de massa efetiva e rigidez respectivamente, $\mathbf{F}_f : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq_f}$ e $\mathbf{F}_4 : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq_f}$ são os vetores de forças nodais externas e de superfície na interface de contato respectivamente, o tratamento adequado para este último será apresentado no capítulo 3, os outros são obtidos como a seguir:

$$\mathbf{M}_f = \int_{\Omega_f} \frac{1}{v_f^2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_f, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{C}_f = \int_{\Omega_f} \frac{1}{v_f} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega_f, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{K}_f = \int_{\Omega_f} (\nabla \mathbf{N})^T (\nabla \mathbf{N}) d\Omega_f, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{F}_f = \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{q}} d\Gamma_2 + \int_{\Omega_f} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega_f. \quad (2.37)$$

Os vetores $\mathbf{P} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq_f}$ e $\dot{\mathbf{P}} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nq_f}$ representam respectivamente, as pressões nodais e suas derivadas segundas no tempo, respectivamente, no qual nq_f é o número de equações resultantes da discretização do domínio Ω_f governada pela equação da acústica.

2.3.4 Condensação Estática

Tendo em vista a eficiência computacional do MEFE é proposto a utilização de um esquema de *condensação estática* [64, 66, 67] a fim de eliminar algumas equações e incógnitas das matrizes do sistema de EDO apresentado anteriormente. Estas equações e incógnitas estão relacionados aos *nós internos* de um dado elemento e , os quais não estão ligados diretamente a outros elementos –lembrando que os valores dos nós interno são calculados independentemente– por outro lado, os nós que estão relacionados com mais de um elemento são chamados de nós de contorno. Desta forma, escolhendo a matriz local de rigidez $\mathbf{K}_e$ como alvo, sua condensação é realizada como a seguir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ci} \\ \mathbf{K}_{ic} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_c \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

no qual $\mathbf{u}_z$ e $\mathbf{f}_z$, e $z = c, i$, são os vetores de incógnitas e de forças nodais no elemento e os índices c e i fazem referência aos nós internos e de contorno, respectivamente.

Da segunda equação do sistema (2.38):

$$\mathbf{K}_{ic}\mathbf{u}_c + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, \quad (2.39)$$

e do fato de que a matriz $\mathbf{K}_{ii}$ é não singular, pode se obter a seguinte igualdade:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_{ii}^{-1}(\mathbf{f}_i - \mathbf{K}_{ic}\mathbf{u}_c), \quad (2.40)$$

a qual é substituída na primeira equação de (2.38) resultando no sistema condensado

$$\tilde{\mathbf{K}}_{cc}\mathbf{u}_c = \tilde{\mathbf{f}}_c, \quad (2.41)$$

no qual a matriz condensada e vetor de forças condensado são dados como:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{cc} = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{ci}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ic} \text{ e } \tilde{\mathbf{f}}_c = \mathbf{f}_c - \mathbf{K}_{ci}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{f}_i. \quad (2.42)$$

A partir de manipulações algébricas chega-se a matriz de transformação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ic} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

da qual obteremos as novas matrizes locais condensadas de rigidez, amortecimento e de massa respectivamente como:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{cc} = \mathbf{T}^T\mathbf{K}_e\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_{cc} = \mathbf{T}^T\mathbf{C}_e\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_{cc} = \mathbf{T}^T\mathbf{M}_e\mathbf{T}. \quad (2.44)$$

Ainda, é bom ressaltar que em muitos casos o vetor de forças interno é nulo podendo simplificar ainda mais os cálculos; outra consideração a ser feita é que o processo de condensação é realizado uma única vez e a nível de elemento.

Existem ainda outras formas de condensação na literatura como por exemplo, a chamada condensação dinâmica na qual os valores da matriz de transformação $\mathbf{T}$ são obtidos como resultado de um problema de autovalores; ainda a condensação estática melhorada, na qual à matriz $\mathbf{T}$ é adicionada uma fração contendo informações da matriz local de massa.

2.4 Solução via MEF

De maneira análoga ao MEF-E, a partir da forma fraca das equações governantes do subdomínio sólido, é obtida a formulação semi-discreta do MEF, obtendo o seguinte sistema de EDO, como visto detalhadamente em [68]:

$$\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_s\mathbf{U} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{It}, \quad (2.45)$$

no qual, as matrizes $\mathbf{M}_s \in \mathbb{R}^{n_{qs} \times n_{qs}}$ e $\mathbf{K}_s \in \mathbb{R}^{n_{qs} \times n_{qs}}$ representam as matrizes globais de massa e de rigidez respectivamente com n_{qs} sendo o número de equações resultante da discretização, assim, as matrizes são definidas como:

$$\mathbf{K}_s = \int_{\Omega_s} (\nabla \mathbf{N})^T \mathbf{D}_n (\nabla \mathbf{N}) d\Omega, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{M}_s = \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (2.47)$$

sendo $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ a matriz referente ao tensor de elasticidade linear isotrópico, $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{2 \times n_{qs}}$ a matriz formada pelas funções de interpolação do MEF. Os vetores $\mathbf{U} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{qs}}$, $\ddot{\mathbf{U}} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{qs}}$ representam, respectivamente, os deslocamentos e acelerações nodais. O vetor de forças nodais externas, representado por $\mathbf{F}_s : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{qs}}$ é definido como:

$$\mathbf{F}_s = \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}^T \bar{\boldsymbol{\tau}} d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega. \quad (2.48)$$

A definição do vetor de forças nodais de acoplamento $\mathbf{F}_{It} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n_{qs}}$ será apresentado no capítulo 3.

2.5 O método de marcha no tempo Hilbert-Hughes-Taylor (HHT)

Os sistemas de EDO dados pelas Eqs. (2.45) e (2.33) podem ser colocadas da seguinte forma geral:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} = \mathbf{F} \quad (2.49)$$

na qual o vector $\mathbf{Z}$ corresponde a $\mathbf{U}$ ou $\mathbf{P}$ de acordo ao subdomínio em questão, assim como as suas respectivas matrizes, por exemplo, quando tratado o subdomínio sólido, a matriz $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ uma vez que não foram implementadas condições de contorno não reflexivas assim como amortecimento viscoso.

Neste trabalho os sistemas de EDO do tipo da Eq. (2.49) juntamente com as condições iniciais são resolvidos pelo método de marcha no tempo HHT, utilizando em cada subdomínio parâmetros distintos, de forma a obter melhores resultados. Nos métodos de marcha no tempo, o intervalo de análise I é particionado em L_z subintervalos de tempo iguais, i.e., $[0, T] = \cup_{l=0}^{L_z-1} [t_{z,l}, t_{z,l+1}]$, com $0 = t_{z,0} < \dots < t_{z,L_z} = T$, $\Delta t_z = t_{z,l+1} - t_{z,l} = T/L_z$ e $t_{z,l+1} = (l+1)\Delta t_z$ de forma que $\mathbf{Z}_n^{l+1} = \mathbf{Z}_n(t_{l+1})$, nos quais o índice z está relacionado ao subdomínio em questão, i.e., o índice f é utilizado para se referir ao subdomínio fluido e s para subdomínio sólido.

Da aplicação do esquema HHT na Eq. (2.49), resulta a seguinte expressão :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{Z}}^{l+1} &= \bar{\mathbf{F}}^{l+1}, \\ \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} + (1 + \alpha) \left(\gamma \Delta t_z \mathbf{C} + \beta \Delta t_z^2 \mathbf{K} \right), \\ \bar{\mathbf{F}}^{l+1} &= \mathbf{F}^{l+\alpha} - (1 + \alpha) \left(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{Z}}^{l+1} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{Z}}^{l+1} \right) + \alpha \left(\mathbf{C}\dot{\mathbf{Z}}^l + \mathbf{K}\mathbf{Z}^l \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

na qual $\mathbf{F}^{l+\alpha} = \mathbf{F}(t_{z,l+\alpha})$ e $t_{z,l+\alpha} = (1 + \alpha)t_{z,l+1} - \alpha t_{z,l} = t_{z,l+1} + \alpha\Delta t_z$.

Sendo os *preditores* definidos como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Z}}^{l+1} &= \mathbf{Z}^l + \Delta t_z \dot{\mathbf{Z}}^l + \frac{\Delta t_z^2}{2}(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{Z}}^l \\ \tilde{\dot{\mathbf{Z}}}^{l+1} &= \dot{\mathbf{Z}}^l + (1 - \gamma)\Delta t_z \ddot{\mathbf{Z}}^l\end{aligned}\tag{2.51}$$

e os *corretores* como:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}^{l+1} &= \tilde{\mathbf{Z}}^{l+1} + \beta\Delta t_z^2 \ddot{\mathbf{Z}}^{l+1} \\ \dot{\mathbf{Z}}^{l+1} &= \tilde{\dot{\mathbf{Z}}}^{l+1} + \gamma\Delta t_z \ddot{\mathbf{Z}}^{l+1}\end{aligned}\tag{2.52}$$

falta apenas a escolha dos parâmetros α , β e γ para o esquema de marcha no tempo ficar bem definido. Um Passo-a-passo do método HHT pode ser visto na Tabela 2.

Tabela 2 – Passo-a-passo da solução do sistema de EDO via HHT

A. Cálculos iniciais:

1. Formar as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\bar{\mathbf{M}}$
2. Atribuir valores para os vetores iniciais $\mathbf{Z}^0$, $\dot{\mathbf{Z}}^0$ e $\ddot{\mathbf{Z}}^0$
3. Escolher o tamanho do passo de tempo Δt_z , e definir os parâmetros $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = (1 - \alpha)^2/4$, $\gamma = (1 - 2\alpha)/2$, também são atribuídos os seguintes valores iniciais: $t_{z,l} = 0$ e $t_{z,l+1+\alpha} = t_{z,l+1} + \alpha\Delta t_z$
4. Fatorar a matriz $\bar{\mathbf{M}}$ (*solvers* diretos)

B. A cada passo de tempo:

1. Calcular os preditores através da Eq. (2.51)
 2. Calcular $\bar{\mathbf{F}}^{l+1}$ da Eq. (2.50) com os valores dos preditores e em $t_{z,l+\alpha}$
 3. Resolver o sistema $\bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{Z}}^{l+1} = \bar{\mathbf{F}}^{l+1}$ da Eq. (2.50)
 4. Calcular o valores de $\mathbf{Z}^{l+1}$, $\dot{\mathbf{Z}}^{l+1}$ através da Eq. (2.52)
 5. Calcular $t_{z,l+\alpha} = t_{z,l+1} + \alpha\Delta t_z$
-

O método HHT pode ser entendido como uma generalização do esquema de Newmark, uma vez que ao escolher $\alpha = 0$ recaímos no dito esquema [58]. O método de Newmark é um dos esquemas mais conhecidos na literatura para a resolução de sistemas de EDO dados pela Eq. (2.49), neste esquema, a escolha dos parâmetros β e γ determina características importantes do método como sua estabilidade e ordem de precisão, por exemplo, é possível obter a *regra do trapézio* ao escolher $\beta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, e o método de *diferença central* escolhendo $\beta = 0$ e $\gamma = \frac{1}{2}$, ambos sendo de segunda ordem de acurácia e sendo respectivamente implícito e explícito, sendo incondicional e condicionalmente estável.

Porém, não é possível adicionar amortecimento numérico no esquema de Newmark sem diminuir a ordem de acurácia, o que é de suma importância na modelagem numérica destes fenômenos, uma vez que pode ocorrer o aparecimento de soluções com oscilações espúrias, vindo a comprometer os resultados. Ao escolher os parâmetros como a seguir:

$$\begin{aligned}\beta &= (1 - \alpha)^2/4 \\ \gamma &= (1 - 2\alpha)/2 \\ \alpha &\in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]\end{aligned}\tag{2.53}$$

o esquema HHT resulta incondicionalmente estável de segunda ordem de acurácia e com amortecimento numérico controlado pelo parâmetro α , como visto em [69]. Desta forma, pode-se escolher as características do esquema de marcha no tempo de acordo ao subdomínio em questão, e.g., pode-se melhorar a precisão dos resultados correspondentes ao domínio fluido utilizando o esquema com amortecimento numérico visto anteriormente e quando não necessário utilizar a regra do trapézio, como será visto a seguir.

2.6 Exemplos numéricos

É importante apresentar o desempenho de ambas as metodologias quando utilizadas de maneira isolada para poder realizar uma comparação entre estes. O primeiro exemplo consiste num problema de propagação de onda acústica num meio homogêneo, no qual serão verificadas as vantagens de utilizar o MEFE em problemas deste tipo, como comentado anteriormente. O segundo exemplo apresentado é comumente utilizado para testar a precisão e robustez de métodos numéricos e consiste numa barra engastada em um dos extremos e sofrendo a aplicação de uma carga uniformemente distribuída no extremo oposto, neste exemplo serão usados dois graus de polinômios diferentes para o MEFE cujos resultados serão comparados com o MEF padrão e a solução de referência.

2.7 Onda acústica – meio fluido

Este problema, está relacionado diretamente com a geofísica e a propagação de onda acústica mediante uma fonte sísmica, diferentemente do próximo exemplo que é de caráter mais acadêmico. Como dito anteriormente, a análise deste problema tem por finalidade demonstrar a eficácia e precisão dos resultados obtidos pelo MEFE quando comparado com os do MEF padrão.

Neste exemplo, foi adotada a técnica de diagonalização de matrizes *Row-sum* para o caso da matriz de massa do MEF, pois será utilizado o método de marcha no tempo Diferença Central ($\alpha = 0, \beta = 0$ e $\gamma = \frac{1}{2}$ no método HHT) para ambas as discretizações. Como comentado anteriormente, a diagonalização de matrizes se faz necessário (no caso do MEF) ao utilizar técnicas de marcha no tempo explícitas para aproveitar realmente a eficiência do método explícito.

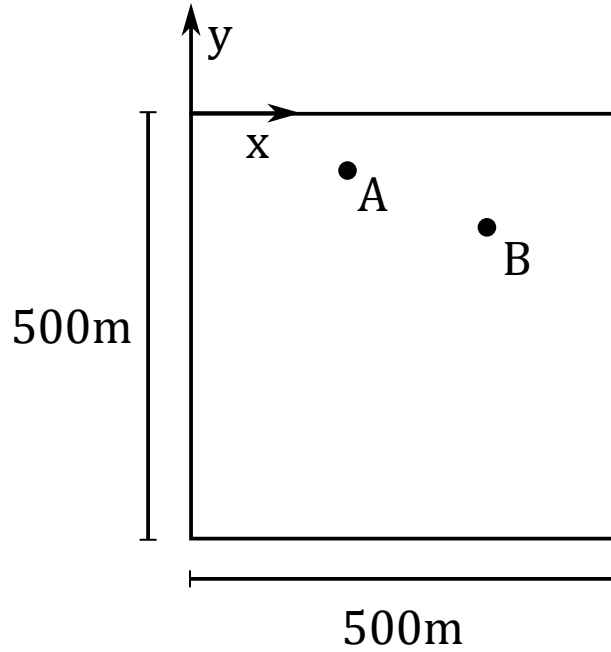


Figura 6 – Esboço do modelo acústico.

Serão utilizadas malhas regulares tanto para o MEF quanto para o MEFE num domínio quadrado de $500\text{m} \times 500\text{m}$ cujo esboço é apresentado na Figura 6, serão utilizadas condições de contorno não reflexivas nas bordas laterais e inferior. Ao longo da borda superior (superfície) será imposto valor nulo para a pressão. Na mesma figura é possível ver a posição da fonte sísmica e do receptor do sinal, respectivamente nos pontos com coordenadas $A=(200,-100)$ e $B=(350,-150)$.

Este exemplo é utilizado em trabalhos como [70, 71], e consiste na propagação de um *pulso senoidal de Hanning* definido no domínio do tempo pela equação:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(2\pi f_c t) (1 - \cos(2\pi f_c t)), & \text{se } t < 1/f_c, \\ 0, & \text{se } t \geq 1/f_c, \end{cases} \quad (2.54)$$

na qual f_c é a frequência central do pulso, que neste caso será igual a 15Hz , e cuja propagação será num meio fluido cuja velocidade da onda é $V_f = 1500\text{m/s}$ e cuja densidade é $\rho_f = 1.0\text{kg/m}^3$.

A malha do MEF é composta por 2500 elementos quadrilaterais bilineares e de dimensão $\Delta x = \Delta y = 10\text{m}$, enquanto que a primeira malha do MEFE é composta por 100 elementos de ordem 6 e de dimensão $\Delta x = \Delta y = 50\text{m}$. Note que ambas as malhas (MEF e MEFE-6) possuem 2601 nós, ainda para estes casos foi utilizado um passo de tempo $\Delta t = 2.0\text{ms}$. A segunda malha do MEFE utilizará elementos de ordem 8 com a mesma quantidade de elementos e de mesma dimensão que as do MEFE-6 tendo, porém, desta vez 5041 nós, neste caso será adotado um passo de tempo $\Delta t = 1.0\text{ms}$ para satisfazer as condições de estabilidade do método diferença central.

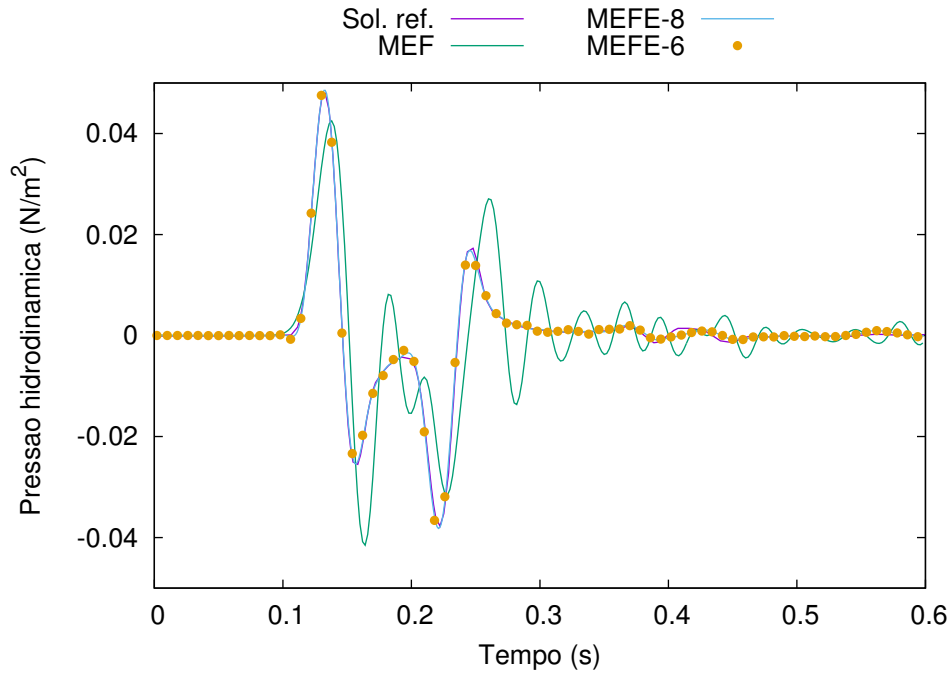


Figura 7 – Resultados da pressão hidrodinâmica no fluido acústico.

Na Fig. 7 estão apresentadas as soluções encontradas com ambos os métodos juntamente com a solução de referência obtida pelo MEF com uma malha refinada. Ao analisar os resultados percebe-se que as curvas referentes ao MEFE tiveram uma melhor aproximação que a do MEF uma vez que esta última apresenta oscilações espúrias em algumas partes ao longo do tempo e certa defasagem em relação a solução de referência.

Nota-se então que o MEFE apresentou uma precisão superior que o MEF ao utilizar uma quantidade de nós igual. Assim, ao trabalhar com problemas desta natureza (propagação de onda) pode-se utilizar o MEFE de modo a economizar recursos computacionais obtendo soluções tão precisas quanto uma malha mais refinada do MEF (solução de referência), isto devido ao fato de que quantidade de nós por comprimento da onda do MEFE é 4 enquanto que a do MEF padrão é 20. É importante notar que mesmo a quantidade de nós da malha do MEFE-8 é muito inferior que a utilizada para o cálculo da solução de referência, a qual ultrapassa os 10000 nós.

Snapshots da variação da pressão ao longo do domínio no instante $t = 0.2s$ para o MEF, MEFE-6 e MEFE-8 são apresentados nas Figuras 8, 9 e 10, respectivamente.

É importante notar que o visualizador dos snapshots não é próprio para polinômios de ordem elevada, apresentando resultados interpolados linearmente entre os nós, o que para o caso do MEFE-6 comprometeu a representação correta da distribuição da pressão (i.e. Fig. 9), que como pode ser visto nos resultados da Figura 7 foram bastante precisos, neste sentido é importante comentar sobre trabalhos na área como [72, 73]. Entretanto, é possível ver, precisa e nitidamente, a frente da onda de pressão ao longo do fluido acústico

no snapshot correspondente ao MEF-8 (i.e. Fig. 10), o qual foi obtido pelo mesmo procedimento que o do MEF-6, mas ao possuir mais nós ficou melhor representado.

