

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Filipe Mateus e Silva Rodrigues**

**Estimação de Estados usando o Método Holomórfico  
com base em Medições Fasoriais Sincronizadas**

Juiz de Fora

2026

**Filipe Mateus e Silva Rodrigues**

**Estimação de Estados usando o Método Holomórfico  
com base em Medições Fasoriais Sincronizadas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área: Sistemas de Energia Elétrica.

Orientador: Prof. Igor Delgado de Melo, Dr.

Coorientador: Prof. Bráulio César de Oliveira, Dr.

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rodrigues, Filipe M. S..

Estimação de Estados usando o Método Holomórfico  
com base em Medições Fasoriais Sincronizadas / Filipe Mateus e Silva  
Rodrigues. – 2026.

102 p. : il.

Orientador: Igor Delgado de Melo

Coorientador: Bráulio César de Oliveira

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade  
de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2026.

1. Método Holomórfico. 2. Estimação de Estados. 3. PMU.  
I. de Melo, Delgado, orient. II. Bráulio C. de Oliveira, coorient. III. Título.

**Filipe Mateus e Silva Rodrigues**

**Estimação de Estados usando o Método Holomórfico com base em Medições Fasoriais Sincronizadas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas de Energia Elétrica

Aprovada em 05 de março de 2026.

BANCA EXAMINADORA

**Prof. Dr. Igor Delgado de Melo** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Bráulio César de Oliveira** - Coorientador

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Prof. Dr. Anselmo Barbosa Rodrigues**

Universidade Federal do Maranhão

**Prof. Dr. João Alberto Passos Filho**

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 28/01/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Igor Delgado de Melo, Professor(a)**, em 05/03/2026, às 11:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joao Alberto Passos Filho, Professor(a)**, em 05/03/2026, às 11:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bráulio César de Oliveira, Usuário Externo**, em 05/03/2026, às 11:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Anselmo Barbosa Rodrigues, Usuário Externo**, em 05/03/2026, às 12:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2844447** e o código CRC **E05D1C3E**.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus por ser meu guia durante toda a jornada de aprendizado que culminou na elaboração desta pesquisa. Tenho plena certeza de que estaremos juntos nos próximos desafios que surgirem em minha vida.

Agradeço em especial também aos meus pais, Jorge Rodrigues e Lilian Cristina. Agradeço por sempre me incentivarem aos estudos, pois, se não fosse por eles, eu não seria o que sou hoje.

Agradeço ao meu orientador, Igor Delgado, por todo o seu apoio, dedicação e empenho nesta pesquisa, sem sua ajuda, eu não poderia finalizá-la. Agradeço pela amizade que construímos ao longo de todo esse período e que pretendo levar para além das portas da universidade.

Deixo meu agradecimento também ao meu coorientador, Bráulio César, pelo apoio, pela disponibilidade e pelas valiosas contribuições ao longo desta pesquisa.

Aos amigos do Núcleo de Pesquisa em Sistemas Elétricos de Potência (NUPESP), pelo companheirismo, apoio e boas risadas.

À Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPEE), pela notória excelência no ensino.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), ao Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Energia Elétrica (INERGE) e ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), pelo apoio financeiro e por sempre acreditarem no desenvolvimento científico do país.

A todos os amigos e familiares que não pude mencionar, deixo meu muito obrigado.

*Lâmpada para os meus pés é tua palavra, e luz para o  
meu caminho*

(Salmos 119:105)

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma nova técnica para a resolução do problema de estimação de estados em sistemas elétricos de potência, denominada *Holomorphic Embedding State Estimation Method* (HESEM), a qual, em livre tradução, corresponde ao título desta dissertação de mestrado. Na abordagem denominada Estimação de Estados utilizando o Método Holomórfico, diferentes tipos de medições podem ser empregados, incluindo medições provenientes de *Phasor Measurement Units* (PMUs).

No método proposto, as equações algébricas que descrevem a operação da rede elétrica são formuladas em função das tensões fasoriais a serem estimadas em cada barra do sistema. Essas equações são, então, transformadas em expressões holomórficas a partir da introdução de uma variável complexa auxiliar, a qual garante que as equações admitam derivadas analíticas em todo o domínio dos números complexos. Em seguida, cada uma das tensões nodais do sistema são representadas como a soma de múltiplos termos de uma série de Maclaurin. Esses termos são determinados sequencialmente por meio de uma metodologia recursiva, na qual cada termo de ordem  $n$  é obtido a partir do cálculo do termo de ordem  $n - 1$ .

Para garantir a unicidade da solução com um número reduzido de termos calculados, emprega-se um processo matemático conhecido como continuação analítica, usando Aproximantes de Padé, permitindo expandir o raio de convergência de uma série numérica complexa a partir do cálculo de uma quantidade reduzida de termos da série original.

Dentre as vantagens do HESEM destaca-se sua capacidade de resolver as equações da estimação de estados por meio de uma técnica não iterativa, garantindo a unicidade da solução e exigindo menor tempo computacional quando comparado aos métodos tradicionais, como o critério dos Mínimos Quadrados Ponderados (MQP). Adicionalmente, as variáveis de estado são compostas por fasores de tensão expressos em coordenadas retangulares e, diferentemente das abordagens baseadas em soluções iterativas, nas quais uma matriz Jacobiana contendo múltiplas derivadas deve ser recalculada a cada iteração, no HESEM a matriz correspondente é única e permanece inalterada ao longo de todo o processo de solução.

Simulações computacionais são realizadas em diferentes sistemas de teste com o objetivo de comprovar a viabilidade e a efetividade do método proposto. Os sistemas-teste clássicos de 14 e 33 barras são utilizados para demonstrar a aplicabilidade do HESEM, enquanto um equivalente do sistema de transmissão brasileiro contendo 107 barras é empregado para avaliar o desempenho do algoritmo e verificar sua escalabilidade.

**Palavras-chave:** Estimação de estado. *Phasor Measurement Unit*. Sistemas de potência. Fluxo de potência. Aproximantes de Padé. Funções holomorfas.

## ABSTRACT

This work introduces the *Holomorphic Embedding State Estimation Method* (HESEM), a new technique for state estimation in electric power systems. It supports different measurement types, including data from *Phasor Measurement Units* (PMUs).

The approach formulates the algebraic equations that describe network operation directly in terms of the bus voltage phasors to be estimated. These equations are then converted into holomorphic expressions by introducing an auxiliary complex variable, which ensures the resulting functions are analytically differentiable over the complex domain. Next, all nodal voltages are represented as a sum of terms in a Maclaurin series. The series coefficients are computed sequentially through a recursive procedure: each term of order  $n$  is obtained from the term of order  $n - 1$ .

To obtain a unique solution while computing only a limited number of terms, the method applies analytic continuation using Padé approximants, which effectively enlarges the convergence region of a complex series from a reduced set of Maclaurin coefficients.

Among the main advantages of HESEM is its constructive, non-iterative solution process, which ensures uniqueness and can reduce computational time when compared to traditional approaches such as *Weighted Least Squares* (WLS). In addition, the state variables are expressed as voltage phasors in rectangular coordinates. Unlike iterative methods, where a Jacobian matrix with multiple derivatives must be recomputed at every iteration, HESEM relies on a single matrix that remains unchanged throughout the entire solution procedure.

The feasibility and effectiveness of the proposed method are validated through simulations on different test systems. The classic IEEE 14-bus and IEEE 33-bus networks illustrate the applicability of HESEM, while a 107-bus equivalent of the Brazilian transmission system is used to assess performance and scalability.

**Keywords:** State estimation. Phasor Measurement Unit. Power systems. Load flow. Padé approximants. Holomorphic functions.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Linha do tempo de contribuições relacionadas à Estimação de Estados. . . . .	30
Figura 2	– Linha do tempo de contribuições relacionadas ao HELM. . . . .	50
Figura 3	– Fluxograma da metodologia proposta. . . . .	71
Figura 4	– Diagrama unifilar sistema tutorial. . . . .	73
Figura 5	– Diagrama unifilar do sistema IEEE 14 barras. . . . .	79
Figura 6	– Magnitude das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 1. . . . .	81
Figura 7	– Ângulo das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 1. . . . .	81
Figura 8	– Magnitude das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 2. . . . .	82
Figura 9	– Ângulo das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 2. . . . .	82
Figura 10	– Diagrama unifilar do sistema IEEE 33 barras. . . . .	83
Figura 11	– Magnitude das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 1. . . . .	85
Figura 12	– Ângulo das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 1. . . . .	85
Figura 13	– Magnitude das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 2. . . . .	86
Figura 14	– Ângulo das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 2. . . . .	87
Figura 15	– Diagrama unifilar do sistema teste brasileiro de 107 barras. . . . .	88
Figura 16	– Magnitude das tensões no sistema teste brasileiro de 107 barras. . . . .	89
Figura 17	– Ângulo das tensões no sistema teste brasileiro de 107 barras. . . . .	90