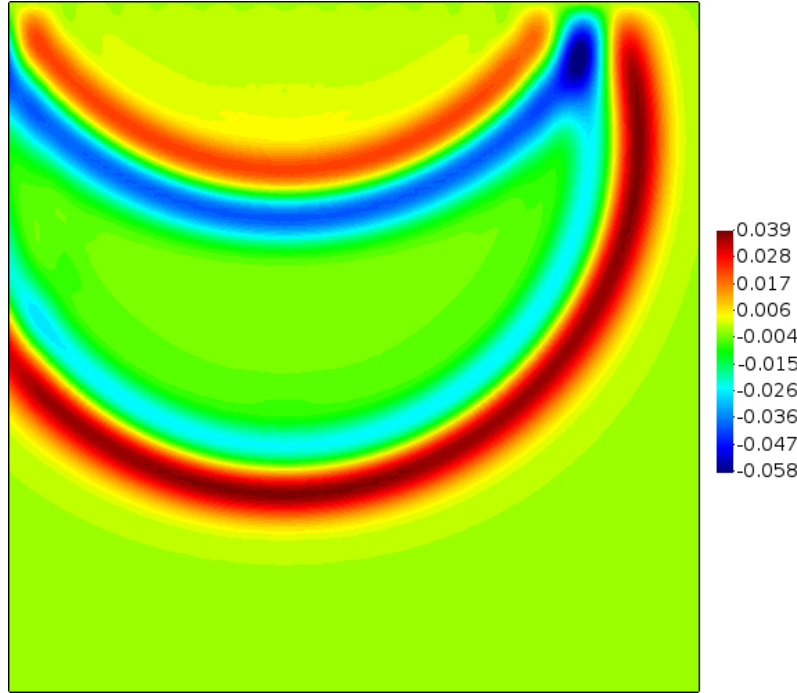


Figura 8 – Snapshots para $t = 0.2s$, mostrando as diferentes pressões distribuídas no meio no tempo considerado, obtido pelo MEF.

2.7.1 Coluna sólida

Este problema consiste numa barra sólida de dimensões $a = 4.0m$ e $b = 1.0m$ engastada numa das extremidades e sujeito a um carregamento Heaviside (ou Degrau) unitário atuando no lado oposto como esquematizado na Figura 11.

As propriedades do material são $E = 100N/m^2$ (módulo de Young ou de elasticidade); $\nu = 0.0$ (coeficiente de Poisson); $\rho_s = 1.0kg/m^3$ (densidade), resultando num modelo com velocidades $v_P = 10m/s$ (onda-P) e $v_S \approx 7.07m/s$ (onda-S).

Este exemplo tem como objetivo comparar a precisão entre o MEF e MEF-8 quando submetido a circunstâncias severas do ponto de vista numérico. Uma vez que a solução deste problema possui o campo de velocidades e tensões descontínuo, sendo assim frequentemente utilizado na literatura para testar a robustez de novos métodos por possuir solução analítica, como visto em [74, 75, 76]:

$$u(x, t) = \frac{b}{E} \left[\frac{x}{b} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2b}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)v_P \pi t}{2b}\right) \right] \quad (2.55)$$

no qual x representa a posição horizontal do ponto $A = (4, 0.5)$.

Quando discretizado pelo MEF, a malha terá um total de 400 elementos e 451 nós, enquanto que quando discretizado pelo MEF-8, a malha possuirá um total de 8 elementos

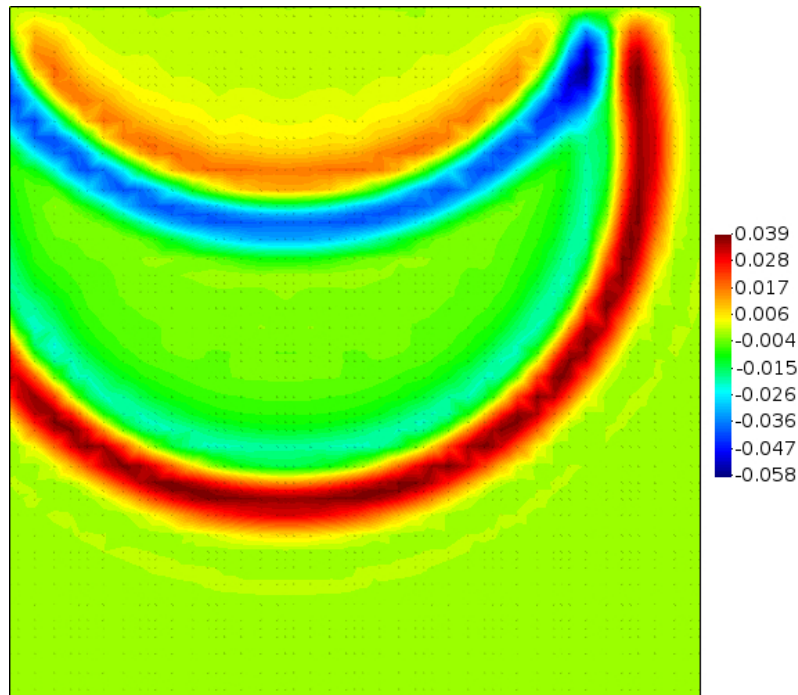


Figura 9 – Snapshots para $t = 0.2s$, mostrando as diferentes pressões distribuídas no meio no tempo considerado, obtido pelo MEFE-6.

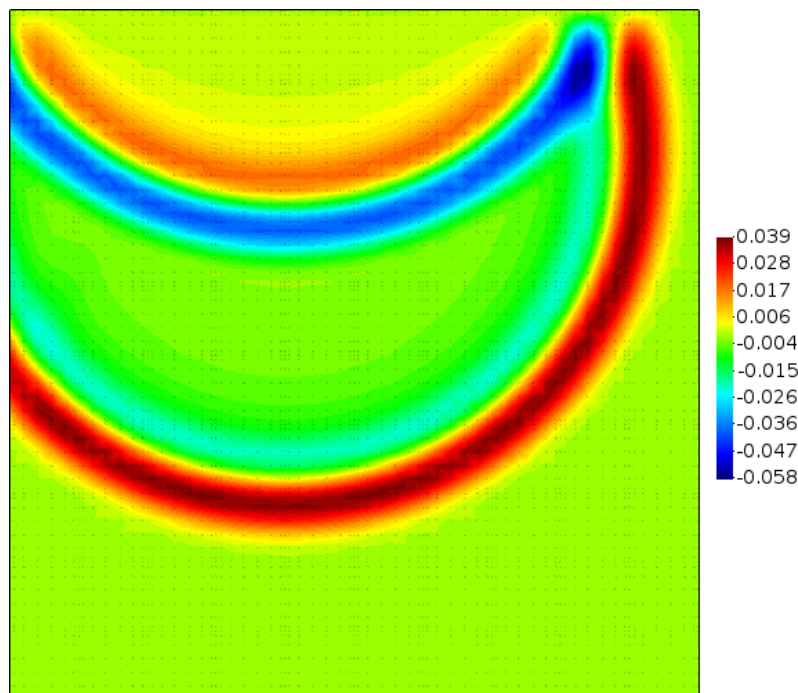


Figura 10 – Snapshots para $t = 0.2s$, mostrando as diferentes pressões distribuídas no meio no tempo considerado, obtido pelo MEFE-8.

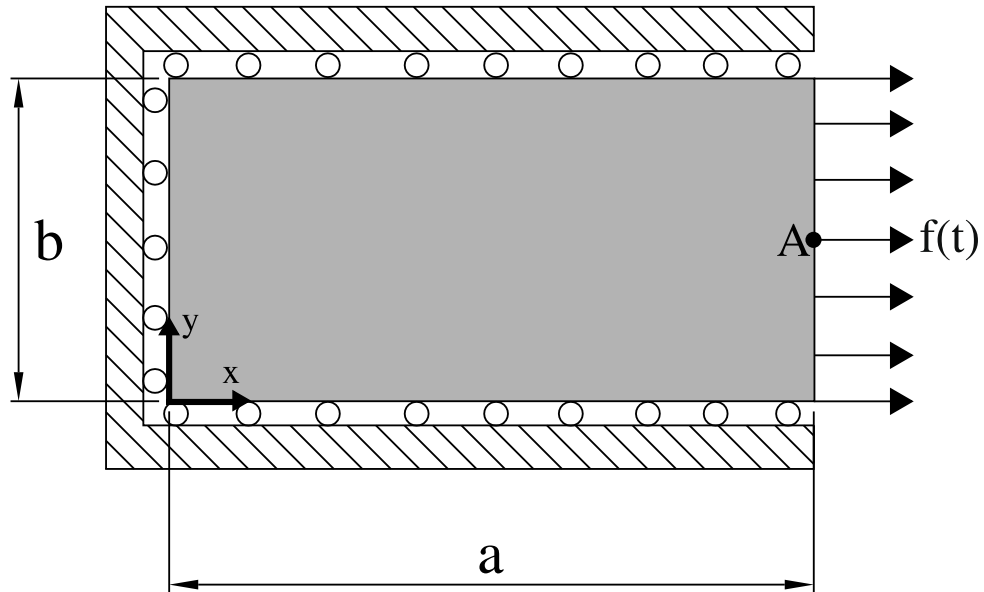


Figura 11 – Esboço do modelo coluna sólida.

de ordem 5 e 153 nós, e 8 elementos de ordem 8 e 435 nós. O tamanho de passo de tempo utilizado é de $\Delta t = 0.006s$ e será utilizada a regra do trapézio como esquema de marcha no tempo (i.e., utilizando os valores $\alpha = 0$, $\beta = 0.25$ e $\gamma = 0.50$ no esquema HHT).

Na Figura 12 estão apresentados os deslocamentos horizontais no ponto A da solução analítica, MEF, MEFE-5 e MEFE-8, do problema proposto, e como pode ser visto os resultados numéricos estão de acordo com os encontrados na literatura.

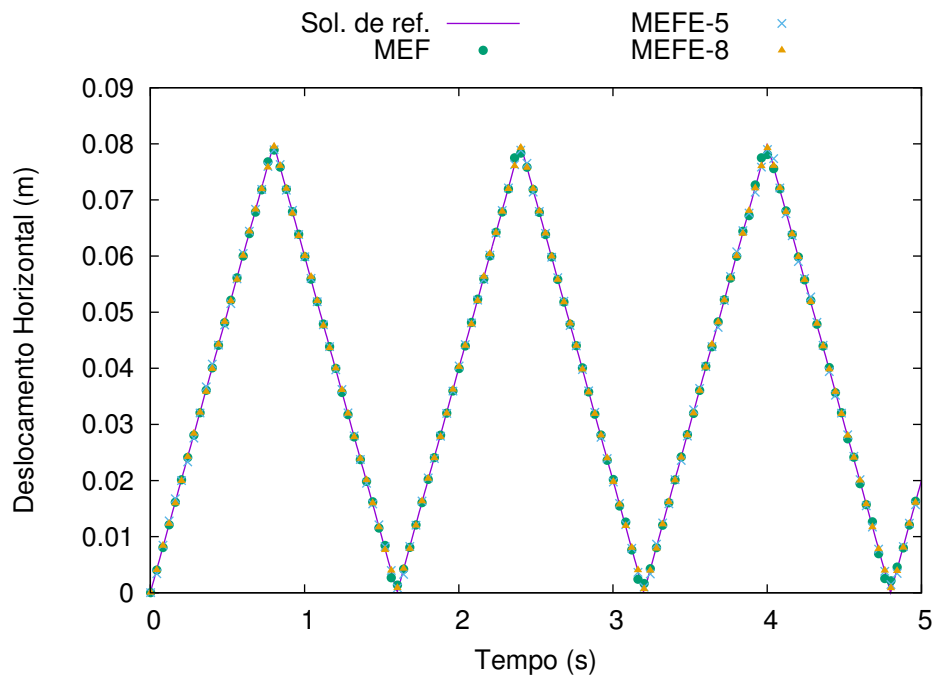


Figura 12 – Resultados do deslocamento horizontal da coluna sólida.

O comportamento oscilatório é típico neste tipo de análise, resultantes das refle-

xões sucessivas que ocorrem das extremidades do modelo, estas reflexões podem evidenciar alguns aspectos numéricos dos métodos utilizados, como instabilidades e amortecimento numérico excessivo. Entretanto, mesmo utilizando elementos de ordem alta estes conseguiram representar de maneira correta os bicos presentes nas soluções dos deslocamentos.

Como dito anteriormente, os campos de velocidades e tensões neste problema possuem soluções descontínuas, neste sentido é interessante apresentar uma comparação entre as soluções numéricas obtidas através da regra do trapézio e do HHT com amortecimento numérico. Na Figura 13 são apresentados os resultados numéricos das tensões σ_{xx} para o ponto (0,0.5) obtidos pelo MEF utilizando a regra do trapézio e o esquema HHT com amortecimento numérico (i.e., utilizando os valores $\alpha = -1/3$, $\beta = (1 - \alpha)^2/4$ e $\gamma = (1 - 2\alpha)/2$ no esquema HHT).

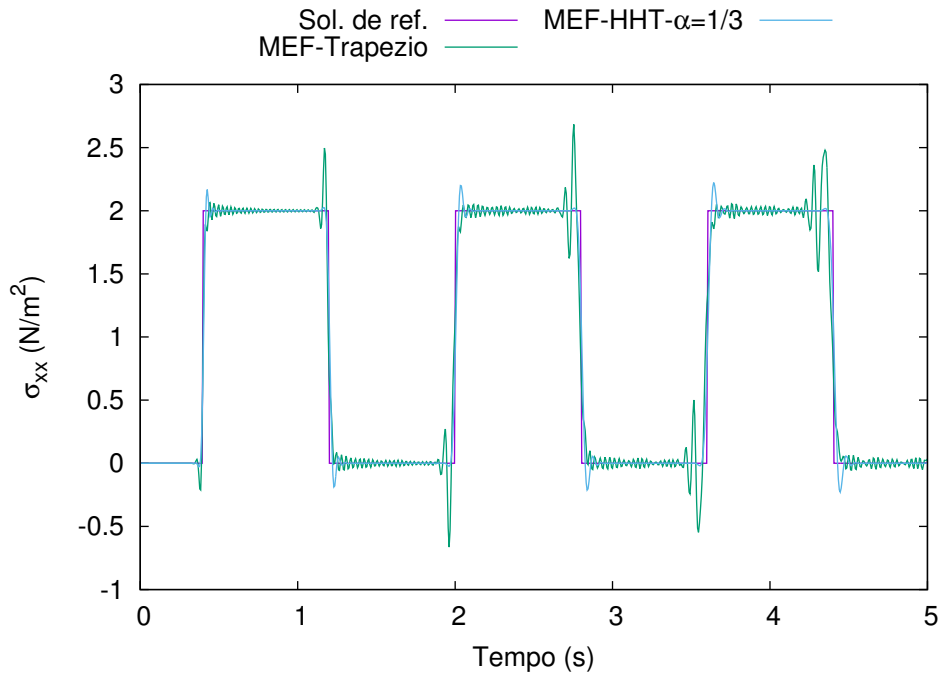


Figura 13 – Resultados das tensões σ_{xx} no o ponto (0,0.5) obtidas pela regra do Trapézio.

A partir das curvas obtidas é possível ver que o método HHT diminuiu o número de oscilações espúrias presentes nas curvas como pode ser visto mais claramente na Figura 14, que representa uma janela menor dos resultados, precisamente no intervalo [1.9s,2.9s]. Esta propriedade é de suma importância para obter uma boa precisão nos resultados das simulações numéricas realizadas posteriormente.

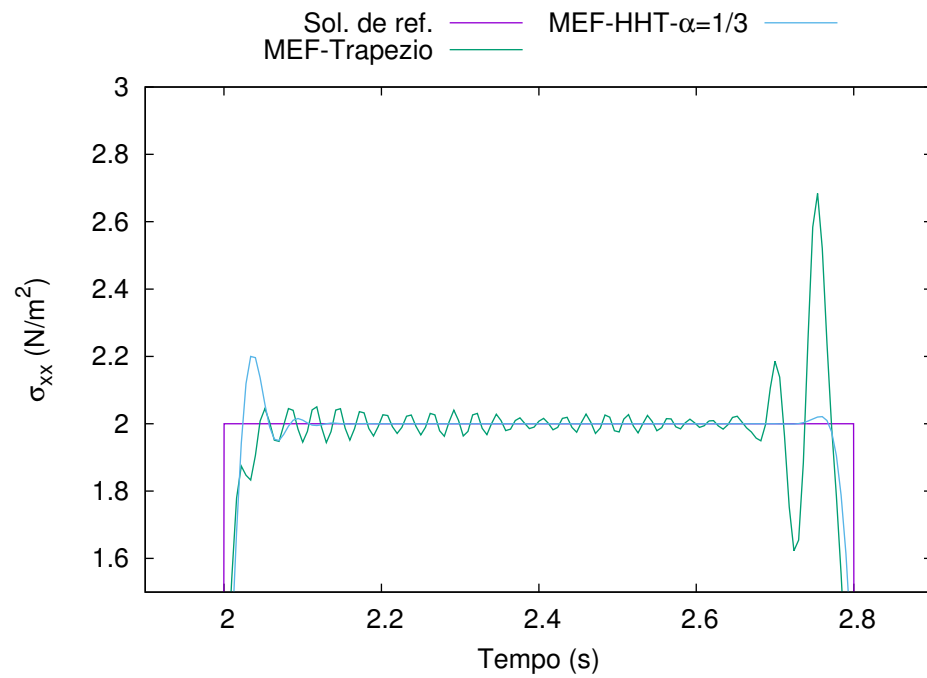


Figura 14 – Zoom dos resultados das tensões σ_{xx} no o ponto (0, 0.5) obtidas pela regra do Trapezóio.

3 ACOPLAMENTO ITERATIVO

Em termos gerais, uma técnica de acoplamento de interface iterativo consiste em transferir alguma informação, localizada em uma interface, da solução obtida num dos subdomínios para o outro e vice-versa, até obter a convergência das variáveis de interesse localizadas apenas na interface de interação. Assim, podem ser utilizadas distintas técnicas de discretização espacial, esquemas de marcha no tempo e passos de tempo distintos para cada subdomínio. Também é permitida a utilização de malhas não coincidentes na interface de acoplamento, desde que as condições físicas de acoplamento sejam satisfeitas no fim do processo iterativo.

Introdutoriamente, o método de acoplamento iterativo será aplicado a problemas onde ocorre o acoplamento de interface do tipo sólido-sólido, para em seguida ser aplicado a problemas do tipo sólido-fluido. No acoplamento sólido-sólido um dos subdomínios será discretizado pelo MEF enquanto o outro será discretizado pelo MEFE, também será apresentado o método de relaxação dinâmica dos valores das variáveis na interface de interação.

Em seguida será apresentado o procedimento de acoplamento MEF-MEFE para o problemas do tipo sólido-fluido no domínio do tempo. Inicialmente a metodologia será restrita ao caso onde são utilizados passos de tempo iguais em ambos os subdomínios e em sequencia a metodologia será expandida para o uso de passos de tempo distintos, onde será apresentado o esquema de subcycling proposto. No próximo capítulo será realizada uma comparação com os métodos tradicionais onde será demonstrado uma maior velocidade de convergência.

3.1 Acoplamento de interface do tipo sólido-sólido MEF-MEFE

Como apresentado nos capítulos anteriores, a pesquisa por metodologias de acoplamento de interface é muito grande e está presente em varias áreas da ciência. Esta sessão concentra-se em problemas onde ocorre acoplamento de interface entre dois subdomínios governados pelo mesmo fenômeno físico, a dizer, governados pela equação da elastodinâmica. Existem problemas nos quais pode ser oportuno a utilização de um esquema de discretização específico ou a utilização de distintos tamanhos de passo de tempo em determinadas regiões do domínio, de forma a obter melhores resultados como já comentado anteriormente. Na Figura 15 esta esquematizado um problema de divisão de domínio no qual é utilizado o MEF para modelar a parte do domínio onde ocorre um furo e o MEFE no restante dele, de forma a poder usufruir da alta precisão com baixo custo computacional do MEFE modelando de modo mais preciso o furo através da versatilidade do MEF.