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Equações clássicas e holomórficas segundo o tipo de medição. . . . .	55
Tabela 2 – Resumo das condições germinais das funções holomorfas. . . . .	60
Tabela 3 – Dados de barra — sistema tutorial. . . . .	73
Tabela 4 – Dados de linha — sistema tutorial. . . . .	74
Tabela 5 – Plano de medições — sistema tutorial. . . . .	74
Tabela 6 – Solução germinal — sistema tutorial. . . . .	75
Tabela 7 – Resultado da primeira recursão — sistema tutorial. . . . .	76
Tabela 8 – Recíproco das tensões estimadas — segunda recursão — sistema tutorial. . . . .	76
Tabela 9 – Resultado da segunda recursão — sistema tutorial. . . . .	77
Tabela 10 – Recíproco das tensões estimadas — terceira recursão — sistema tutorial. . . . .	77
Tabela 11 – Resultado da terceira recursão — sistema tutorial. . . . .	78
Tabela 12 – Tensões estimadas — sistema tutorial. . . . .	78
Tabela 13 – Plano de medição - sistema IEEE 14 barras - cenário 1. . . . .	80
Tabela 14 – Plano de medição - sistema IEEE 14 barras - cenário 2. . . . .	82
Tabela 15 – Plano de medição - sistema IEEE 33 barras - cenário 1. . . . .	84
Tabela 16 – Plano de medição - sistema IEEE 33 barras - cenário 2. . . . .	86
Tabela 17 – Plano de medição - sistema teste brasileiro de 107 barras. . . . .	91
Tabela 18 – Comparação entre o HESEM e o MQP - sistema IEEE 14 barras. . . . .	92
Tabela 19 – Comparação entre o HESEM e o MQP - sistema IEEE 33 barras. . . . .	92
Tabela 20 – Comparação entre o HESEM e o MQP - sistema de 107 barras. . . . .	92

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<b>EBP</b>	Equação de Balanço de Potência
<b>EPAM</b>	Erro Percentual Absoluto Médio
<b>FACTS</b>	Sistema de Transmissão CA Flexível
<b>FDP</b>	Função Densidade de Probabilidade
<b>GPS</b>	Global Positioning System
<b>HELM</b>	<i>Holomorphic Embedding Load-flow Method</i>
<b>HESEM</b>	<i>Holomorphic Embedding State Estimation Method</i>
<b>HVDC</b>	<i>High Voltage Direct Current</i>
<b>IEEE</b>	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
<b>MQP</b>	Mínimos Quadrados Ponderados
<b>PMU</b>	<i>Phasor Measurement Unit</i>
<b>SCADA</b>	<i>Supervisory Control and Data Acquisition</i>
<b>SEP</b>	Sistema Elétrico de Potência
<b>WLS</b>	<i>Weighted Least Squares</i>

## LISTA DE SÍMBOLOS

$z_i$	Medição genérica coletada do sistema
$\sigma_i$	Desvio padrão associado à $i$ -ésima medição
$\hat{\mathbf{x}}$	Vetor que reúne todas as variáveis de estado do problema
$\phi_i(\hat{\mathbf{x}})$	Função que relaciona as variáveis de estado à $i$ -ésima medição na estimação de estados clássica
$\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$	Vetor que reúne todas as funções $\phi_i(\hat{\mathbf{x}})$
$\mathbf{z}$	Vetor que reúne todas as medições coletadas do sistema
$\mathbf{R}$	Matriz de covariância
$\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}})$	Matriz Jacobiana das medições na estimação de estados clássica
$J(\hat{\mathbf{x}})$	Função objetivo da estimação de estados
$Y_{ik}^{tr}$	Elemento “ $i$ ”, “ $k$ ” da matriz de admitância nodal
$G_{ik}$	Elemento “ $i$ ”, “ $k$ ” da matriz de condutância nodal
$B_{ik}$	Elemento “ $i$ ”, “ $k$ ” da matriz de susceptância nodal
$Y_i^{sh}$	Admitância <i>shunt</i> conectada à barra “ $i$ ”
$y_{km}$	Admitância que conecta das barras “ $k$ ” e “ $m$ ”
$g_{km}$	Condutância que conecta das barras “ $k$ ” e “ $m$ ”
$y_{km}$	Susceptância que conecta das barras “ $k$ ” e “ $m$ ”
$b_{km}^{sh}$	Susceptância <i>shunt</i> associada a linha que conecta as barras “ $k$ ” e “ $m$ ”
$a_{km}$	Tap do transformador presente entre as barras “ $k$ ” e “ $m$ ”
$V_i^{esp}$	Tensão fasorial especificada na barra “ $i$ ”
$P_i^{esp}$	Potência ativa especificada na barra “ $i$ ”
$Q_i^{esp}$	Potência reativa especificada na barra “ $i$ ”
$S_i^{esp}$	Potência aparente especificada na barra “ $i$ ”
$\mathbf{N}$	Conjunto contendo todas as barras do sistema
$\mathbf{V}\theta$	Conjunto unitário contendo a barra de referência do sistema
$\mathbf{PQ}$	Conjunto contendo todas as barras de carga do sistema
$\mathbf{PV}$	Conjunto contendo todas as barras de geração do sistema
$\alpha$	Variável complexa de incorporação holomórfica
$V_i$	Tensão fasorial na barra “ $i$ ”
$V_i(\alpha)$	Função holomorfa que representa o valor da tensão fasorial na barra “ $i$ ” no ponto $\alpha = 1$
$V_i[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $V_i(\alpha)$
$W_i$	Inverso do valor da tensão fasorial na barra “ $i$ ”
$W_i(\alpha)$	Função holomorfa que representa o valor do inverso da tensão fasorial na barra “ $i$ ” no ponto $\alpha = 1$
$W_i[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $W_i(\alpha)$
$Q_i(\alpha)$	Função holomorfa que representa o valor da potência reativa líquida em uma barra de geração “ $i$ ” no ponto $\alpha = 1$
$Q_i[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $Q_i(\alpha)$