Na seção 2.2, foi apresentada a modelagem de sólidos onde ocorre acoplamento de

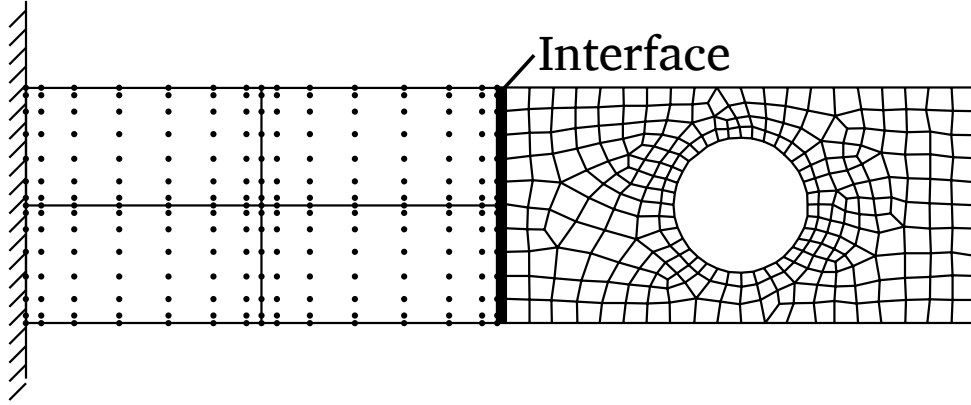


Figura 15 – Acoplamento entre subdomínios discretizados com metodologias distintas (MEF-MEFE) e de um mesmo sistema físico.

interface com um meio fluido, nesta seção, serão apresentadas as condições de equilíbrio e continuidade para problemas de acoplamento sólido-sólido, as quais são impostas na interface de interação Γ_{It_i} , vista anteriormente na Eq. (2.10), como a seguir:

$$\left. \begin{aligned} \tau_i^1 + \tau_i^2 &= 0 \\ u_i^1 - u_i^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ em } \Gamma_{It_i} \times I, \quad (3.1)$$

nestas equações, o índice numérico 1 e 2 é referente a cada partição do domínio sólido, i.e., sem perda de generalidade, nos restringimos à divisão do domínio Ω em apenas dois subdomínios Ω_1 e Ω_2 , como esquematizado na Figura 16, onde a linha tracejada é referente ao contorno Γ_{It_i} .

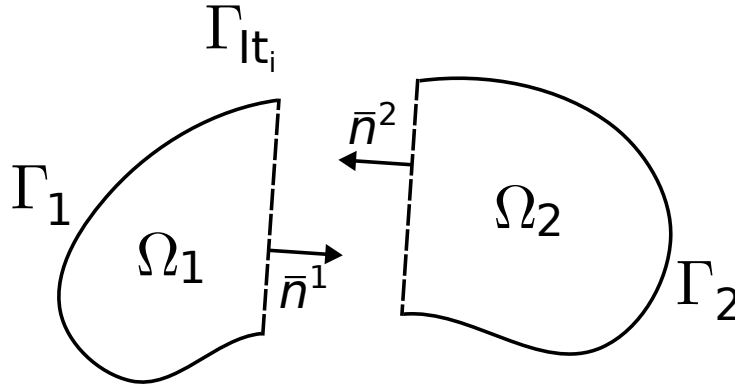


Figura 16 – Subdomínios físicos e condições de contorno.

3.1.1 Acoplamento iterativo e parâmetro de relaxação ótimo

A fim de simular corretamente a interação entre os subdomínios do problema elastodinâmicos é utilizado um procedimento do tipo iterativo. Este processo consiste em impor as condições de contorno de Dirichlet na interface de acoplamento de um dos subdomínios, permitindo sua resolução, e em seguida calcular as trações superficiais na

interface de acoplamento as quais serão transformadas em forças superficiais que serão tratadas como condição de contorno de Neumann no outro subdomínio, em seguida as variáveis relevantes (deslocamentos e trações) são recalculadas iterativamente permitindo tratar os subdomínios de forma independente.

Como pode ser visto, não existe nenhuma restrição em relação ao método de discretização utilizado, assim, através deste procedimento pode-se aproveitar as vantagens do MEFE em algumas regiões do domínio mais regulares e a facilidade do MEF em aproximar as regiões de geometria mais complexa, de forma viável, uma vez que o acoplamento iterativo é eficiente e de fácil implementação como será visto a seguir. Ainda, com o processo de subcycling tradicional na análise do domínio do tempo é possível utilizar tamanhos de passos de tempo distintos em cada subdomínio [50].

Como comentado anteriormente, um ponto muito importante neste tipo de aproximação é a escolha do parâmetro de relaxação λ , que é aplicado nas variáveis relevantes na interface de acoplamento, e do qual depende a convergência do método e a velocidade com o qual converge. Nesta seção será apresentado um parâmetro de relaxação ótimo calculado a cada iteração, o qual consiste em minimizar o funcional do erro quadrático das variáveis relevantes como visto em [15, 16], o que por sua vez, é de baixo custo computacional como será mostrado a seguir.

A fim de se obter um parâmetro de relaxação ótimo, considera-se o seguinte funcional para o erro dos deslocamentos no passo de tempo $l + 1$ entre as iterações $k + 1$ e k , i.e., $\mathbf{U}_n^{l+1,k+1}$ e $\mathbf{U}_n^{l+1,k}$, respectivamente com os valores nodais localizados apenas na interface de acoplamento:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \|\mathbf{U}_n^{k+1} - \mathbf{U}_n^k\|^2, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{U}_n^{k+1} = \lambda \mathbf{U}_n^{k+\lambda} + (1 - \lambda) \mathbf{U}_n^k$ e $\mathbf{U}_n^k = \lambda \mathbf{U}_n^{k+\lambda-1} + (1 - \lambda) \mathbf{U}_n^{k-1}$ são os vetores deslocamentos ponderados e $\mathbf{U}_n^{k+\lambda}$ e $\mathbf{U}_n^{k+\lambda-1}$ os vetores deslocamentos calculados a partir da iteração anterior aos mesmos. A partir dos quais obtêm-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &= \|\lambda \mathbf{W}^{k+\lambda} + (1 - \lambda) \mathbf{W}^k\|^2, \\ &= \lambda^2 \|\mathbf{W}^{k+\lambda}\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(\mathbf{W}^{k+\lambda}, \mathbf{W}^k) + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{W}^k\|^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

no qual o produto interno é dado por $(\cdot, \cdot) = \|\cdot\|^2$ e as variáveis $\mathbf{W}_n^{k+\lambda} = \mathbf{U}_n^{k+\lambda} - \mathbf{U}_n^{k+\lambda-1}$ e $\mathbf{W}_n^k = \mathbf{U}_n^k - \mathbf{U}_n^{k-1}$ são utilizadas.

Diferenciando o funcional da Eq. (3.3) com relação a λ e igualando a zero, obtêm-se:

$$\lambda \|\mathbf{W}^{h+\lambda}\|^2 + (1 - 2\lambda)(\mathbf{W}^{h+\lambda}, \mathbf{W}^h) + (\lambda - 1) \|\mathbf{W}^h\|^2 = 0, \quad (3.4)$$

Após a aplicação de alguns cálculos matemáticos obtém-se, a expressão final para calcular o parâmetro de relaxação dinâmico é obtida:

$$\lambda = \frac{(\mathbf{W}_n^k, \mathbf{W}_n^k - \mathbf{W}_n^{k+\lambda})}{\|\mathbf{W}_n^k - \mathbf{W}_n^{k+\lambda}\|^2}. \quad (3.5)$$

Como pode-se observar a expressão para calcular o parâmetro de relaxação é simples de implementar e possui um custo computacional mínimo, podendo ser realizado a cada passo de iteração [16, 77]. O valor do parâmetro de relaxação no primeiro passo de iteração será $\lambda = 0.5$ como feito em [15, 78], além disso, será utilizado o critério $0 < \lambda \leq 1$ como em [11] para melhorar a convergência dos resultados; quando o parâmetro de relaxação calculado não esteja neste intervalo será repetido o valor obtido do passo anterior.

3.1.2 Acoplamento espacial – passos de tempo com tamanhos iguais

Classificando os subdomínios Ω_1 e Ω_2 como mestre e escravo respectivamente, e assumindo estar no passo de iteração $k + 1$, e de tempo $l + 1$ para ambos o subdomínios, usando passos de tempo de tamanhos iguais em ambos os subdomínios, apresenta-se detalhadamente a método utilizado e a sequência de passos a serem seguidos, assim como um fluxograma na figura 17, a fim de facilitar a compreensão do esquema iterativo:

I - Calcular $\mathbf{U}_1^{l+1,k+\lambda}$:

- i - É calculado $\mathbf{U}_1^{l+1,k+\lambda}$ em todo o subdomínio incluindo a interface de acoplamento Γ_{It_i} a partir do sistema de EDO da Eq. (2.45) utilizando as forças de acoplamento do passo iterativo anterior $\mathbf{F}_{It_i}^{l+1,k}$ em Ω_1 ;
- ii - É aplicada a relaxação nos valores da interface:

$$\mathbf{U}_1^{l+1,k+1} = \lambda \mathbf{U}_1^{l+1,k+\lambda} + (1 - \lambda) \mathbf{U}_1^{l+1,k}, \quad (3.6)$$

- iii - É calculado o parâmetro de relaxação segundo a Eq. (3.5) para o próximo passo de iteração;
- iv - Utiliza-se o mapeamento inverso dos pontos nodais $\bar{\mathbf{x}} = (x, y) \in \Gamma_{It_i}$ correspondentes à malha de Ω_2 nos elementos da malha de Ω_1 a fim de interpolar os valores de $\mathbf{U}_1^{l+1,k+1}$ para obter os valores de $\bar{\mathbf{U}}_2^{l+1,k+1}$ na interface de acoplamento, como será apresentado nas próximas sessões;

II - Calcular $\mathbf{U}_2^{l+1,k+1}$:

- i - Os valores interpolados dos deslocamentos nodais $\bar{\mathbf{U}}_2^{l+1,k+1}$ na interface de acoplamento, são então considerados como condições de contorno prescritas na interface de interação e o problema referente ao domínio Ω_2 é então resolvido, obtendo-se semelhantemente os valores de $\mathbf{U}_2^{l+1,k+1}$ para o restante do domínio;
- ii - São calculados os valores das forças de superfície nodais $\mathbf{F}_{It_i}^{l+1,k+1}$ na interface de acoplamento Γ_{It_i} , correspondente a Ω_2 , a partir dos deslocamentos nodais $\mathbf{U}_2^{l+1,k+1}$ (como será visto a seguir);
- iii - Utiliza-se o método de mapeamento inverso para obter $\mathbf{F}_{It_i}^{l+1,k+1}$ em Ω_1 ;

iv - Faz-se a checagem de convergência associada ao processo iterativo:

$$\frac{\|\mathbf{U}_2^{l+1,k+1} - \mathbf{U}_2^{l+1,k}\|}{\|\mathbf{U}_2^{l+1,k+1}\|} < \epsilon, \quad (3.7)$$

e caso ocorra, atualizam-se as grandezas e parte-se para o próximo passo de tempo; caso não ocorra, prossegue-se para o próximo passo iterativo, neste trabalho foi adotado $\epsilon = 10^{-7}$.

Os cálculos correspondentes ao subcycling no tempo e ao mapeamento inverso serão apresentados na próxima seção no âmbito do acoplamento sólido-fluido, sendo estes realizados analogamente ao caso sólido-sólido.

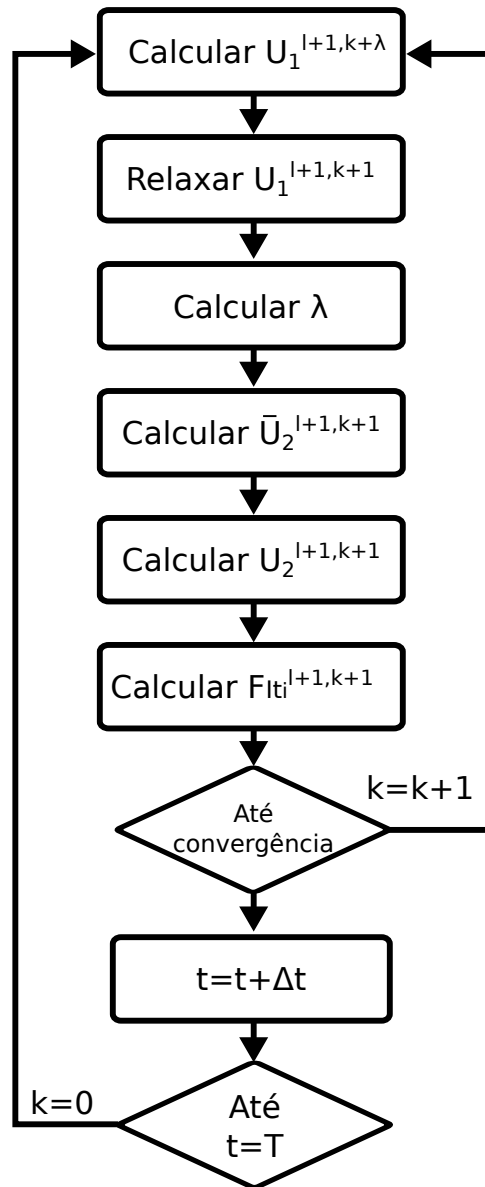


Figura 17 – Fluxograma do esquema iterativo

3.1.2.1 Forças de superfície

Na literatura podem ser encontrados vários métodos de pós-processamento dos valores nodais de deslocamento para a obtenção de tensões nodais, os quais consistem basicamente em, ou extrapolar os valores obtidos nos pontos de integração para pontos nodais ou calcular diretamente os valores nodais, sendo o primeiro mais utilizado por possuir melhor precisão quando usados elementos quadrilaterais e pelo qual será utilizada uma técnica com este enfoque para este trabalho. A partir destas tensões nodais é que serão obtidas as forças de superfície desejadas, é preciso ressaltar que esta área de pesquisa ainda está em aberto.

Sabendo-se que, para cada vetor deslocamento local $\mathbf{U}_2^{e,l+1,k+1}$ do elemento e , existe a relação:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{h,e}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{D}_2 \nabla \mathbf{N}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{U}_2^{e,l+1,k+1}, \quad (3.8)$$

na qual $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{h,e} = [\hat{\sigma}_{11}^{h,e} \ \hat{\sigma}_{22}^{h,e} \ \hat{\sigma}_{12}^{h,e}]^T$, e a qual é obtida da relação deformação-deslocamento e tensão-deformação já apresentadas anteriormente.

Uma vez que apenas é exigido que o campo de deslocamentos seja contínuo (aproximações do tipo C^0), no campo de tensões pode vir a ocorrer saltos nos valores localizados nas interfaces entre elementos, i.e., para cada nó que pertença a mais de um elemento poderão existir valores distintos vindos de cada um deles. A fim de obter resultados contínuos do campo de tensões ao longo do domínio, este é extrapolado utilizando as funções base, i.e., $\sigma_{ij}^h = \bar{\mathbf{N}} \boldsymbol{\sigma}_{ij}$, onde $\sigma_{ij}^h \in \mathbb{R}$ é a expansão de cada componente do vetor de tensões $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{h,e}$ ao longo do domínio Ω , $\bar{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}^{nn}$ é o vetor contendo as funções base globais e $\boldsymbol{\sigma}_{ij} \in \mathbb{R}^{nn}$ é o vetor de tensões nodais a ser encontrado (perceba que é um vetor de valores nodais para cada componente do vetor de tensões), de modo que num sentido integral tenha-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} d\Omega \boldsymbol{\sigma}_{11} &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \sigma_{11}^h d\Omega, \\ \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} d\Omega \boldsymbol{\sigma}_{22} &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \sigma_{22}^h d\Omega, \\ \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} d\Omega \boldsymbol{\sigma}_{12} &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}}^T \sigma_{12}^h d\Omega, \end{aligned} \quad (3.9)$$

resultando no seguinte sistema para cada componente do vetor de tensões contínuo:

$$\bar{\mathbf{M}} \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^h, \quad (3.10)$$

onde a matriz de massa $\bar{\mathbf{M}}$ é diagonalizada a fim de diminuir o esforço computacional ao resolver o sistema.

Após obter as tensões, calculam-se as forças de superfície nodais em função do vetor normal $\bar{\mathbf{n}}$ a cada elemento:

$$\begin{aligned} \tau_1^{\bar{\mathbf{n}}} &= \sigma_{11} \bar{n}_1 + \sigma_{12} \bar{n}_2, \\ \tau_2^{\bar{\mathbf{n}}} &= \sigma_{12} \bar{n}_1 + \sigma_{22} \bar{n}_2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

e então o vetor de forças iterativas, para o acoplamento sólido-sólido, resulta em:

$$\mathbf{F}_{It_i} = \int_{\Gamma_{It_i}} \mathbf{N}^T \tau_i d\Gamma_{It_i}. \quad (3.12)$$

No próximo capítulo serão apresentados experimentos numéricos de problemas onde ocorra acoplamento sólido-sólido.

3.2 Acoplamento de interface do tipo sólido-fluido MEF-MEFE

Após apresentar os cálculos correspondentes ao acoplamento iterativo sólido-sólido, é a vez de estender este procedimento para o caso de um acoplamento de sistemas físicos distintos. A seguir será apresentado o método de acoplamento iterativo sólido-fluido e um passo-a-passo analogamente ao realizado para o caso anterior.

3.2.1 Acoplamento espacial – passos de tempo com tamanhos iguais

Quando os passos de tempo de ambos os subdomínios possuem tamanhos iguais (i.e. $\Delta t_f = \Delta t_s$) não se tem uma regra que determine qual dos subdomínios será escolhido como *mestre* ou *escravo*. Entretanto será escolhido o subdomínio fluido como mestre e o subdomínio sólido como escravo no sentido de que o primeiro será analisado primeiro e será discretizado pelo MEFE que possui elementos de tamanho maior, esta escolha será melhor justificada para o caso no qual sejam utilizados tamanhos de passos de tempo distintos.

No procedimento de acoplamento iterativo, os cálculos correspondentes ao k -ésimo passo de iteração no l -ésimo passo de tempo são os seguintes:

I - Calcular $\mathbf{P}^{l+1,k+1}$ – subdomínio fluido:

- i - Os fluxos de superfície na interface de acoplamento são calculados, tomando em conta a contraparte discreta do último termo das Eqs. (2.3) e (2.5), utilizando os já calculados (do passo iterativo anterior) valores nodais da aceleração na interface de acoplamento, i.e. $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k}$ no qual a barra superior se refere à interface de acoplamento, o que resulta em:

$$\mathbf{F}_4^{l+1,k+1} = \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_f^T \kappa_f q^{l+1,k} d\Gamma = -\kappa_f \rho_f \int_{\Gamma_4} \mathbf{N}_f^T \mathbf{n}_f \mathbf{N}_s \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k} d\Gamma, \quad (3.13)$$

na qual $\mathbf{N}_z$ representa o vetor das funções de interpolação referentes ao subdomínio fluido (MEFE) ou sólido (MEF) de acordo ao índice f ou s respectivamente, e $\mathbf{n}_f$ representa o vetor normal exterior à superfície do subdomínio fluido. A integral de contorno anterior é calculada numericamente por um procedimento de mapeamento e interpolação descritos na sequência.

- ii - Os novos valores nodais da pressão $\mathbf{P}^{l+1,k+1}$ são então calculados de forma acoplada no subdomínio fluido pelas Eqs. (2.33)-(2.50)

II - Calcular $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1}$ – subdomínio sólido:

- i - As forças de interação na interface são calculadas, tomando em conta a contraparte discreta dos últimos termos das Eqs. (2.10) e (2.20) utilizando os valores nodais da pressão na interface de acoplamento obtidas no passo I, i.e. $\bar{\mathbf{P}}^{l+1,k+1}$, resultando em:

$$\mathbf{F}_{It}^{l+1,k+1} = \int_{\Gamma_{It}} \mathbf{N}_s^T \boldsymbol{\tau}^{l+1,k+1} d\Gamma = \int_{\Gamma_{It}} \mathbf{N}_s^T \mathbf{n}_f \mathbf{N}_f \bar{\mathbf{P}}^{l+1,k+1} d\Gamma. \quad (3.14)$$

- ii - Os novos valores nodais da aceleração, denotados por $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1}$, são calculados então no domínio sólido de forma acoplada e dada pelas Eqs. (2.45) e (2.50).
- iii - Classicamente, neste passo é utilizado um esquema de relaxação aplicado aos valores nodais da aceleração na interface de acoplamento a fim de garantir e/ou acelerar a convergência do processo iterativo, i.e. é realizado o seguinte cálculo:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1} = \lambda \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda} + (1 - \lambda) \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k}, \quad (3.15)$$

no qual $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda}$ representa as acelerações previamente calculadas (não-relaxadas).

- iv - Em seguida, o parâmetro de relaxação λ é atualizado de forma adaptativa para ser utilizado no próximo passo de iteração, o cálculo deste será apresentado posteriormente.

Uma vez que o critério de convergência é atingido dentro do passo de tempo, os vetores nodais $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$ e $\dot{\mathbf{P}}$ são atualizados em seus respectivos subdomínios, e o procedimento iterativo é reinicializado para o próximo passo de tempo.