$\mathbf{Y}_{\text{rec}}$	Matriz de recursão do <i>Holomorphic Embedding Load-flow Method</i> (HELM) contendo elementos de admitâncias do sistema.
$\mathbf{Y}_{\text{pv}}$	Matriz cujo as colunas contem as admitâncias das interconexões de uma barra de geração “ $i$ ” com o restante das barras do sistema
$\mathbf{V}^{\text{re}}[n]$	Vetor contendo os valores $V_i^{\text{re}}[n] \in \mathbf{PV}$
$\mathbf{y}[n]$	Vetor que agrupa os termos que dependem apenas de parâmetros conhecidos do sistema e de coeficientes das expansões em séries calculados em ordens anteriores (ordem $n - 1$ )
$\bar{V}_k$	Tensão fasorial medida na barra “ $k$ ”
$W_k$	Inverso do valor da tensão fasorial medida na barra “ $k$ ”
$\bar{S}_k$	Potência aparente medida na barra “ $k$ ”
$\bar{S}_{km}$	Fluxo de potência medido no ramo “ $k$ ”, “ $m$ ”
$\bar{I}_{km}$	Corrente medida no ramo “ $k$ ”, “ $m$ ”
$\Omega_{S_k}$	Conjunto das barras com medição de potência
$\Omega_{S_{km}}$	Conjunto de ramos com medição de fluxo de potência
$\Omega_{I_{km}}$	Conjunto de ramos com medição de corrente
$\Omega_{V_k}$	Conjunto de barras com medição de tensão
$\hat{V}_k$	Tensão fasorial estimada na barra “ $k$ ”
$\hat{V}_k(\alpha)$	Função holomorfa que representa o valor da tensão fasorial estimada na barra “ $k$ ” no ponto $\alpha = 1$
$\hat{V}_k[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $\hat{V}_k(\alpha)$
$\hat{W}_k(\alpha)$	Função holomorfa que representa o valor do inverso da tensão fasorial na barra “ $k$ ” no ponto $\alpha = 1$
$\hat{W}_k[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $\hat{W}_k(\alpha)$
$S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$	Função holomorfa auxiliar usada para dar consistência matemática às equações de medição de fluxo de potência no ramo “ $k$ ”, “ $m$ ”. Se anula em $\alpha = 1$
$S_{km}^{\text{incr}}[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$
$I_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$	Função holomorfa auxiliar usada para dar consistência matemática às equações de medição de corrente no ramo “ $k$ ”, “ $m$ ”. Se anula em $\alpha = 1$
$I_{km}^{\text{incr}}[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin da função $I_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$
$\mathbf{H}$	Matriz constante formadas por elementos de admitâncias retirados da matriz de admitância nodal
$\mathbf{h}[n - 1]$	Vetor que reúne os cálculos realizados com as medições e valores de $W$ e $V$ calculados em recursões anteriores
$\mathbf{r}(\alpha)$	Vetor de resíduos calculado em funções de $\alpha$
$\mathbf{r}[n]$	$N$ -ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin das funções holomorfas que compõem o vetor $\mathbf{r}(\alpha)$
$p_k(\alpha)$	Função holomorfa do numerador da fração parcial dos aproximantes de Padé da função $V_k(\alpha)$

$p_k[n]$	N-ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin das função holomorfas $p_k(\alpha)$
$L$	grau do numerador da expansão dos da fração parcial dos Aproximantes de Padé
$q_k(\alpha)$	Função holomorfa do denominador da fração parcial dos aproximantes de Padé da função $V_k(\alpha)$
$q_k[n]$	N-ésimo termo da expansão em séries de Maclaurin das função holomorfas $q_k(\alpha)$
$D$	grau do denominador da expansão dos da fração parcial dos Aproximantes de Padé