É importante ressaltar que na inicialização do processo iterativo (primeiro passo de iteração), o subdomínio fluido é analisado isoladamente de forma que os fluxos da superfície na interface de acoplamento são considerados nulos (veja a Eq. (3.13) com acelerações nulas), em sequência, o domínio sólido é analisado da forma como foi apresentado anteriormente de acordo com a Eq. (3.14). O critério de convergência adotado para o processo iterativo é definido como a seguir:

$$\frac{\|\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1} - \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k}\|}{\|\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1}\|} < \epsilon, \quad (3.16)$$

com ϵ sendo uma tolerância a definir.

3.2.1.1 Cálculo numérico das integrais na superfície de acoplamento

Nesta sessão serão apresentados os métodos de mapeamento inverso e de interpolação dos valores nodais na interface de acoplamento mencionados anteriormente, de forma a avaliar corretamente as integrais das equações Eqs. (3.13)-(3.14).

Ao focar na integral da Eq. (3.14), os seguintes passos são realizados:

1. Os pontos de integração de Gauss da *integral de contorno* são mapeados do domínio de referência para o contorno físico do elemento Γ_{Itn} , os pontos cinzas na Figura 18;
2. Uma vez conhecidas as coordenadas físicas dos pontos de Gauss no contorno, são identificados os elementos espectrais Ω_{fn} cujo lado pertencente a interface de acoplamento, chamado de Γ_{4n} , possua os pontos recém mapeados;
3. Tendo identificado os elementos espectrais, é realizado um *mapeamento inverso* (que será explicado na sessão 3.2.1.2) e em seguida a *interpolação* dos valores nodais da pressão ao longo de Γ_{4n} , utilizando as próprias funções de interpolação do MEFE unidimensional no domínio de referência, possibilitando assim a realização direta da integração numérica no contorno;

este procedimento está ilustrado na Figura 18, e seu cálculo será apresentado na seção a seguir.

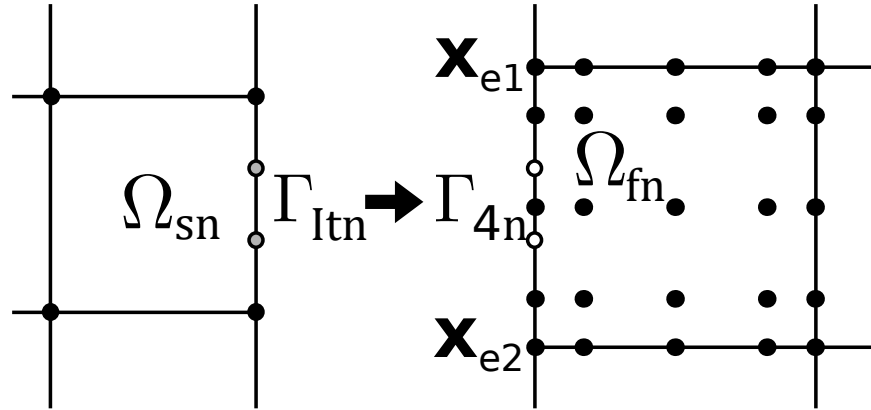


Figura 18 – Esboço do mapeamento inverso dos pontos de integração da Eq. (3.14); os pontos pretos representam os nós de malha, os pontos cinzas representam os pontos de integração mapeados em Γ_{Itn} e os pontos vazios representam os pontos em Γ_{4n} a ser inversamente mapeado ao domínio espectral de referência

Ao utilizar uma aproximação subparamétrica para o MEFE (i.e., funções de interpolação de alta ordem porém com elementos quadriláteros bilineares) o mapeamento inverso recai no mesmo caso que o MEF, uma vez que são utilizadas as mesmas funções para o mapeamento, e um processo semelhante será realizado para a integral da Eq.

(3.13). Se fazendo necessária uma melhor representação da geometria do contorno, podem ser utilizados esquemas de mapeamento mais complexos como comentado na seção anterior. Entretanto, geralmente não será possível obter uma expressão explícita para o mapeamento inverso, o qual poderá ser realizado eficientemente pelo método de Newton-Raphson por exemplo, não afetando o resto do esquema.

Um esboço deste procedimento está ilustrado na Figura 19, perceba que neste caso, os pontos de integração GLL coincidem com os pontos nodais do elemento espectral como explicado na sessão anterior.

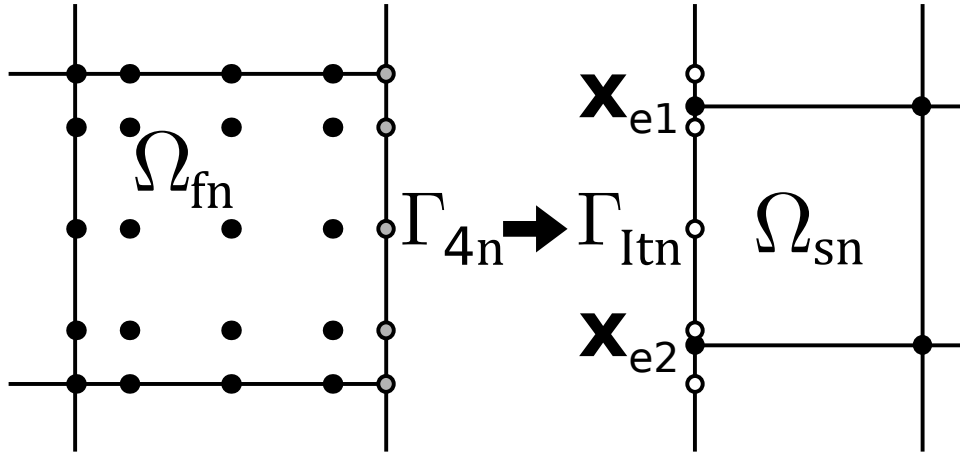


Figura 19 – Esboço do mapeamento inverso dos pontos de integração da Eq. (3.13); os pontos pretos representam os nós de malha, os pontos cinzas representam os pontos de integração mapeados em Γ_{4n} e os pontos vazios representam os pontos em Γ_{Itn} a serem inversamente mapeados ao domínio de referencia

3.2.1.2 Mapeamento inverso unidimensional

Aqui será apresentado o cálculo do mapeamento inverso (i.e., apenas o terceiro passo da sequência apresentada anteriormente) referente à Figura 18. Perceba que o mapeamento inverso para um dos lados de um elemento quadrilateral isoparamétrico linear (i.e., para o caso do MEF) recai no caso unidimensional linear e será tal que $\mathcal{F}^{-1} : \Gamma_{Itn} \rightarrow \Lambda_{1D}$, de forma que Γ_{Itn} representa o lado do elemento Ω_{sn} coincidente com a interface de acoplamento Γ_{Itn} e $\Lambda_{1D} = [-1, 1]$. Assim, sendo $\mathbf{x}_e = (x, y)$ um ponto de integração mapeado já em $\Gamma_{4n} \rightarrow \Gamma_{Itn}$ (veja a Fig. 19), o seu mapeamento inverso de forma que $\Gamma_{Itn} \rightarrow \Lambda_{1D}$ é dado por

$$\xi = \frac{2(x + y) - (x_1 + x_2 + y_1 + y_2)}{x_2 - x_1 + y_2 - y_1}, \quad (3.17)$$

tendo $\mathbf{x}_{e1} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{x}_{e2} = (x_2, y_2)$ as coordenadas dos nós do elemento Ω_{sn} em Γ_{Itn} , como descrito na Fig. 19.

3.2.1.3 Parâmetro de relaxação dinâmico

É conhecido na literatura que a escolha correta do parâmetro de relaxação seja este dinâmico ou não, é de suma importância para a velocidade de convergência dos métodos de acoplamento iterativo, chegando muitas vezes a garantir a convergência nos resultados. Os valores que este parâmetro assume depende da densidade das malhas (numero de elementos e nós na interface de acoplamento), condições de acoplamento, propriedades do material e a geometria dos subdomínios [9, 11, 14]. Assim, estudos foram dirigidos a fim de melhorar o desempenho obtido através deste parâmetro como pode ser visto em [16, 77, 17, 18], onde é proposto alguns esquemas de relaxação dinâmica em problemas.

Como feito para o caso sólido-sólido, neste caso também será utilizado um parâmetro de relaxação λ baseado na minimização do funcional do erro quadrático das variáveis relevantes na interface de acoplamento, conforme descrito em [15, 79, 77]. Desta vez, porém, o funcional estará em função das acelerações no subdomínio sólido no passo de tempo $l + 1$ e em relação aos passo iterativos $k + 1$ e k , ficando desta forma a seguinte expressão:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \|\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1} - \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k}\|^2, \quad (3.18)$$

no qual $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+1} = \lambda \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda} + (1 - \lambda) \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k}$ e $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k} = \lambda \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda-1} + (1 - \lambda) \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k-1}$ são as acelerações nodais relaxadas e $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda}$ e $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda-1}$ as acelerações nodais não-relaxadas (obtidas diretamente do sistema de EDO), ressalta-se novamente que apenas os valores no contorno de interação são utilizados para calcular λ , assim como na aplicação do relaxamento das variáveis em si, desta forma chega-se na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda) &= \|\lambda \mathbf{W}^{k+\lambda} + (1 - \lambda) \mathbf{W}^k\|^2, \\ &= \lambda^2 \|\mathbf{W}^{k+\lambda}\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)(\mathbf{W}^{k+\lambda}, \mathbf{W}^k) + (1 - \lambda)^2 \|\mathbf{W}^k\|^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

na qual $(\cdot, \cdot) = \|\cdot\|^2$ e com as variáveis $\mathbf{W}^{k+\lambda} = \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda} - \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k+\lambda-1}$ e $\mathbf{W}^k = \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k} - \ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k-1}$. Derivando o funcional em relação a λ e igualando a zero, obtém-se:

$$\lambda \|\mathbf{W}^{k+\lambda}\|^2 + (1 - 2\lambda)(\mathbf{W}^{k+\lambda}, \mathbf{W}^k) + (\lambda - 1) \|\mathbf{W}^k\|^2 = 0, \quad (3.20)$$

e finalmente obtém-se a expressão final do parâmetro de relaxação:

$$\lambda = \frac{(\mathbf{W}^k, \mathbf{W}^k - \mathbf{W}^{k+\lambda})}{\|\mathbf{W}^k - \mathbf{W}^{k+\lambda}\|^2}, \quad (3.21)$$

analogamente ao realizado na sessão anterior.

Observa-se apenas que, a diferença do caso sólido-sólido visto anteriormente, um valor perto de um (1.0), mais especificamente $\lambda = 0.9$, é utilizado no primeiro passo de iteração e que não serão aplicadas restrições enquanto ao valor de λ , uma vez que notou-se uma melhora na convergência, como será comentado no capítulo seguinte.

3.2.2 *Subcycling* no tempo – Passos de tempo distintos

Neste trabalho, além do acoplamento iterativo entre o MEF e MEFE, é apresentado um esquema que melhora a eficiência deste método, entretanto é ressaltado que este esquema é aplicável apenas para o caso de utilizar diferentes tamanhos de passos no tempo nos distintos subdomínios permitindo não utilizar do parâmetro de relaxação. Assim sendo, é preciso notar que quando nos referimos ao caso de passos de tempo iguais futuramente, estaremos nos referindo ao esquema tradicional com relaxação apresentado previamente.

Neste sentido, com a possibilidade de utilizar tamanhos de passos de tempo distintos, podem-se escolher tamanhos de tempo ideais de forma a melhorar totalmente a eficiência do algoritmo. Desta forma, como mencionado anteriormente, é feita a escolha de uma subdomínio intitulado mestre e outro escravo. Uma vez que numa grande parte dos casos de acoplamento sólido-fluido a velocidade da onda-P no sólido resulta ser maior que a velocidade de propagação de onda no fluido, se faz preciso utilizar passos de tempo menores dentro do domínio sólido, desta forma fica definido como domínio mestre o subdomínio fluido e como escravo o subdomínio sólido.

Desta forma, sendo $\Delta t_s \leq \Delta t_f$, e assumindo que encontra-se na seguinte situação: $t_{f,l} < t_{s,l+1} < t_{f,l+1}$, os passos apresentados a seguir devem ser adicionados aos descritos previamente na seção 3.2.1 a fim de avaliar as integrais de contorno:

- Extrapolação de $\ddot{\mathbf{U}}^{(l+1)}|_{s,k+1}$ – subdomínio fluido:
 - i- No cálculo da integral de contorno da Eq. (3.13), no domínio fluido uma extrapolação no tempo constante para a aceleração dos valores nodais será realizada. Neste trabalho, é proposto que seja extrapolado apenas os valores obtidos no primeiro passo de iteração, i.e. será substituído $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1,k}$ por $\ddot{\mathbf{U}}^{l+1}|_{f,1}$ na Eq. (3.13) obtendo a seguinte igualdade:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(l+1)}|_{f,k+1} = \ddot{\mathbf{U}}^{(l+1)}|_{s,1}, \quad (3.22)$$

Nos esquemas tradicionais de interpolação/extrapolação temporal, os valores nodais da aceleração na interface de acoplamento são interpolação/extrapolados a cada passo iterativo, de forma a obter:

$$\ddot{\mathbf{U}}^{(l+1)}|_{f,k+1} = \ddot{\mathbf{U}}^{(l+1)}|_{s,k}, \quad (3.23)$$

Perceba que a quantidade de vezes que os valores nodais da aceleração são atualizados para a realização da solução numérica no domínio fluido depende da quantidade de subpassos no tempo adotados, i.e, se $\Delta t_f = a\Delta t_s$, os valores da aceleração serão atualizados a vezes no domínio fluido até os instantes de

tempo coincidirem ou seja quando $t_{s,l+1} = t_{f,l+1}$. Um esboço do esquema de extrapolação utilizado pode ser visto na Figura 20

- ii - A marcha no tempo no domínio fluido só avança quando o instante de tempo do sólido coincide com o fluido, então o vetor dos valores nodais da pressão $\dot{\mathbf{P}}$ é atualizado e o processo iterativo recomeça para o próximo passo de tempo.

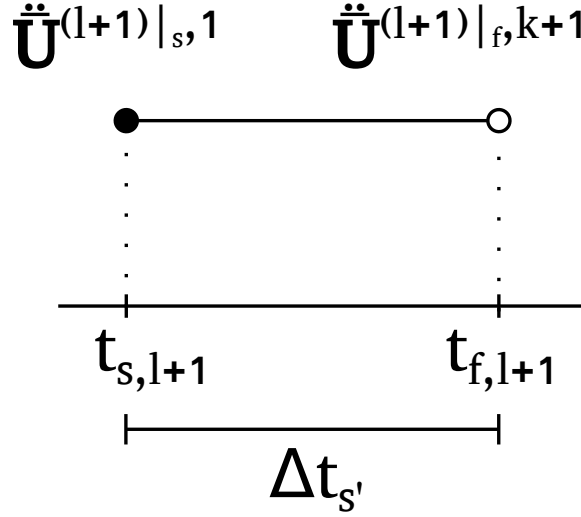


Figura 20 – Esboço do esquema de extrapolação dos valores nodais $\ddot{\mathbf{U}}^{(l+1)}|_{s,1}$, no qual os pontos pretos representam os valores conhecidos e o ponto vazio os valores obtidos pelo esquema, perceba que $\Delta t_{s'} = t_{f,l+1} - t_{s,l+1}$.

- Interpolação de $\bar{\mathbf{P}}^{(l+1)}|_{s,k+1}$ – subdomínio sólido:

- i - Nos cálculos envolvendo a integral de contorno da Eq. (3.14), no domínio sólido, são utilizados os valores nodais da pressão que foram recém obtidos e são linearmente interpolados no tempo com os valores obtidos no passo de tempo anterior $\bar{\mathbf{P}}^{l_f}$ de forma a obter para o atual passo iterativo a seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{P}}^{(l+1)}|_{s,k+1} = (1 - \varepsilon) \bar{\mathbf{P}}^{l_f} + \varepsilon \bar{\mathbf{P}}^{(l+1)}|_{f,k+1}, \quad (3.24)$$

na qual $\varepsilon = \frac{t_{s,l+1} - t_{f,l}}{\Delta t_f}$. Na Figura 21 pode ser visto um esboço do esquema de interpolação utilizado. Assim, a integral de contorno da Eq. (3.14) é calculada substituindo $\bar{\mathbf{P}}^{(l+1),k+1}$ por $\bar{\mathbf{P}}^{(l+1)}|_{s,k+1}$.

- ii - Uma vez obtida a convergência dos resultados, os outros vetores de valores nodais, i.e. $\mathbf{U}$ e $\dot{\mathbf{U}}$, são atualizados e é dado um passo pra frente no tempo no esquema de subcycling.

Ao utilizar este esquema de extrapolação simples, dado pela Eq. (3.22), podem ser citadas as seguinte vantagens: i) os passos II-iii e II-iv descritas na seção 3.2.1 podem ser

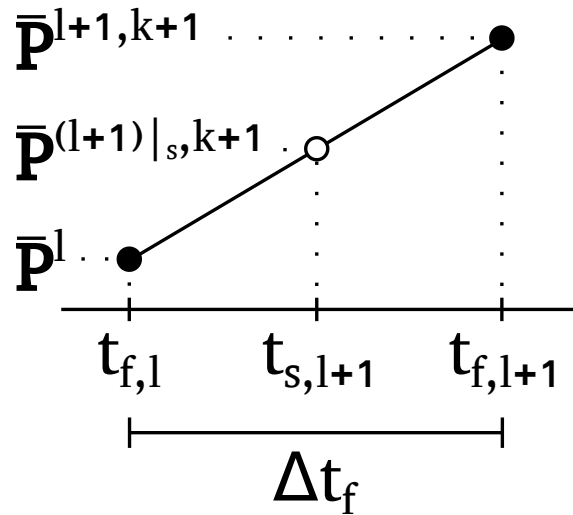


Figura 21 – Esboço do esquema de interpolação dos valores nodais $\bar{P}^{(l+1)|s,k+1}$, no qual os pontos pretos representam os valores conhecidos e o ponto vazio os valores obtidos pelo esquema

pulados, i.e., não se faz mais necessária a utilização de parâmetros de relaxação, ii) possui uma implementação computacional direta e eficiente, e iii) a convergência é obtida com uma quantidade menor de passos iterativos, como será mostrado na seção de exemplos numéricos a seguir.

Na figura 22 é apresentado um fluxograma do esquema de acoplamento iterativo.

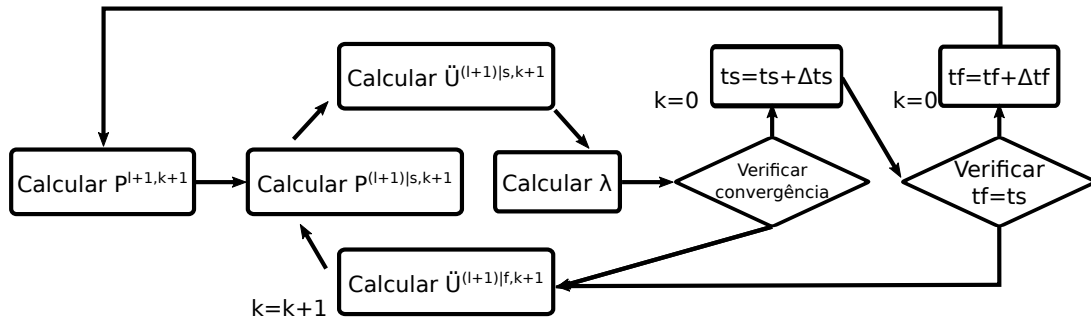


Figura 22 – Fluxograma do esquema iterativo.

4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, serão apresentados exemplos numéricos a fim de ilustrar a efetividade e potencialidade do método de acoplamento iterativo MEF-MEFE. Inicialmente serão apresentados três exemplos numéricos referentes ao acoplamento sólido-sólido, todos os casos consistem no modelo da barra engastada utilizada no exemplo anterior, porém com variações na direção do carregamento, além disso, no último caso será adicionado um furo no subdomínio discretizado pelo MEF, a fim de demonstrar a versatilidade e precisão do acoplamento iterativo num modelo mais complexo. Em seguida serão apresentados dois exemplos referentes ao acoplamento iterativo sólido-fluido propriamente dito, o primeiro consiste numa coluna sólido-fluida sob carregamento num dos extremos e preso no outro, semelhante ao caso da barra engastada, no qual será analisado a precisão do método ao utilizar o esquema de *subcycling* variando os tamanhos do passo de tempo nos subdomínios. O segundo exemplo, é um pouco mais complexo e realista, representado por uma barragem retendo a água de um lago de armazenamento.

4.1 Acoplamento sólido-sólido

O modelo utilizado para os dois primeiros exemplos pode ser visto na Figura 23, o qual consiste numa barra retangular engastada em uma de suas extremidades e a extremidade oposta estando sob a influência de uma carga distribuída de forma uniforme ao longo desta e cuja variação no tempo é dada por $f(t)$ e cuja direção θ é dada de acordo ao problema proposto. Na Figura 23, também é possível observar a interface de acoplamento, as dimensões com $a = 4\text{m}$ e $b = 1\text{m}$ do domínio global. Ainda, é possível ver a localização espacial do ponto $\mathbf{A} = (4, 0.5)$, no qual serão obtidos os resultados dos deslocamentos, sendo que o ponto de origem encontra-se no canto inferior esquerdo da barra.

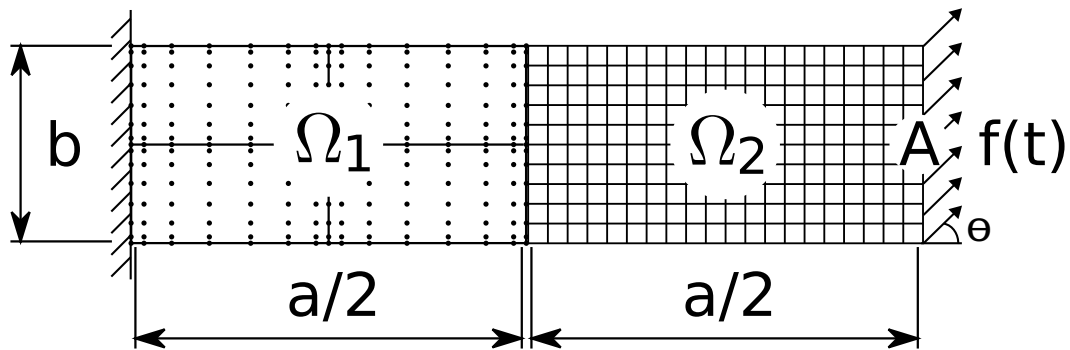


Figura 23 – Modelo da barra engastada correspondente ao problema 2.

A malha do MEF possui o total de 200 elementos quadriláteros e bilineares de

comprimento $l_e = 0.1\text{m}$ com 231 nós, já a malha do MEFE é composta por 4 elementos espectrais de ordem $p = 7$ com 225 nós, possuindo uma quantidade de nós próxima à malha do MEF como mostrado pela figura 23. Ressalta-se que, para estes problemas as malhas não possuem nós coincidentes na interface de interação.

Os casos abordados serão:

- Caso 1 - considera-se uma função $f(t)$ do tipo Heaviside unitária unicamente na direção x com $\theta = 0$ graus, recaindo num problema de propagação de onda plana (Coluna sólida do exemplo anterior).
- Caso 2 - considera-se um carregamento de mesma amplitude em ambas as direções $x - y$ com $\theta = 45$ graus e uma função $f(t)$ do tipo senoidal.
- Caso 3 - será abordado o caso onde a barra apresenta um furo no subdomínio referente ao MEF, este furo tem um raio de 0.35m e seu centro está localizado no ponto $(3.0, 0.5)$ como representado na Figura 24, e será aplicado um carregamento igual ao do caso 2.

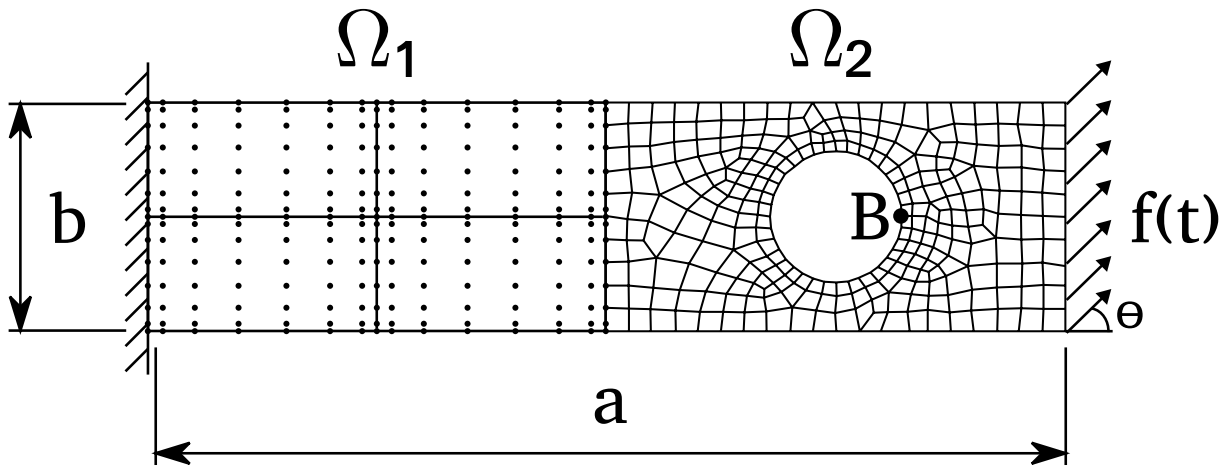


Figura 24 – Modelo da barra engastada com um furo correspondente ao problema 3.

Será utilizado o método de Newmark de primeira ordem com amortecimento (i.e., utilizando os valores $\alpha = 0$, $\beta = 0.30$ e $\gamma = 0.60$ no esquema HHT) em ambos os subdomínios e o passo de tempo de referência será $\Delta t_2 = 0.002\text{s}$. No primeiro caso será utilizada a solução analítica apresentada anteriormente como solução de referência, já nos dois últimos casos, será utilizado o resultado obtido com uma malha refinada do MEF como solução de referência. Ainda, o valor da tolerância utilizado no processo de acoplamento iterativo será de $\epsilon = 10^{-7}$.

4.1.1 Caso-1

Neste caso, as constantes dos materiais são dados por: $\rho_1 = \rho_2 = 1\text{kg/m}^3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.0$, $E_1 = E_2 = 10^2\text{N/m}^2$, resultando nas velocidades $V_p = 10.0\text{m/s}$ e $V_s = 7.07\text{m/s}$. Como comentado no exemplo anterior este problema é considerado muito severo do ponto de vista numérico, uma vez que possui velocidades e tensões descontínuas no tempo,

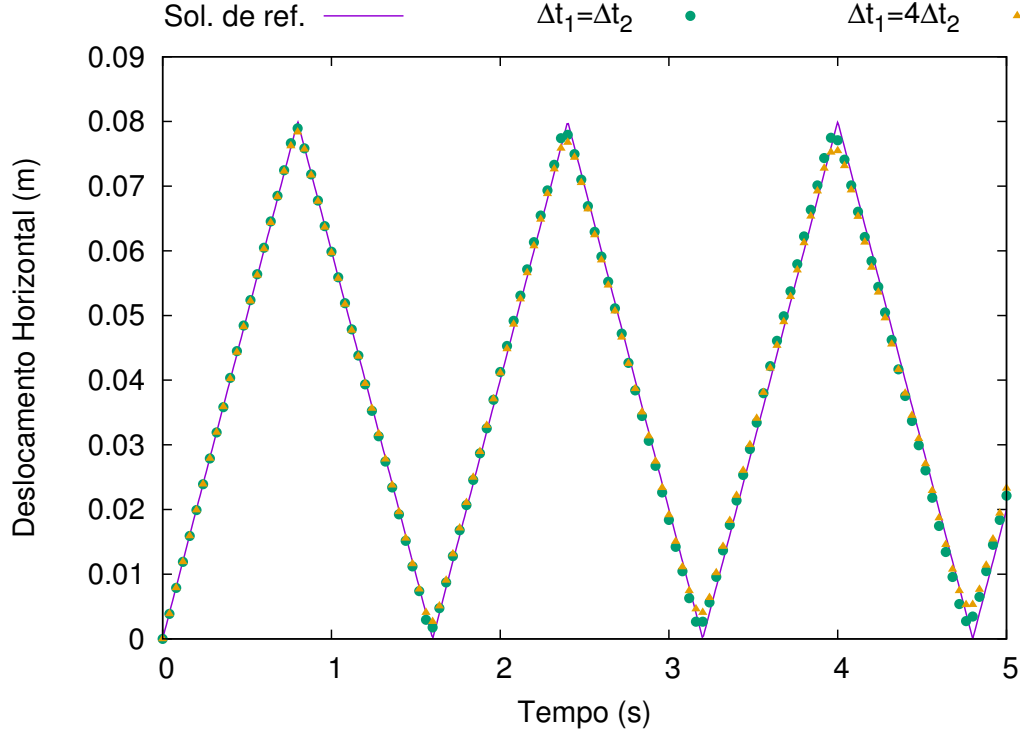


Figura 25 – Resultados do deslocamento horizontal para o ponto **A**.

Na Figura 25 é possível ver as curvas temporais dos deslocamentos horizontais resultantes da solução analítica e do MEF-MEFE. Como é possível observar, as soluções obtidas possuem curvas com comportamentos idênticos, sofrendo no fim do tempo de análise uma pequena defasagem com relação à solução analítica e à do MEF. Ainda, percebe-se que a solução não perdeu precisão ao utilizar passos de tempo distintos em cada um dos subdomínios.

4.1.2 Caso-2

Para este caso, as constantes dos materiais são dados por: $\rho_1 = \rho_2 = 1\text{kg/m}^3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $E_1 = E_2 = 10^2\text{N/m}^2$ e a função $f(t)$, em ambas as direções $x - y$, é definida como

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t), & \text{se } t \leq 1 \\ 0, & \text{se } t > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Nas Figuras 26 e 27 é possível ver as curvas temporais dos deslocamentos horizontais e verticais resultantes, respectivamente, em conjunto com a solução de referência

correspondente, a qual foi obtida utilizando um modelo de domínio único com 400 elementos quadrilaterais. As curvas referentes aos resultados dos deslocamentos horizontais e verticais do acoplamento MEF-MEFE possuem comportamento semelhantes ao início do tempo de análise, perdendo precisão levemente no decorrer do tempo.

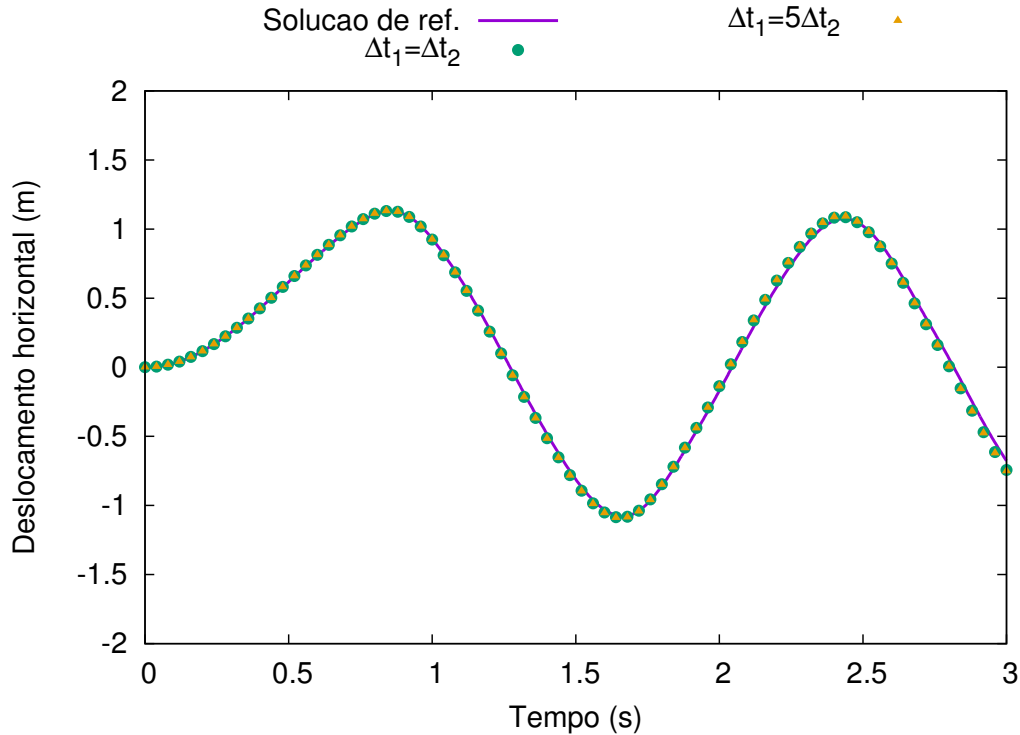


Figura 26 – Resultados do deslocamento horizontal para o ponto **A**.

Na Figura 28 são apresentados gráficos de barra (histograma) que representam porcentagem de passos de iteração necessários para atingir a convergência por passo de tempo, i.e, para cada passo de tempo o número de passos de iteração varia, todos estes valores são armazenados e no fim é verificada quantas vezes cada um destes valores se repetiu ao longo de todo o tempo de análise. Nota-se nestes gráficos que a quantidade de iterações necessárias pra convergência quando $\Delta t_1 = \Delta t_2$ fica concentrada entre 2 e 3 com perto de 40% e 43%, respectivamente; já para o caso onde $\Delta t_1 = 5\Delta t_2$ os valores ficam concentrados entre 1 e 4 com perto de 40% e 30%, respectivamente, apresentando valores bem próximos e indicando robustez no método ao lidar com a variação do tamanho de passo de tempo.

Na Figura 29 gráficos de barra também são apresentados, desta vez representando os valores obtidos para o parâmetro de relaxação λ ao longo de todos os passos iterativos através da Eq. (3.5). Perceba que estes valores ficaram próximos de um (1.0) tanto para o caso onde $\Delta t_1 = \Delta t_2$ quanto para o caso onde $\Delta t_1 = 5\Delta t_2$. A escolha do valor $\lambda = 0.9$ como valor inicial para os próximos experimentos numéricos, como comentado anteriormente, foi motivada a partir destes gráficos.

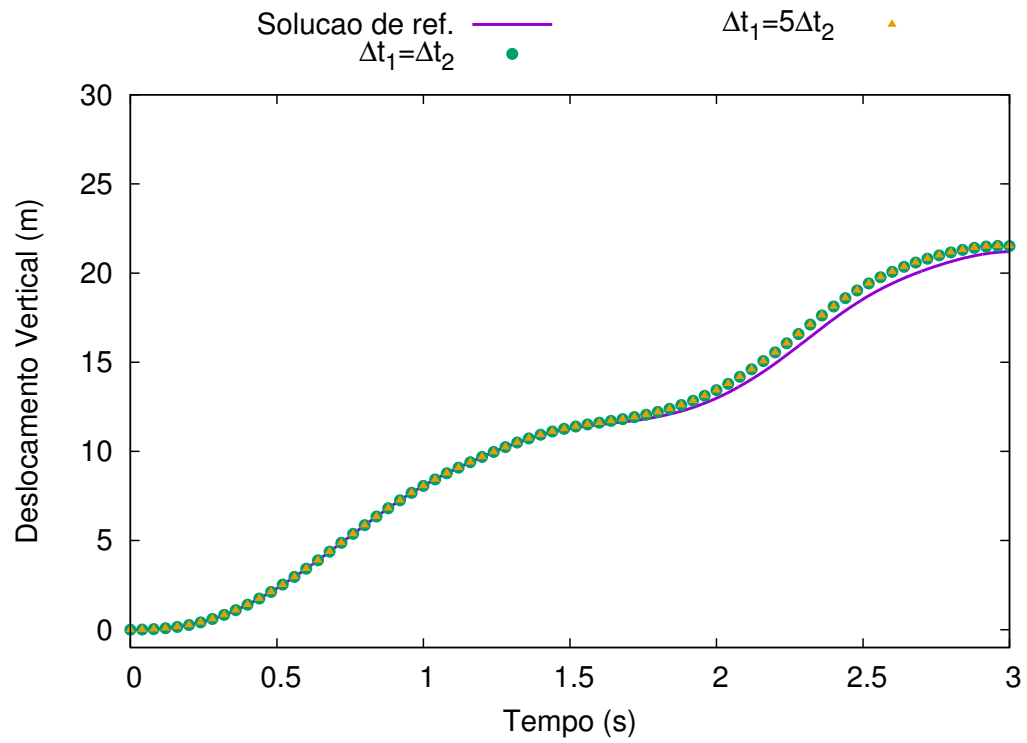


Figura 27 – Resultados do deslocamento vertical para o ponto A.

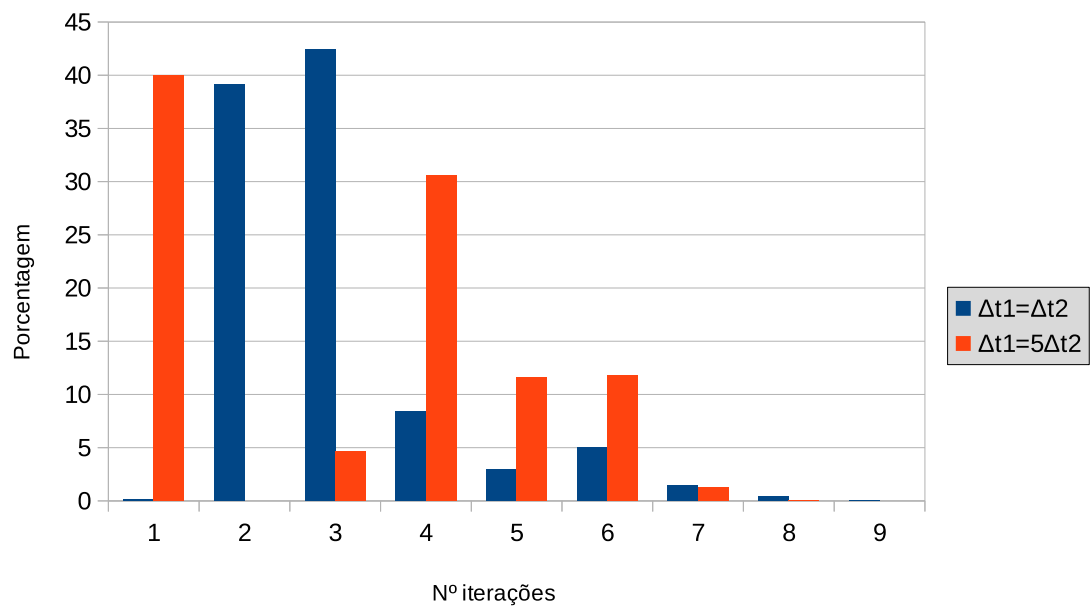


Figura 28 – Distribuição do número de iterações em cada passo de tempo ao longo do tempo de análise quando $\Delta t_1 = \Delta t_2$ e $\Delta t_1 = 5\Delta t_2$.

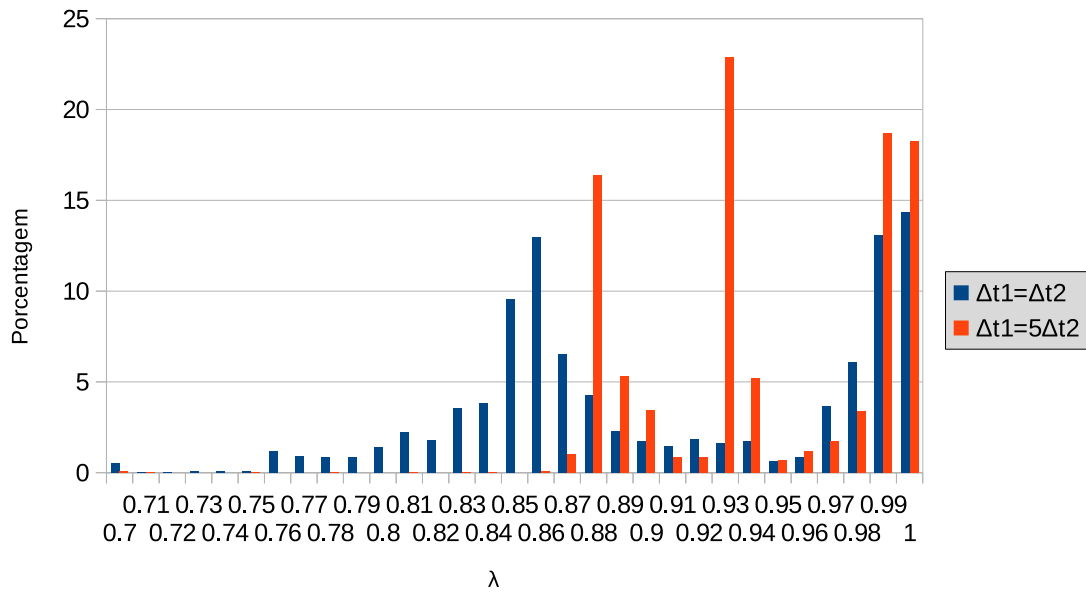


Figura 29 – Distribuição do valor de λ em cada passo de iteração ao longo do tempo de análise quando $\Delta t_1 = \Delta t_2$ e $\Delta t_1 = 5\Delta t_2$.

Na Figura 30 são apresentados snapshots do módulo do deslocamento $\|\mathbf{u}\|$ assim como a deformação sofrida pela barra em diferentes instantes de tempo, a fim de mostrar o comportamento do sistema acoplado como um todo à medida que o tempo avança. No segundo snapshots, é possível ver claramente o cumprimento da condição de continuidade através da interface de interação.