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO . . . . .	15
1.2	MOTIVAÇÕES . . . . .	17
1.3	OBJETIVOS . . . . .	19
1.4	PUBLICAÇÕES DECORRENTES . . . . .	20
1.5	ESTRUTURAÇÃO DO DOCUMENTO . . . . .	20
<b>2</b>	<b>ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS ELÉTRICOS: FUNDAMENTOS E ESTADO DA ARTE . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1	ESTIMAÇÃO DE ESTADOS . . . . .	22
2.1.1	Mínimos Quadrados Ponderados . . . . .	23
2.1.2	Revisão de Metodologias para Estimação de Estados . . . . .	24
2.2	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	32
<b>3</b>	<b>MÉTODO HOLOMÓRFICO PARA O FLUXO DE POTÊN- CIA: FUNDAMENTOS E ESTADO DA ARTE . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1	MÉTODO HOLOMÓRFICO . . . . .	33
3.1.1	Incorporação holomórfica . . . . .	34
3.1.1.1	<i>Barra de carga</i> . . . . .	34
3.1.1.2	<i>Barra de geração</i> . . . . .	34
3.1.1.3	<i>Barra de referência</i> . . . . .	35
3.1.2	Séries de MacLaurin . . . . .	35
3.1.2.1	<i>Solução germinal</i> . . . . .	35
3.1.2.2	<i>Termos de ordem superior</i> . . . . .	37
3.1.2.2.1	<i>Desenvolvimento matemático: Inverso das tensões</i> . . . . .	37
3.1.2.2.2	<i>Desenvolvimento matemático: Barra de referência</i> . . . . .	38
3.1.2.2.3	<i>Desenvolvimento matemático: Barra de carga</i> . . . . .	38
3.1.2.2.4	<i>Desenvolvimento matemático: Barra de geração</i> . . . . .	40
3.1.2.3	<i>Sistema matricial</i> . . . . .	44
3.1.3	Revisão do Método Holomórfico em Análise de Redes Elétricas	46
3.2	CONCLUSÕES PARCIAIS . . . . .	51
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA PROPOSTA . . . . .</b>	<b>52</b>
4.1	ESTIMADOR DE ESTADOS HOLOMÓRFICO . . . . .	52
4.1.1	Modelagem matemática das medições . . . . .	53
4.1.2	Incorporação holomórfica no modelo de medição . . . . .	54
4.1.3	Séries de Maclaurin . . . . .	55
4.1.3.1	<i>Solução germinal</i> . . . . .	56
4.1.3.1.1	<i>Solução germinal: medições de tensão</i> . . . . .	56
4.1.3.1.2	<i>Solução germinal: medições de potência</i> . . . . .	56

4.1.3.1.3	<i>Solução germinal: medições de fluxo de potência</i>	57
4.1.3.1.4	<i>Solução germinal: medições de corrente em ramos</i>	59
4.1.3.2	<i>Termos de ordem superior</i>	60
4.1.3.2.1	<i>Desenvolvimento matemático: medição de tensão</i>	60
4.1.3.2.2	<i>Desenvolvimento matemático: medição de potência</i>	60
4.1.3.2.3	<i>Desenvolvimento matemático: medição de fluxo de potência</i>	62
4.1.3.2.4	<i>Desenvolvimento matemático: medição de corrente em ramos</i>	64
4.1.3.3	<i>Técnica de Solução Matricial Direta</i>	66
4.1.3.4	<i>Demonstração Matemática da Equação do HESEM</i>	67
4.1.3.5	<i>Continuação analítica por Aproximantes de Padé</i>	69
4.1.3.6	<i>Fluxograma</i>	70
4.1.3.7	<i>Exemplo tutorial</i>	73
4.2	CONCLUSÕES PARCIAIS	78
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>79</b>
5.1	SISTEMA IEEE 14 BARRAS	79
5.1.1	<b>Cenário 1</b>	80
5.1.2	<b>Cenário 2</b>	81
5.2	SISTEMA IEEE 33 BARRAS	83
5.2.1	<b>Cenário 1</b>	83
5.2.2	<b>Cenário 2</b>	85
5.3	SISTEMA TESTE BRASILEIRO DE 107 BARRAS	87
5.4	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O HESEM E O MQP	92
5.5	CONCLUSÕES PARCIAIS	93
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>94</b>
6.1	CONCLUSÕES	94
6.2	TRABALHOS FUTUROS	95
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>96</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho insere-se no contexto das principais metodologias empregadas na estimação de estados em Sistemas Elétricos de Potência (SEPs). Nesse tipo de sistema, a forma como o estado operativo é estimado exerce influência direta sobre as análises de rede e sobre as decisões relacionadas à operação, de modo que procedimentos inadequados podem conduzir a avaliações que não representam de forma exata as condições reais de funcionamento do sistema. Diante desse cenário, esta dissertação propõe o desenvolvimento de uma nova metodologia para a estimação de estados. Inicialmente, apresenta-se o contexto no qual a metodologia proposta se insere, em seguida, discutem-se as motivações e os objetivos que guiaram esta pesquisa. Por fim, descreve-se a organização da dissertação, oferecendo uma visão geral do conteúdo abordado em cada um dos capítulos subsequentes.

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A presença da energia elétrica em praticamente todas as atividades da sociedade faz com que a operação dos SEPs seja tratada como uma função crítica, na qual interrupções e degradações de desempenho têm impacto técnico, econômico e social. À medida que as redes se tornaram mais extensas e dinâmicas, aumentou também a necessidade de acompanhar continuamente suas condições operativas e de apoiar decisões com maior rapidez e precisão. Com isso, os centros de supervisão e controle passaram a ter papel fundamental na operação em tempo real, reunindo medições da rede e apoiando as decisões do operador. Como essas medições nem sempre são precisas e podem conter erros, torna-se necessário empregar métodos capazes de reconstruir, com confiabilidade, a condição de operação do sistema.

Nas últimas décadas, a estimação de estados passou a ocupar posição central nas rotinas de supervisão e controle de SEPs, pois é por meio dela que se reconstrói o perfil de tensões em todas as barras da rede a partir de um conjunto de medições que assegure a observabilidade do sistema (Cheng *et al.*, 2023). Em centros de operação modernos, essa tarefa é tipicamente executada em plataformas baseadas em sistemas *Supervisory Control and Data Acquisition* (SCADA). Conhecendo-se a topologia da rede e dispondo-se de grandezas medidas em campo, torna-se possível inferir o estado operativo completo do SEP monitorado (Darmis; Korres, 2024).

Nesse contexto, a formulação mais difundida para a reconstrução do estado é o método dos MQP, usualmente resolvido por algoritmos iterativos, como o método de Gauss-Newton. A ideia central consiste em minimizar a soma dos erros quadráticos ponderados entre as medições disponíveis e seus valores estimados, expressos como funções das tensões nodais do sistema (Abur; Exposito, 2004). Essa abordagem tem origem no trabalho de Fred Schweppe, que propôs o uso do MQP para estimar os fasores de tensão

nas barras do sistema, consolidando os fundamentos da formulação clássica da estimação de estados (Schweppe; Wildes, 1970).

Para que essa formulação produza resultados confiáveis, é essencial que o sistema seja observável, isto é, que exista um conjunto de medições suficiente para determinar o estado mais provável da rede, em geral descrito pelas magnitudes e ângulos de tensão em todas as barras. Em termos práticos, isso conduz ao problema de alocação de medidores. Deve-se garantir um conjunto mínimo de dispositivos instalados em barras e ramos adequados, de modo que a solução seja obtida de forma consistente e com boa qualidade numérica (Monticelli; Wu, 1986; Castillo *et al.*, 2006). Em redes de transmissão, essa condição tende a ser mais facilmente atendida devido à maior disponibilidade de medições.

Em sistemas de distribuição, entretanto, a aplicação direta de metodologias concebidas para transmissão encontra limitações importantes. Além de características como elevadas relações R/X, topologias predominantemente radiais ou fracamente malhadas, bem como susceptâncias de linha frequentemente desprezíveis, destaca-se a escassez de medições em tempo real (Oliveira *et al.*, 2018). Esse conjunto de fatores dificulta a implantação de monitoramento contínuo em redes de média tensão em larga escala, afetando particularmente a observabilidade e, por consequência, a precisão das estimativas.

Em paralelo, o cenário de medição passou por uma expansão relevante a partir da década de 1990 com o advento das tecnologias de sincrofasores. As Unidades de Medição Fasorial (do inglês *Phasor Measurement Units* (PMUs)) passaram a fornecer fasores de tensão e corrente sincronizados via Global Positioning System (GPS), com elevadas taxas de aquisição de dados, tipicamente da ordem de 2880 amostras por segundo, ampliando o conjunto de informações disponível para a estimação de estados (Phadke; Thorp, 2008). Em grande parte das formulações voltadas a redes de transmissão, esses fasores são representados em coordenadas retangulares, por meio do cálculo de suas partes real e imaginária, o que tem orientado parcela expressiva dos desenvolvimentos recentes nessa área (Oliveira *et al.*, 2018; Melo; Teixeira; Mingorança, 2023).

Ainda assim, no ambiente mais desafiador da distribuição, a falta de medições obtidas em tempo real costuma ser mitigada pela incorporação de fontes complementares de informação. Uma estratégia recorrente é o emprego de pseudomedidas obtidas a partir de dados históricos de carga, como médias de faturamento mensal, agregações de demanda em centros de carga e perfis típicos de consumo, de modo a complementar as medições convencionais. Além disso, barras com injeção nula de potência podem ser tratadas como restrições de igualdade, ou incorporadas diretamente na função objetivo do problema de estimação, contribuindo para restaurar a observabilidade da rede monitorada (Duan; Li, 2013).