4.1.3 Caso-3

Este exemplo consiste no mesmo modelo físico do caso-2, no qual será adicionado um furo no subdomínio correspondente ao MEF, como visto na Figura 24. Nas Figuras 31 e 32, respectivamente, é possível ver as curvas temporais dos deslocamentos horizontais e verticais resultantes em conjunto com a solução de referência correspondente, obtidas no ponto $\mathbf{B} = (3.35, 0.5)$, a qual foi obtida utilizando um modelo de domínio único. Novamente as curvas referentes aos resultados dos deslocamentos horizontais e verticais do acoplamento MEF-MEFE possuem comportamento semelhantes no início do tempo de análise, perdendo precisão levemente no decorrer do tempo.

Na Figura 33 são apresentados os gráficos de barra que representam porcentagem de passos de iteração necessários para atingir a convergência por passo de tempo, já apresentados anteriormente. Nestes gráficos é possível ver que a quantidade de iterações necessárias pra convergência quando $\Delta t_1 = \Delta t_2$ fica concentrada entre 5 e 7 com perto de 45% e 30% respectivamente, já para o caso onde $\Delta t_1 = 7\Delta t_2$ os valores ficam concentrados em 1 em perto de 43% dos passos de tempo, o que indica que ao utilizar esta configuração a convergência é alcançada de maneira muito rápida.

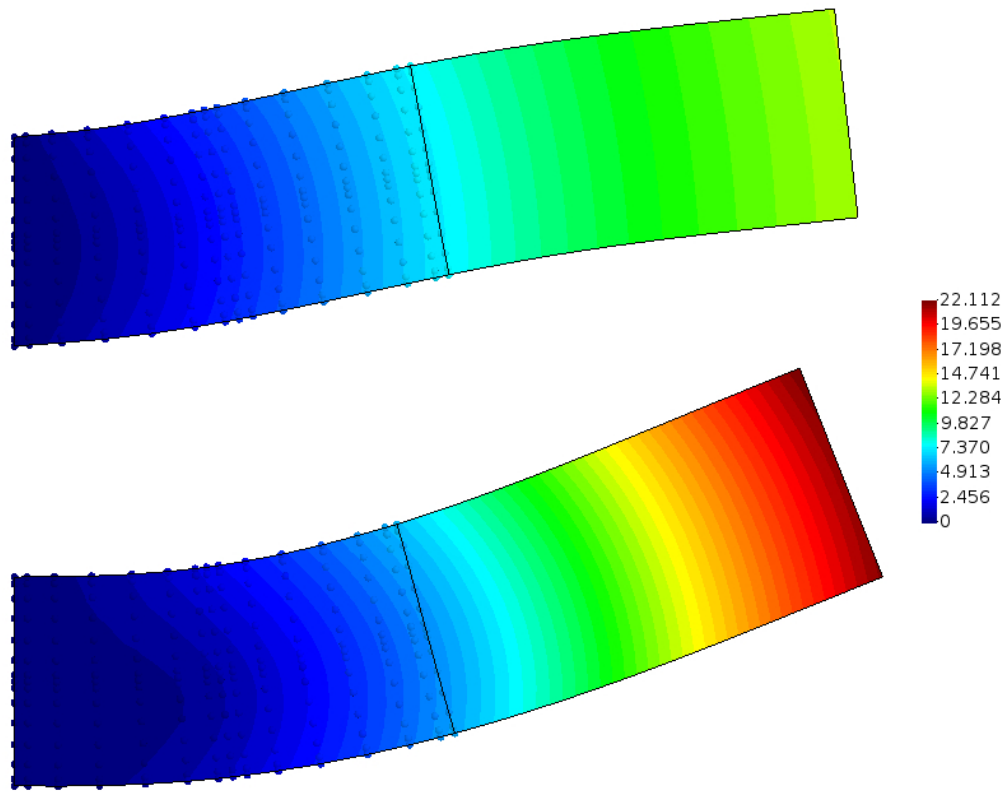


Figura 30 – Snapshots de $\|\mathbf{u}\|$ em $t = 1.98\text{s}$ e $t = 3\text{s}$, respectivamente, de cima para baixo.

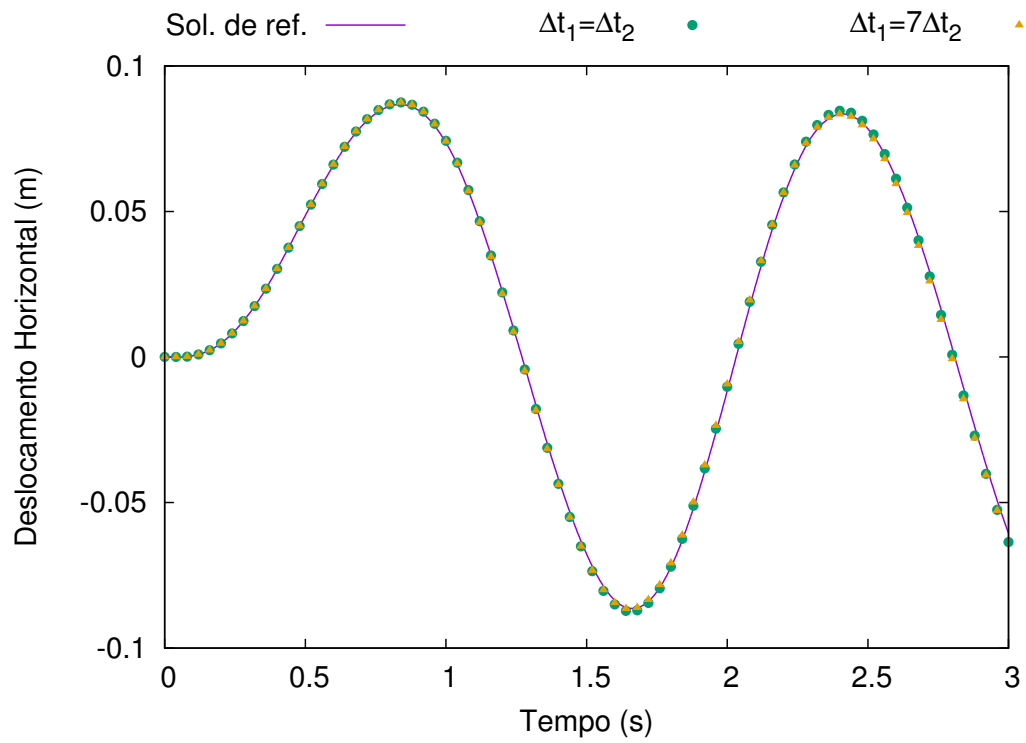


Figura 31 – Resultados do deslocamento horizontal para o ponto **B**.

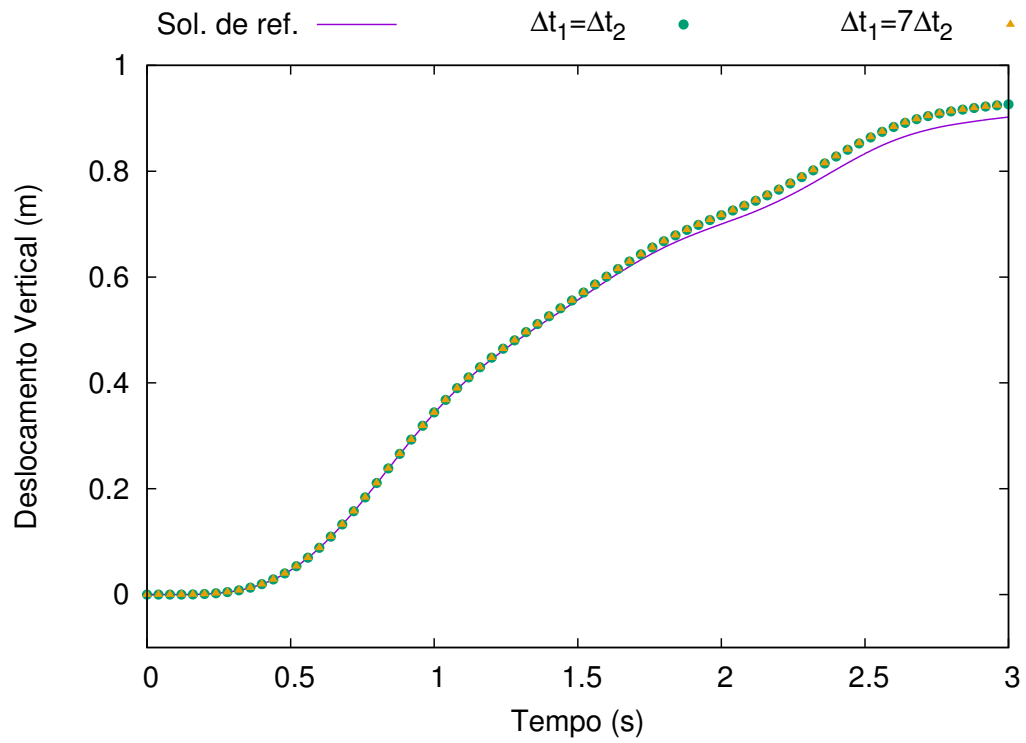


Figura 32 – Resultados do deslocamento vertical para o ponto B.

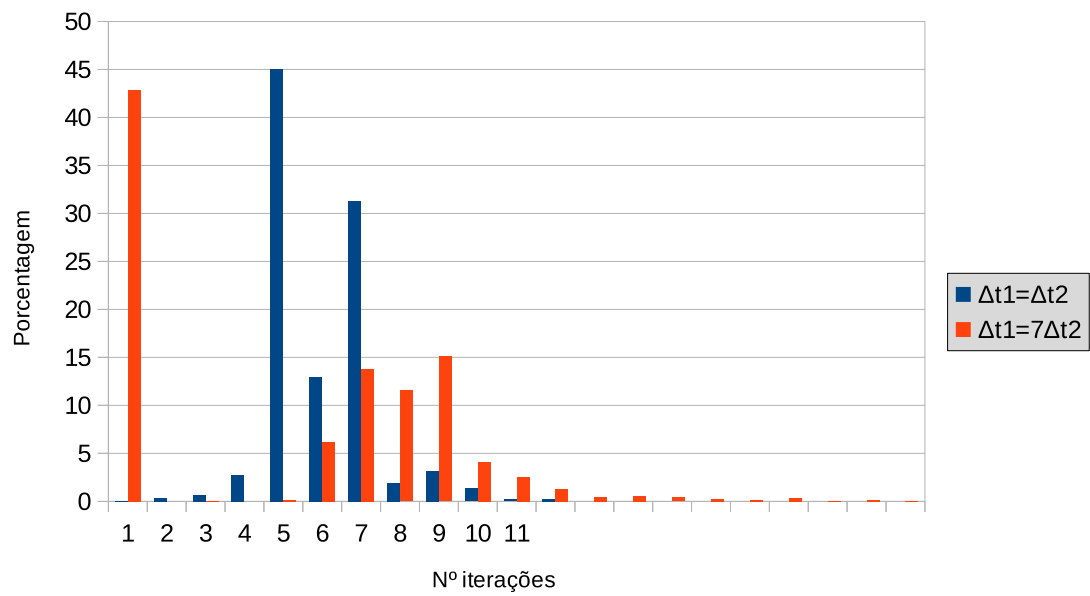


Figura 33 – Distribuição do número de iterações em cada passo de tempo ao longo do tempo de análise quando $\Delta t_1 = \Delta t_2$ e $\Delta t_1 = 7\Delta t_2$.

Na Figura 34 gráficos de barras também são apresentados representando os valores obtidos para o parâmetro de relaxação λ ao longo de todos os passos iterativos, como apresentado já anteriormente. Perceba que desta vez os valores λ ficaram variaram entre 0.6 e 1.0 para ambos os casos apresentados, nota-se que para o caso onde $\Delta t_1 = \Delta t_2$, o valor de $\lambda = 1.0$ foi obtido em mais de 30% das iterações.

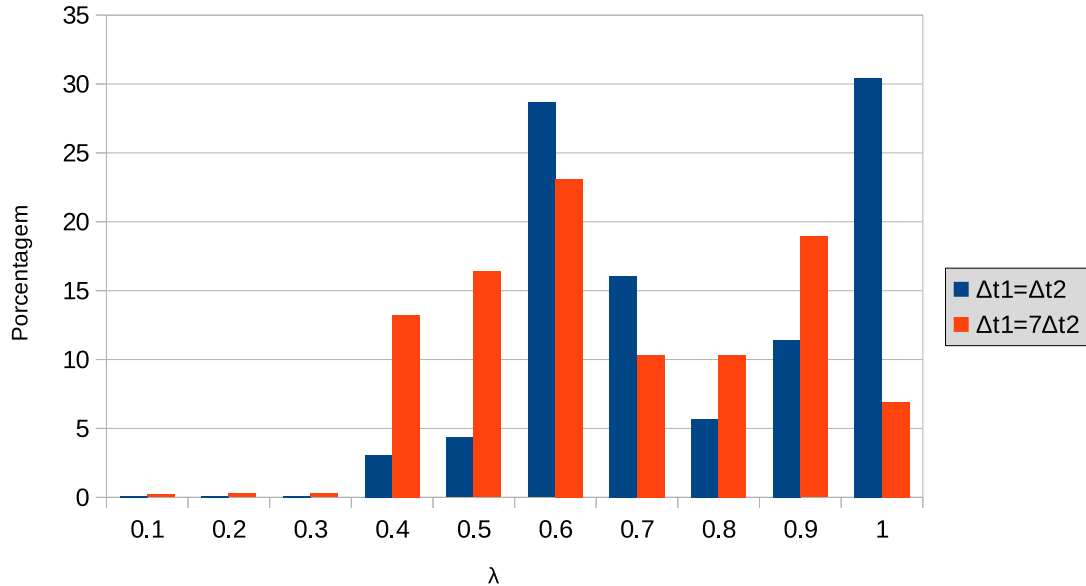


Figura 34 – Distribuição do valor de λ em cada passo de iteração ao longo do tempo de análise quando $\Delta t_1 = \Delta t_2$ e $\Delta t_1 = 7\Delta t_2$.

Na Figura 35 são apresentados snapshots do módulo do deslocamento $\|\mathbf{u}\|$ assim como a deformação sofrida pela barra em diferentes instantes de tempo, a fim de mostrar o comportamento do sistema acoplado como um todo à medida que o tempo avança. No segundo e terceiro snapshots, é possível ver novamente o cumprimento da condição de continuidade através da interface de interação.

4.2 Acoplamento sólido-fluido

Nesta seção serão apresentados os exemplos numéricos referentes ao acoplamento iterativo MEF-MEFE em problemas de acoplamento sólido-fluido a fim de mostrar a precisão e versatilidade do método. Será utilizado a regra do trapézio (i.e., utilizando os valores $\alpha = 0$, $\beta = 0.25$ e $\gamma = 0.50$ no esquema HHT) no subdomínio sólido, enquanto que no subdomínio fluido será utilizado o esquema HHT com amortecimento numérico apresentado anteriormente e utilizando $\alpha = -1/3$. Em todos os casos o método de acoplamento padrão MEF-MEF com nós coincidentes na interface de acoplamento (malhas coincidentes) e com a regra do trapézio em ambos subdomínios será utilizado como solução de referência. Ainda, o valor da tolerância utilizado no processo de acoplamento iterativo é de $\epsilon = 10^{-7}$.

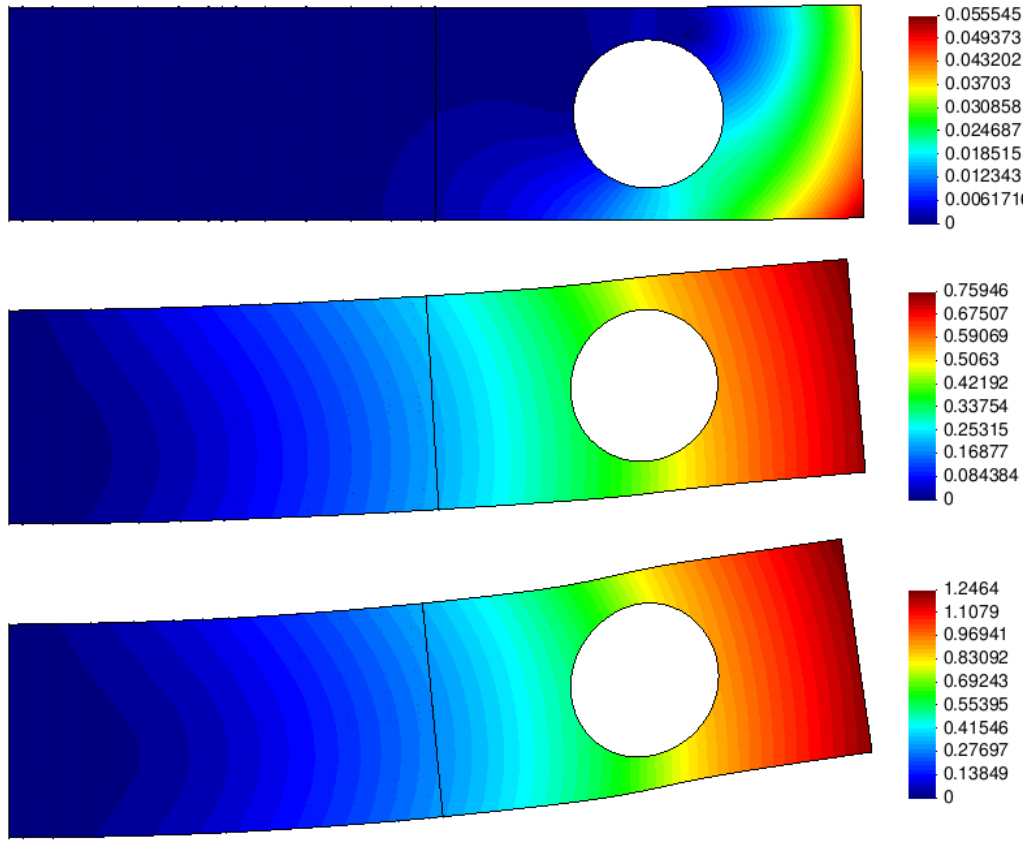


Figura 35 – Snapshots de $\|\mathbf{u}\|$ em $t = 0.3s$, $t = 1.5s$ e $t = 3s$, respectivamente, de cima para baixo.

4.2.1 Coluna aço-água

Este exemplo numérico consiste numa coluna de aço-água de dimensões $a = 4.0m$ e $b = 1.0m$ sujeitos a um carregamento Heaviside atuando num dos lados como esquematizado na Figura 36. Como pode ser visto, a coluna de água é discretizada por 4 elementos espectrais de ordem $p = 7$ com um total de 225 nós, enquanto que a coluna de aço é discretizada por 200 elementos quadrilaterais de 4 nós cada com um total de 231 nós.

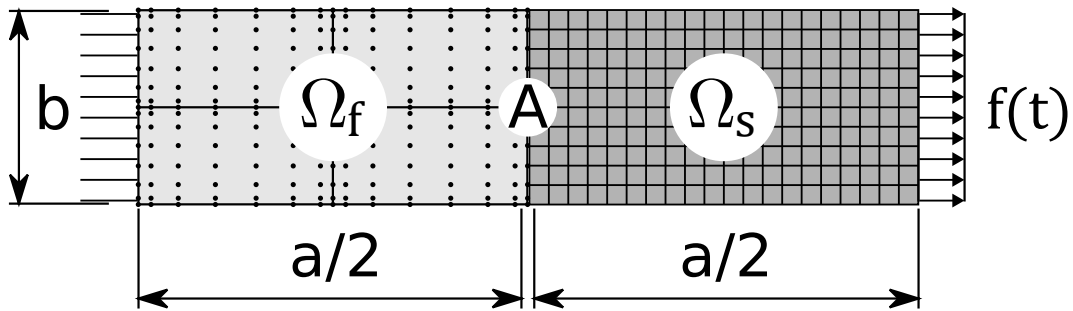


Figura 36 – Esboço do modelo e discretização da coluna aço-água.

As propriedades dos materiais são: $\kappa_f = 2.3175 \times 10^9 N/m^2$ (módulo bulk); $\rho_f = 1030 kg/m^3$ (densidade da água); $E = 2.1 \times 10^{11} N/m^2$; $\nu = 0.3$; $\rho_s = 7700 kg/m^3$, resul-

tando num modelo com velocidades de propagação de ondas distintos em cada subdomínio, i.e., $v_P = 6059\text{m/s}$ e $v_S = 3239\text{m/s}$ no aço (domínio sólido) e $v_f = 1500\text{m/s}$ para a água (domínio fluido).

Nas Figuras 37 e 38, são apresentadas as variações no tempo do deslocamento horizontal e pressão hidrodinâmica no ponto $A = (a/2, b/2)$ (como visto na Fig. 36). No teste são considerados três casos: $\Delta t_f = \Delta t_s$, $\Delta t_f = 3\Delta t_s$ e $\Delta t_f = 6\Delta t_s$ no qual $\Delta t_s = 3.0 \times 10^{-6}\text{s}$, e também apresentada a solução de referência.