Com a consolidação do conceito de redes inteligentes (*smart grids*), a infraestrutura de medição tornou-se ainda mais heterogênea. Medidores inteligentes (*smart meters*),

instalados em unidades consumidoras, passaram a disponibilizar medições de potência ativa e reativa com maior granularidade espacial, que podem ser integradas a leituras fornecidas por PMUs e por sistemas SCADA. Essa integração tem motivado arquiteturas híbridas de estimação de estados apoiadas em Infraestrutura Avançada de Medição (AMI, do inglês *Advanced Metering Infrastructure*) (Mingorança; Melo; Santos, 2023; Souza *et al.*, 2020). Nessas arquiteturas, diferentes tipos de medições são tratados de forma conjunta, respeitando suas distintas granularidades temporais.

Embora esses dispositivos apresentem diferentes taxas de amostragem, tecnologias de comunicação e níveis de precisão, o uso coordenado de seus dados permite inferir o estado mais provável da rede monitorada (Cheng *et al.*, 2023). Ademais, há evidências de que medidores inteligentes modernos também podem fornecer informações sincronizadas via GPS (Morello *et al.*, 2024; Khan; Hayes, 2020; Yadav; Biswal; Vemuganti, 2024; Khan; Hayes, 2023), o que tende a facilitar sua integração com medições fasoriais provenientes de PMUs.

## 1.2 MOTIVAÇÕES

Dentre os principais métodos matemáticos empregados para estimar o estado operativo mais provável de um sistema elétrico destacam-se os métodos iterativos, tal como o Gauss–Newton. Apesar da existência de diversas formulações alternativas, considerando diferentes escolhas de variáveis de estado em coordenadas polares ou retangulares, abordagens baseadas em otimização, métodos desacoplados e estimadores lineares, as técnicas mais amplamente difundidas permanecem sendo aquelas fundamentadas em processos iterativos. Tais métodos dependem da inicialização das variáveis de estado e podem conduzir à obtenção de múltiplas soluções para o problema de estimação de estados.

As limitações associadas à convergência, à dependência das condições iniciais e à existência de múltiplas soluções são amplamente reconhecidas na literatura, afetando algoritmos rotineiramente empregados em centros de controle, tanto em aplicações de estimação de estados quanto de fluxo de potência.

Nesse contexto, o desenvolvimento do método *Holomorphic Embedding Load-flow Method* (HELM), proposto em 2012, evidenciou que o problema de fluxo de potência pode ser resolvido por meio de um procedimento essencialmente não iterativo, fundamentado em conceitos avançados da análise de números complexos (Trias, 2012). Nessa abordagem, as equações algébricas do fluxo de potência são reformuladas de modo a constituírem funções holomorfas de uma variável complexa auxiliar, permitindo a construção da solução e assegurando a unicidade do estado obtido (Trias, 2018; Domínguez; Echavarren; Rouco, 2024; Lima; Melo; Filho, 2024).

De forma sucinta, uma função holomorfa é uma função de uma ou mais variáveis complexas que é complexamente diferenciável em todo o domínio considerado. Em

particular, quando essa função pode ser decomposta em partes real e imaginária com derivadas bem definidas, essa condição é equivalente ao atendimento das relações de Cauchy–Riemann (Trias, 2018).

Ao introduzir uma variável de incorporação holomórfica nas equações do fluxo de potência, os fasores de tensão em cada barra passam a ser representados por séries de Maclaurin em função dessa variável complexa, cujos coeficientes são calculados recursivamente, termo a termo. Em seguida, técnicas de continuação analítica, em particular os aproximantes de Padé, são empregadas para ampliar o raio de convergência das séries e reduzir o número de termos necessários no processo de cálculo (Trias, 2018), aumentando a eficiência computacional e reduzindo o tempo de execução dos algoritmos.

Como consequência direta dessa formulação, o HELM dispensa explicitamente o uso de matrizes Jacobianas e a definição de condições iniciais para as variáveis de estado. A trajetória da solução é construída ao longo do próprio processo de incorporação holomórfica, e o ponto operativo é obtido de maneira não iterativa (Trias, 2012; Domínguez; Echavarren; Rouco, 2024; Lima; Melo; Filho, 2024). Essas características conferem ao método propriedades relevantes de robustez numérica e garantia de unicidade da solução no contexto do fluxo de potência. Entretanto, até onde alcança a literatura consultada, funções holomorfas ainda não foram exploradas de forma sistemática no problema de estimação de estados, seja em formulações baseadas exclusivamente em medições convencionais de sistemas SCADA, seja em arranjos híbridos que combinam tais medições com fasores sincronizados provenientes de PMUs.