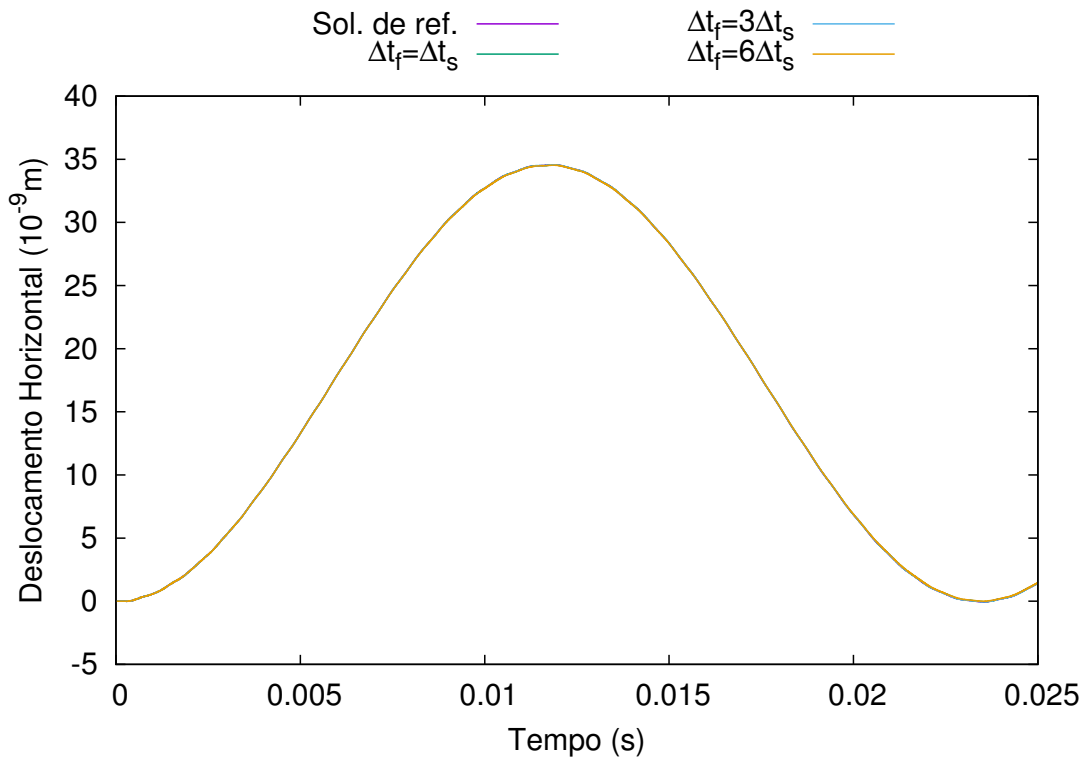


Figura 37 – Resultados do deslocamento horizontal da coluna aço-água no ponto A considerando vários tamanhos de tempo distintos.

No caso da Figura 37 pode-se perceber a precisão nos resultados obtidos para o deslocamento horizontal mesmo que variando os tamanhos de passo no tempo.

Entretanto é possível ver na Figura 38 que no caso dos resultados obtidos para a pressão hidrodinâmica, ocorrem oscilações espúrias na solução de referência uma vez que não é utilizado amortecimento numérico, o que pode levar a uma compreensão errada nos resultados, como comentado anteriormente. Assim, pode-se notar claramente a importância da utilização do método HHT, uma vez que a ordem de convergência e precisão temporal é mantida ao mesmo tempo que é introduzido o amortecimento numérico controlado.

Como é possível ver, num todo, a precisão dos resultados não sofreu muita perda ao serem considerados tamanhos de passos de tempo distintos nos subdomínios, até mesmo

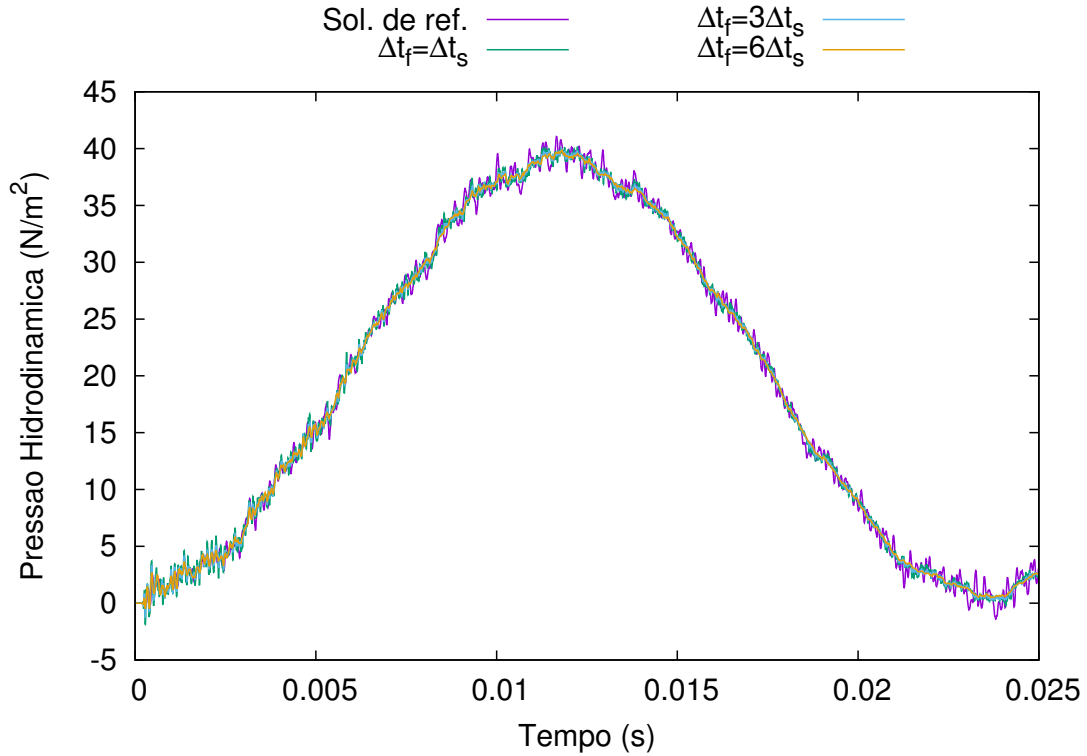


Figura 38 – Resultados da pressão hidrodinâmica da coluna aço-água no ponto *A* considerando vários tamanhos de tempo distintos.

para o caso de ter $\Delta t_f = 6\Delta t_s$. É importante notar que o resultados obtidos nestes experimentos coincidem com os encontrados na literatura, como é possível ver em [78, 79].

4.2.2 Sistema de barragem-reservatório

Neste exemplo será analisado o sistema barragem-reservatório descrito na Figura 39. A barragem está sujeita a um carregamento senoidal dinâmico distribuído uniformemente na parte de cima dela atuando com uma frequência angular de $\omega = 18\text{rad/s}$ (i.e. $f(t) = \sin(\omega t)$). As propriedades dos materiais da barragem são: $E = 3.437 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu = 0.25$ e $\rho_s = 2000 \text{kg/m}^3$. A água adjacente é caracterizada por: $v_f = 1436 \text{m/s}$ e $\rho_f = 1000 \text{kg/m}^3$. A modelagem do contato da água com o ar (parte de cima do reservatório) consiste em considerar a pressão hidrodinâmica como nula enquanto que no fundo é prescrito uma condição de contorno rígido (i.e. fluxo zero) uma vez que é considerado uma parede superficial. Ainda, ao longo do lado direito é utilizado uma condição de contorno não-reflexiva Eq. (2.3) a fim de simular um domínio infinito como visto em [80].

A malha adotada para o fluido é composta de 6 elementos espectrais de ordem $p = 7$ com um total de 330 nós, enquanto que para o sólido uma malha de 81 elementos quadriláterais de quatro nós com um total de 103 nós é adotada. Os tamanhos de passo de tempo adotados para a análise são $\Delta t_f = \Delta t_s$, $\Delta t_f = 3\Delta t_s$ e $\Delta t_f = 6\Delta t_s$ no qual $\Delta t_s = 3.5 \times 10^{-4} \text{s}$.

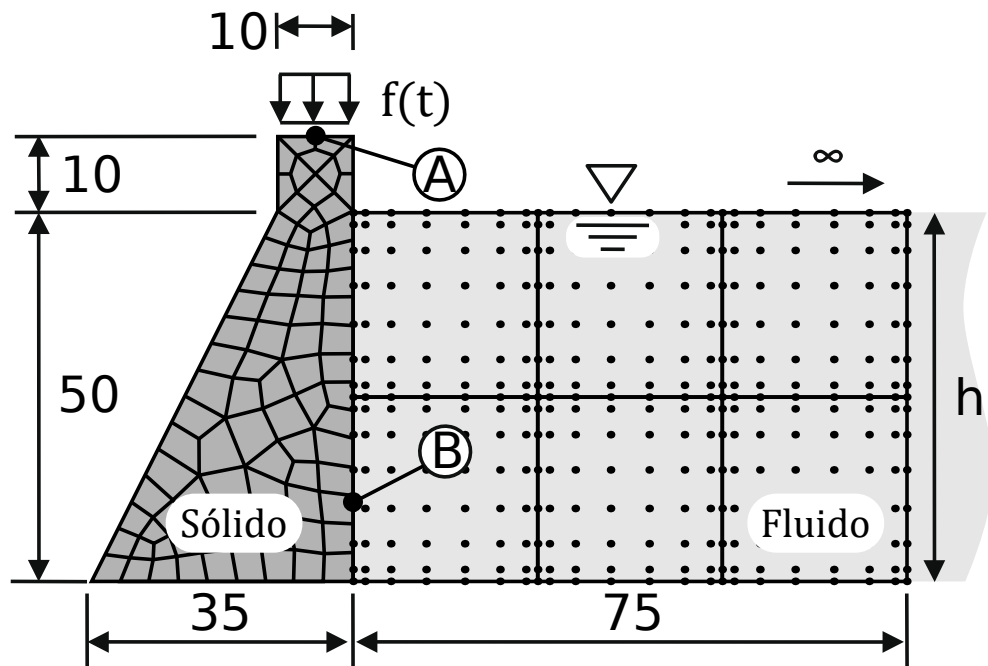


Figura 39 – Geometria e carregamento do sistema de barragem-reservatório, adaptado de [81].

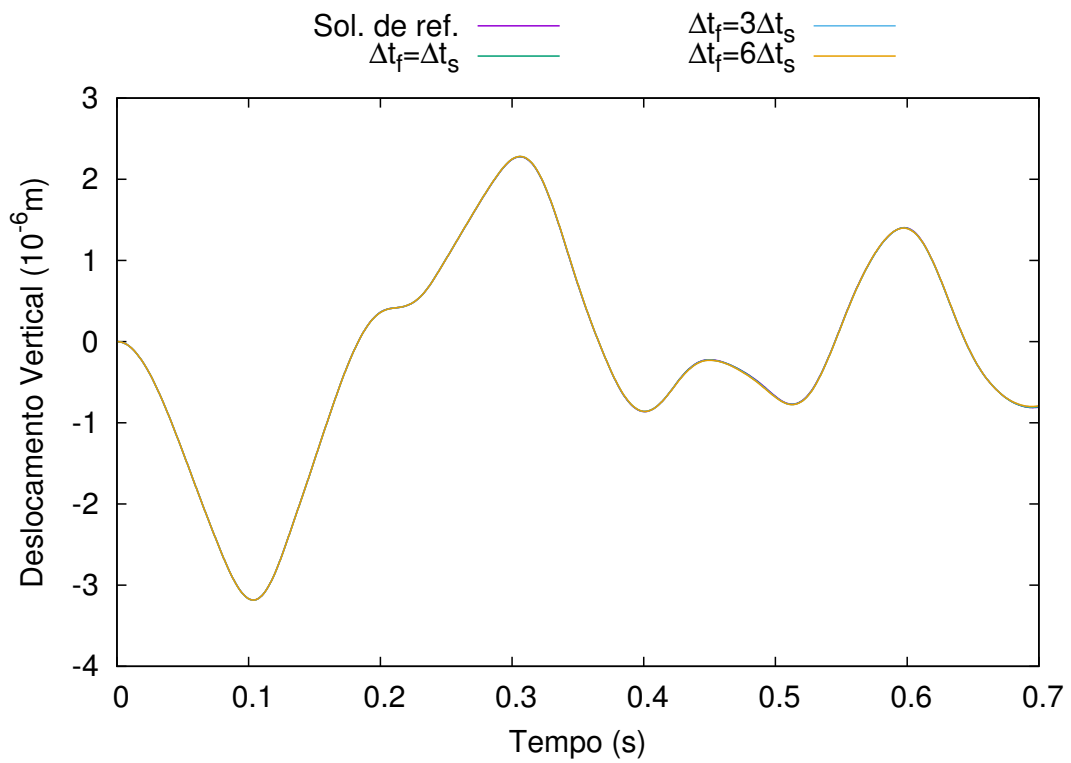


Figura 40 – Resultados do deslocamento vertical da barragem no ponto A.

Nas Figuras 40 e 41 são retratados os resultados do deslocamento vertical e da pressão hidrodinâmica nos pontos $A = (30, 60)$ e $B = (35, 10)$. É possível ver nos resultados a precisão obtida pelo método proposto quando comparado à solução de referência, vista em [82].

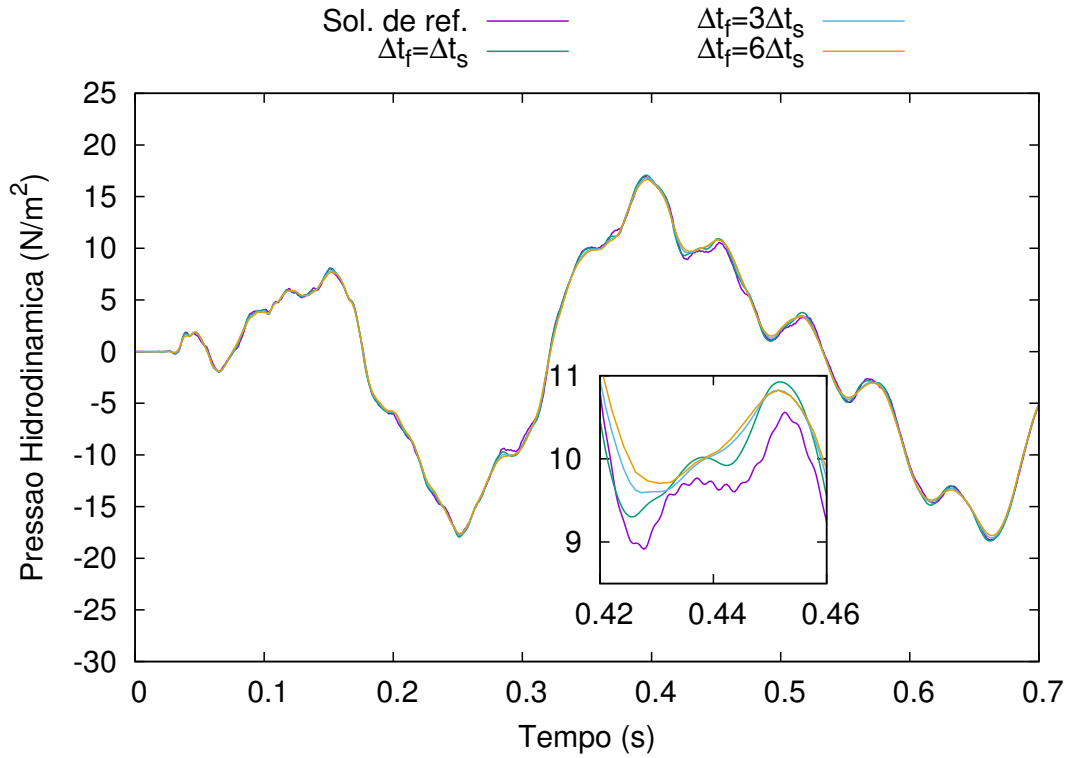


Figura 41 – Resultados da pressão hidrodinâmica do reservatório no ponto B .

Os resultados obtidos ao se variar o tamanho do passo de tempo também podem ser comparados com os vistos na literatura [81]. Neste trabalho porém, ao utilizar o método HHT com amortecimento numérico, a precisão dos resultados no domínio fluido é melhorada.

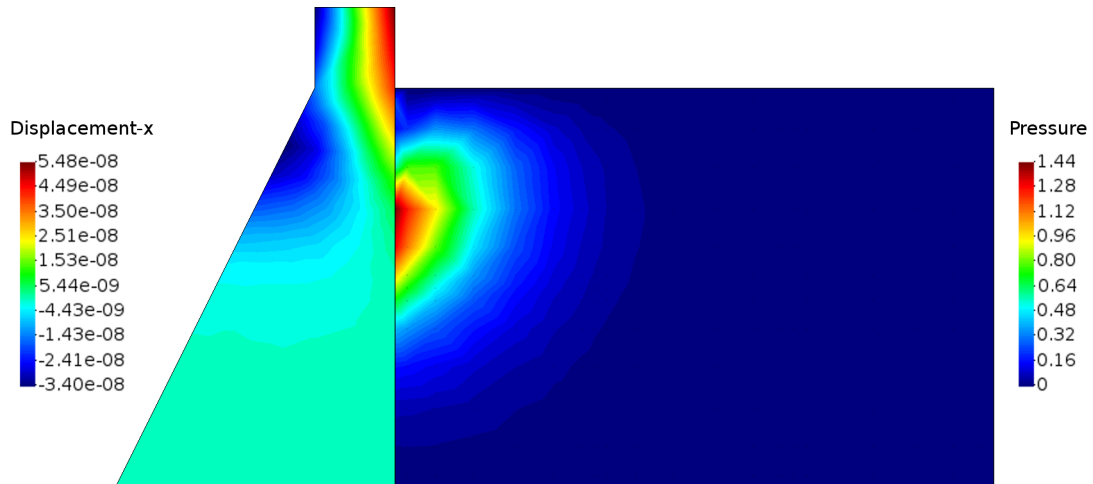


Figura 42 – Snapshot em $t = 0.028s$ do deslocamento horizontal e da pressão hidrodinâmica

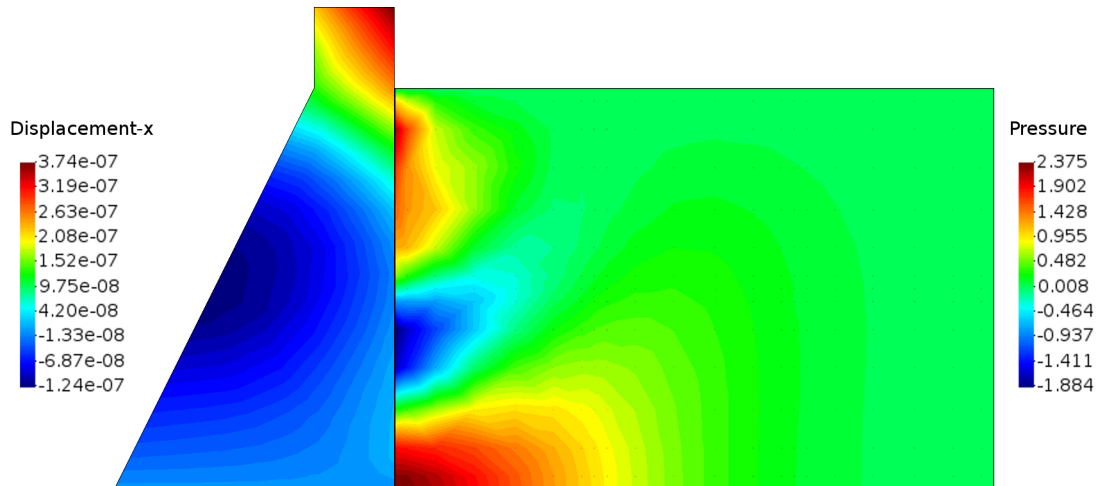


Figura 43 – Snapshot em $t = 0.056s$ do deslocamento horizontal e da pressão hidrodinâmica

Nas Figuras 42 e 43 são apresentados snapshots do deslocamento horizontal e da pressão hidrodinâmica em diferentes instantes de tempo e com seus respectivos valores ao lado, a fim de mostrar o comportamento do sistema acoplado como um todo e à medida que o tempo avança. Em ambos snapshots, é possível notar claramente uma frente de onda de pressão no domínio fluido originada pela interação dinâmica com a barragem. Nos snapshots é mostrado somente o deslocamento horizontal da barragem uma vez que de acordo com as equações de acoplamento do fluido Eq. (2.3) somente esta direção é a que influencia no comportamento deste.

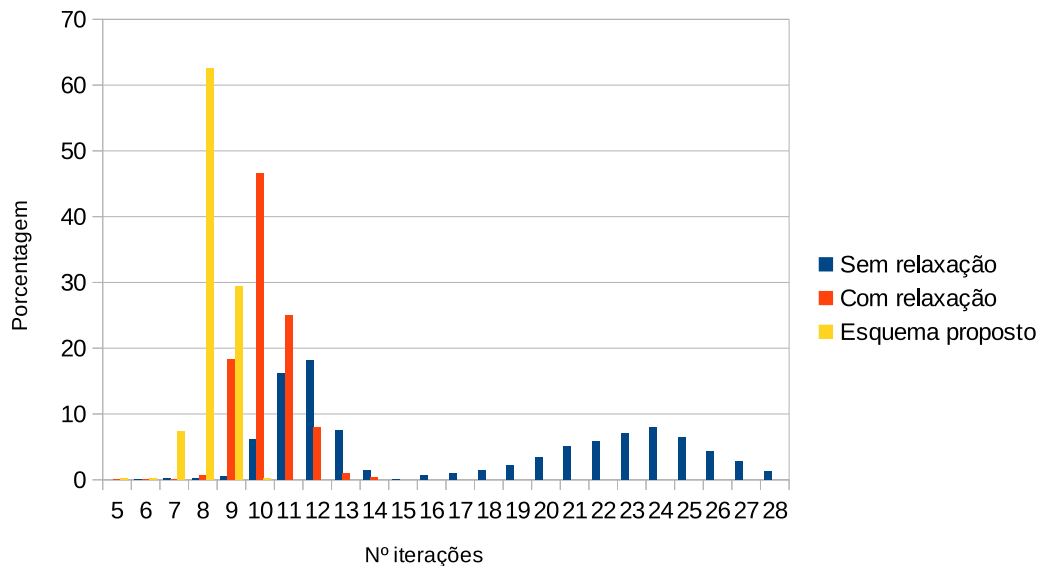


Figura 44 – Distribuição do número de iterações em cada passo de tempo ao longo do tempo de análise quando $\Delta t_f = 2\Delta t_s$.

A partir das Figuras 44 e 45 é realizado uma análise de porcentagem do número de iterações necessárias para convergência por passo de tempo, i.e, para cada passo de

tempo o número de passos de iteração varia, todos estes valores são armazenados e no fim é verificada quantas vezes cada um destes valores se repetiu ao longo de todo o tempo de análise, tendo um total de 2000 passos de tempo (uma vez que $\Delta t_s = 3.5 \times 10^{-4}s$ e o tempo na análise finaliza em $t = 0.7s$) analogamente ao realizado para o caso sólido-sólido. O gráfico de barras apresenta três tipos de metodologias, sendo estas: os métodos de acoplamento iterativo, sem a utilização de um parâmetro de relaxação (em azul), com o parâmetro relaxação dinâmico apresentado previamente na sessão 3.2.1.3 (em laranja), e o método proposto em amarelo.

Na Fig.44 é mostrada a distribuição para o caso quando $\Delta t_f = 2\Delta t_s$, no qual é possível ver que para o esquema proposto são necessárias 8 iterações para atingir a convergência dos resultados em mais de 60% dos passos de tempo possuindo uma concentração ao lado esquerdo do gráfico, o que significa que de maneira global foram necessários uma menor quantidade de passos de iteração do que os métodos utilizados para comparação. Por outro lado, as barras em laranja indicam que foram necessárias 10 iterações para mais de 45% dos passos de tempo. Ainda, é importante notar que quando não utilizadas estratégias de relaxamento a quantidade de iterações aumenta claramente; além disso, o número de iterações está mais espalhado em torno do valor 24, indicando falta de consistência para alcançar a convergência.

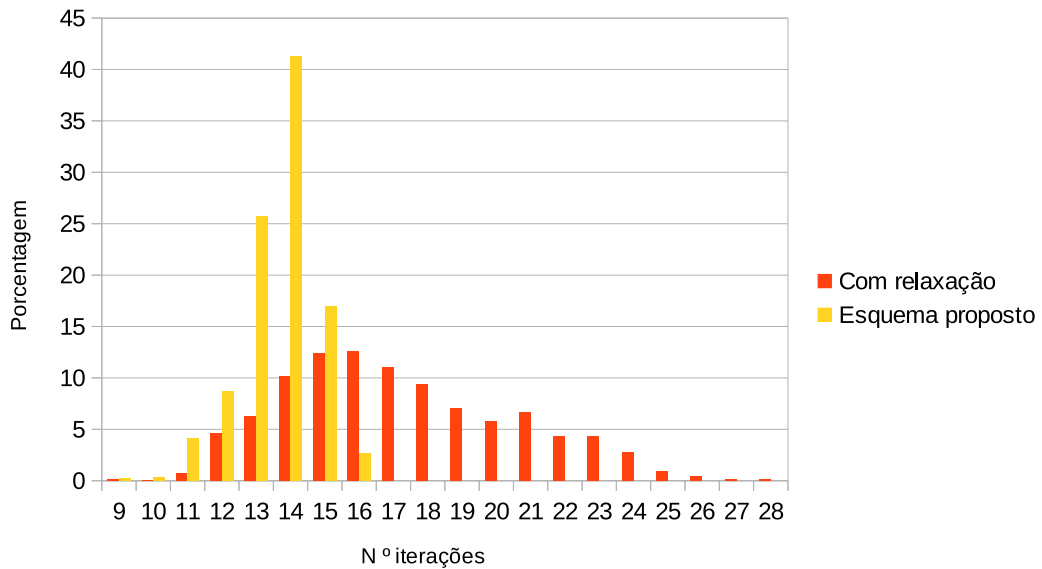


Figura 45 – Distribuição do número de iterações em cada passo de tempo ao longo do tempo de análise quando $\Delta t_f = 6\Delta t_s$.

Ao analisar a Fig.45 que é o caso de quando $\Delta t_f = 6\Delta t_s$, é possível que, como esperado, o número de iterações necessárias pra convergência é diretamente proporcional com a diferença entre os tamanhos dos passos de tempo de cada subdomínio. De fato ao comparar com o caso anterior, agora são necessários cerca de 14 iterações para atingir

convergência para o 40% dos passo de tempo para as barras em amarelo permanecendo concentradas no intervalo de [11–15] iterações. Ainda, o esquema proposto se comporta de maneira melhor, possuindo menos iterações que o esquema com parâmetro de relaxação dinâmico, uma vez que este fica mais concentrado ao lado direito deste. Neste caso o método que não utilizou parâmetro de relaxação algum não conseguiu atingir convergência nos resultados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente tese objetivou apresentar um método preciso de acoplamento iterativo MEF-MEFE para problemas do tipo fluido-sólido com múltiplos tamanhos de passos de tempo nos subdomínios.

Este trabalho apresentou:

- Uma introdução a problemas de acoplamento do tipo sólido-fluido, expondo detalhadamente as equações governantes, as condições iniciais e de contorno, e as condições de acoplamento na interface de interação, bem como a formulação fraca de cada subdomínio;
- A formulação semi-discreta do Método dos Elementos Finitos Espectral, suas principais vantagens e limitações, sempre comparando com o Método dos Elementos Finitos de alta ordem;
- O método HHT de marcha no tempo, ressaltando sua vantagem de possuir amortecimento numérico controlado, o que adiciona precisão ao método desenvolvido;
- Uma descrição detalhada do acoplamento iterativo MEF-MEFE, abordando:
 - as vantagens de utilizar esta metodologia, e.g., a facilidade na implementação e a dispensabilidade de nós coincidentes na interface de acoplamento;
 - a formulação de um parâmetro de relaxação ótimo e eficiente;
 - a proposição de uma alternativa ao esquema de interpolação/extrapolação temporal tradicional, obtendo bons resultados em um esquema mais eficiente;
 - e exemplos numéricos comprovando o bom desempenho, a eficiência e a precisão na obtenção dos resultados.

Ressalta-se que, ao longo deste trabalho foram realizados vários outros, dentre eles [50], no qual o método de acoplamento iterativo foi utilizado no caso sólido-sólido para o MEF-MEFE com bons resultados. Ainda, foram feitos testes e análises em relação ao parâmetro de relaxação utilizado no acoplamento iterativo, o qual, como comentado anteriormente, tem papel fundamental na convergência da metodologia. Entretanto, não foram obtidos resultados satisfatórios, tendo poucas melhorias se comparado ao parâmetro de relaxação utilizado inicialmente.

Como trabalhos futuros, propõe-se:

- Realizar uma análise de estabilidade e convergência rigorosa do método de acoplamento iterativo apresentado;

- Estender o método a problemas onde o fluido possua uma formulação mais completa, como realizado em [83] para o acoplamento MEF-MEC;
- Enriquecer a formulação do MEF-E em domínios com materiais heterogêneos, sem a necessidade de deformar os elementos, como o proposto ao utilizar o Método das Células Finitas (MCF), tornando-o mais versátil.

REFERÊNCIAS

- [1] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 7 edition, 2013.
- [2] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly, and P. Bettess. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(2):355–375, 1977.
- [3] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel. *Boundary element techniques*. Springer, New York, 1984.
- [4] O. von Estorff and M.J. Prabucki. Dynamic response in the time domain by coupled boundary and finite elements. *Computational Mechanics*, 6(1):35–46, 1990.
- [5] K.C. Park, C.A. Fellipa, and J.A. DeRuntz. Stabilization of staggered solution procedures for fluid–structure interaction analysis. *Computational Methods for fluid-Structure Interaction Problems*, 26, 1977.
- [6] P. Zanolli. Domain decomposition algorithms for spectral methods. *CALCOLO*, 24(3):201–240, 1985.
- [7] D. Funaro, A. Quarteroni, and P. Zanolli. An iterative procedure with interface relaxation for domain decomposition methods. *SIAM journal on numerical analysis*, 25(6):1213–1236, 1988.
- [8] L.D. Marini and A. Quarteroni. An iterative procedure for domain decomposition methods: A finite element approach. 1986.
- [9] C.C. Lin, E.C. Lawton, J.A. Caliendo, and L.R. Anderson. An iterative finite element-boundary element algorithm. *Computers & Structures*, 59(5):899–909, 1996.
- [10] Y.T. Feng and D.R.J. Owen. Iterative solution of coupled FE/BE discretizations for plate–foundation interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(11):1889–1901, 1996.
- [11] W.M. Elleithy, H.J. Al-Gahtani, and M. El-Gebeily. Iterative coupling of BE and FE methods in elastostatics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25(8):685–695, 2001.
- [12] D. Soares, O. von Estorff, and W. J. Mansur. Efficient non-linear solid–fluid interaction analysis by an iterative BEM/FEM coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(11):1416–1431, 2005.
- [13] D. Soares, O. von Estorff, and W. J. Mansur. Iterative coupling of bem and fem for nonlinear dynamic analyses. *Computational Mechanics*, 34(1):67–73, 2004.
- [14] O. von Estorff and C. Hagen. Iterative coupling of FEM and BEM in 3D transient elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(8):775–787, 2005.
- [15] D. Soares. An optimised FEM–BEM time-domain iterative coupling algorithm for dynamic analyses. *Computers & Structures*, 86(19-20):1839–1844, 2008.

- [16] D. Soares and L. Godinho. An optimized BEM–FEM iterative coupling algorithm for acoustic–elastodynamic interaction analyses in the frequency domain. *Computers & Structures*, 106–107:68–80, 2012.
- [17] P. Coulier, S. François, G. Lombaert, and G. Degrande. Coupled finite element – hierarchical boundary element methods for dynamic soil–structure interaction in the frequency domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(7):505–530, 2014.
- [18] S. François, P. Coulier, and G. Degrande. Finite element–boundary element coupling algorithms for transient elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 55:104–121, 2015.
- [19] A.T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54:468–488, 1984.
- [20] Y. Maday and A.T. Patera. Spectral element methods for the incompressible navier-stokes equations. In *State-of-the-art surveys on computational mechanics*, pages 71–143. New York, 1989.
- [21] G.E Karniadakis. Spectral element simulations of laminar and turbulent flows in complex geometries. *Applied Numerical Mathematics*, 6(1):85 – 105, 1989.
- [22] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 177:133–166, 1987.
- [23] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer, 1988.
- [24] G.C. Cohen. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [25] J.D. De Basabe and M.K. Sen. Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, 72(6), 2007.
- [26] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Springer, 2007.
- [27] J.P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods: Second Revised Edition*. Dover Publications, 2 edition, 2001.
- [28] D. Komatitsch, S. Tsuboi, and J. Tromp. The spectral-element method in seismology. In *Seismic Earth: Array Analysis of Broadband Seismograms*, pages 205–227. American Geophysical Union, 2013.
- [29] D. Komatitsch and J. P. Vilotte. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88:368–392, 1998.
- [30] S. Gopalakrishnan, A. Chakraborty, and D. R. Mahapatra. *Spectral Finite Element Method: Wave Propagation, Diagnostics and Control in Anisotropic and Inhomogeneous Structures*. Springer, 2007.

- [31] L. Zheng, Q. Zhao, B. Milkereit, G. Grasselli, and Q. Liu. Spectral-element simulations of elastic wave propagation in exploration and geotechnical applications. *Earthquake Science*, 27(2):179–187, 2014.
- [32] J.E.A. Silva, F.S. Loureiro, and W.J. Mansur. Improving time stability constraints for the spectral finite element method in acoustic wave propagation numerical simulations. *Mecánica Computacional*, XXXIII, 2014.
- [33] D. Komatitsch, Q. Liu, J. Tromp, P. Süß, C. Stidham, and J.H. Shaw. Simulations of ground motion in the los angeles basin based upon the spectral-element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(1):187–206, 2004.
- [34] E. Delavaud, Jean-Pierre Vilotte, G. Festa, and P. Cupillard. 3d spectral element method simulations of the seismic response of caracas (venezuela) basin. In *AGU Fall Meeting Abstracts*. 12 2007.
- [35] Q. Liu, Y. Yu, and X. Zhang. Three-dimensional simulations of strong ground motion in the shidian basin based upon the spectral-element method. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 14:385–398, 2015.
- [36] Y. Yu, H. Ding, and Q. Liu. Three-dimensional simulations of strong ground motion in the sichuan basin during the wenchuan earthquake. *Bulletin of Earthquake Engineering*, pages 1–19, 05 2017.
- [37] S. Hedayatrasa, T.Q. Bui, C. Zhang, and C.W. Lim. Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral chebyshev elements. *Journal of Computational Physics*, 258:381 – 404, 2014.
- [38] M. Hong and U. Lee. Dynamics of a functionally graded material axial bar: Spectral element modeling and analysis. *Composites Part B: Engineering*, 69:427 – 434, 2015.
- [39] J.E.A. Silva, F.S. Loureiro, and W.J. Mansur. Application of the spectral finite element method for elastic wave propagation problems in functionally graded materials. In *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2015.
- [40] M. Joulaiian, S. Duczek, U. Gabbert, and A. Düster. Finite and spectral cell method for wave propagation in heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 54(3):661–675, 2014.
- [41] E.T. Chung and T.F. Yu. Staggered-grid spectral element methods for elastic wave simulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 285:132 – 150, 2015.
- [42] N. Liu, Y. Tang, X. Zhu, L. Tobón, and Q. Liu. Higher-order mixed spectral element method for maxwell eigenvalue problem. In *2013 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*, pages 1646–1647, 2013.
- [43] A. Huppe and M. Kaltenbacher. Advanced spectral finite element method for computational acoustics in the mid-frequency range. In *Proceedings of ISMA2010 including USD2010*, 2010.

- [44] A. Huppe, G. Cohen, S. imperiale, and M. Kaltenbacher. Construction and analysis of an adapted spectral finite element method to convective acoustic equations. *Communications in Computational Physics*, 2016.
- [45] F. Ben Belgacem, P. Hild, and P. Laborde. The mortar finite element method for contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4–8):263 – 271, 1998.
- [46] F. Ben Belgacem and Y. Maday. Coupling spectral and finite elements for second order elliptic three-dimension equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 36(4):1234–1263, 1999.
- [47] C. Bernardi, N. Debi, and Y. Maday. Coupling finite element and spectral methods: First results. *Mathematics of Computation*, 54(189):21–39, 1990.
- [48] F. Casadei, E. Gabellini, G. Fotia, F. Maggio, and A. Quarteroni. A mortar spectral/finite element method for complex 2D and 3D elastodynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(45):5119–5148, 2002.
- [49] B. Flemisch, M. Kaltenbacher, and B. I. Wohlmuth. Elasto–acoustic and acoustic–acoustic coupling on non-matching grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(13):1791–1810, 2006.
- [50] J.E.A. Silva and F.S. Loureiro. An efficient fem-sfem iterative coupling procedure for elastodynamic problems. *Mecánica Computacional*, XXXV, 2017.
- [51] A.C. Verkaik. *Coupling spectral and finite elements for fluid-structure interaction*. Ph.d. thesis, Eindhoven University of Technology, 2015.
- [52] P.A. Thompson. *Compressible Fluid Dynamics*. McGraw-Hill Education, New York, 1972.
- [53] D.D. Reynolds. *Engineering principles of acoustics: Noise and vibration control*. Allyn & Bacon Inc., Boston, 1981.
- [54] F. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education, 2015.
- [55] K.F. Graff. *Wave motion in elastic solid*. Dover Publications, New York, 1991.
- [56] W.M. Lai, D.H. Rubin, D. Rubin, and E. Krempel. *Introduction to Continuum Mechanics*. Elsevier Science, 4 edition, 2009.
- [57] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2 edition, 2003.
- [58] T.J.R. Hughes. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, New York, 2000.
- [59] B.A. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. Wiley, 1991.
- [60] E. Rank, M. Rücker, A. Düster, and H. Bröker. The efficiency of the p-version finite element method in a distributed computing environment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(5-6):589–604, 2001.
- [61] B.A. Szabó and I. Babuška. *Introduction to Finite Element Analysis*. Wiley, 2011.

- [62] D. Komatitsch and J. Tromp. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, 139(3):806–822, 1999.
- [63] C. Canuto, Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Springer, 2006.
- [64] R.D. Cook. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, New York, 1981.
- [65] G.R. Liu. On partitions of unity property of nodal shape functions: Rigid-body-movement reproduction and mass conservation. *International Journal of Computational Methods*, 13:1640003–1640016, 2016.
- [66] P. Šolín, K. Segeth, and I. Doležal. *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [67] G.E. Karniadakis and S.J. Sherwin. *Spectral/hp Element Methods for CFD*. Oxford University Press, New York, 2005.
- [68] K.J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [69] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, and R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3):283–292, 1977.
- [70] L. Godinho, C. Dors, D. Soares, and P. Amado-Mendes. Solution of time-domain acoustic wave propagation problems using a rbf interpolation model with "a priori" estimation of the free parameter. *Wave Motion*, 48:423–440, 2011.
- [71] G.C.S Costa, J.E.A. Silva, and F.S. Loureiro. Aplicação do método de elementos finitos espectral em problemas de propagação de ondas em 2d. In *Anais do SIM-MEC/EMMCOMP 2014*, 2014.
- [72] D.C. Thompson, P.P. Pebay, R.H. Crawford, and R.V. Khardekar. Visualization of higher order finite elements. Technical report, Sandia National Laboratories, 2004.
- [73] M. Üffinger, S. Frey, and T. Ertl. Interactive high-quality visualization of higher-order finite elements. In *Computer Graphics Forum*, volume 29, pages 337–346. Wiley Online Library, 2010.
- [74] W.J. Mansur, J.A.M. Carrer, and P.E. Oyarzún. Time-domain bem techniques. In H. Aliabadi and P.H. Wen, editors, *Boundary Element Methods in Engineering and Sciences*, pages 51–75. 2011.
- [75] J. Dominguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton, 1993.
- [76] W.J. Mansur. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. PhD thesis, University of Southampton, England, 1983.
- [77] E.F. Fontes Jr, J.A.F. Santiago, and J.C.F. Telles. An iterative coupling between meshless methods to solve embedded crack problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 55:52 – 57, 2015.

- [78] D. Soares Jr., G.G. Rodrigues, and K.A. Gonçalves. An efficient multi-time-step implicit–explicit method to analyze solid–fluid coupled systems discretized by unconditionally stable time-domain finite element procedures. *Computers & Structures*, 88(5–6):387 – 394, 2010.
- [79] D. Soares Jr. Coupled numerical methods to analyze interacting acoustic-dynamic models by multidomain decomposition techniques. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011:28, 2011.
- [80] J. Lysmer and R. L. Kuhlemeyer. Finite-dynamic model for infinite media. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 95(4):859–877, 1969.
- [81] D. Soares Jr, O. von Estorff, and W. J. Mansur. Efficient non-linear solid–fluid interaction analysis by an iterative BEM/FEM coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(11):1416–1431, 2005.
- [82] O. von Estorff and H. Antes. On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analyses in the time domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(6):1151–1168, 1991.
- [83] D. Soares and L.C. Wrobel. A coupled BEM/FEM formulation for drop interaction in stokes flows with flexible and slip confining boundaries. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 77:112 – 122, 2017.