Apesar da existência dessa alternativa não iterativa, a prática corrente em estimação de estados permanece amplamente dominada por métodos numéricos iterativos. Tanto no fluxo de potência quanto na estimação de estados, esses métodos são implementados por meio da solução sucessiva de sistemas de equações não lineares, a partir de um valor inicial para o vetor de variáveis de estado, recorrendo a linearizações locais e ao cálculo de derivadas para a construção de matrizes Jacobianas (Tamura; Mori; Iwamoto, 1983; Thorp; Naqavi, 1997; Yorino; Harada; Cheng, 1997). Em determinadas condições de operação, especialmente em situações de mau condicionamento numérico ou em sistemas próximos ao carregamento máximo, essas matrizes podem tornar-se mal condicionadas ou até singulares, comprometendo a convergência dos algoritmos e a robustez da solução numérica obtida (Deng; Chiang, 2013; Abur; Exposito, 2004).

Para além das questões relacionadas à convergência, a própria estrutura do espaço de soluções do problema de estimação de estados configura um desafio adicional. Na formulação clássica baseada no método dos MQP, bem como em variantes mais recentes, podem surgir múltiplas soluções matematicamente admissíveis, sobretudo quando um número elevado de pseudomedidas de carga é incorporado ao modelo (Abur; Exposito, 2004; Abur; Expósito, 1997; Yilmaz; Abur, 2024). Nessas circunstâncias, a garantia de

unicidade da solução estimada torna-se particularmente difícil.

Sob uma visão mais ampla de operação e monitoramento, tais limitações numéricas e estruturais contrastam com o cenário atual de medição em SEPs. Observa-se um avanço grande no desenvolvimento de estimadores de estado baseados em arquiteturas híbridas, que integram medições fasoriais provenientes de PMUs, medições convencionais de sistemas SCADA e leituras de medidores inteligentes, explorando de forma conjunta o potencial dessas diferentes tecnologias (Cheng *et al.*, 2023). Esse contexto reforça a demanda por métodos de estimação de estados que aliem baixo custo computacional, estabilidade numérica e capacidade de integrar, de maneira coerente, o conjunto diversificado de medições atualmente disponível, de modo a embasar aplicações de monitoramento em tempo real e apoiar a avaliação da segurança e da estabilidade de SEPs.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é propor, desenvolver e avaliar uma nova metodologia para a estimação de estados em SEPs, denominada *Holomorphic Embedding State Estimation Method* (HESEM). A abordagem é formulada para o problema de estimação de estados e utiliza o formalismo do HELM, originalmente empregado em fluxo de potência, como base matemática. Nesta proposta, o HELM fornece as equações de suporte, enquanto a HESEM define o procedimento de estimação adotado. Espera-se que a metodologia proposta desempenhe um papel relevante no avanço das técnicas de estimação de estados em SEPs e, como consequência, contribua para a melhoria da eficiência e da segurança da operação de sistemas elétricos.

Para atingir o objetivo geral deste trabalho, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Propor e validar matematicamente a incorporação holomórfica das equações de estimação de estados associadas às medições coletadas do sistema, as quais são descritas em função das variáveis de estado;
- Implementar computacionalmente o método proposto utilizando o *software* MATLAB;
- Aplicar o método proposto à estimação de estados em sistemas teste de transmissão, de distribuição clássicos e em sistemas de maior porte, como o sistema equivalente brasileiro de 107 barras;
- Comparar os resultados obtidos pelo método proposto com aqueles fornecidos pelo método dos MQP iterativo, tradicionalmente empregado na resolução do problema de estimação de estados.

## 1.4 PUBLICAÇÕES DECORRENTES

A principal contribuição desta dissertação consiste no desenvolvimento da metodologia de estimação de estados em SEPs resolvida pelo método holomórfico. As pesquisas desenvolvidas nesse contexto resultaram na elaboração e publicação dos trabalhos apresentados a seguir. O trabalho atualmente submetido e em revisão por pares está destacado em cinza:

- **Rodrigues, F. M.;** de Melo, I. D.; de Oliveira, B. C.; Falcão, D. M. *Recursively Re-weighted Holomorphic Embedding State Estimation Method for Bad Data Suppression*. Submetido à *IEEE Transactions on Power Systems*, 2026.
- **Rodrigues, F. M. e S.;** de Melo, I. D.; de Oliveira, B. C.; Falcão, D. M. *Holomorphic Embedding State Estimation Method using Phasor Measurement Units*. *IEEE Transactions on Power Systems* 2025.
- **Rodrigues, F. M. e S.;** de Melo, I. D.; de Oliveira, B. C. Método para Controle de Tensão em Barras Remotas usando o Fluxo de Potência Holomórfico. In: SBA. *Anais do XI Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos*, 2025. São João Del Rei, 2025.
- **Rodrigues, F. M. e S.;** de Melo, I. D.; de Oliveira, B. C. Análise da Estabilidade de Tensão em Redes de Distribuição: uma abordagem considerando o Fluxo de Potência Holomórfico. In: SBA. *Anais do XXV Congresso Brasileiro de Automática*, 2024. Rio de Janeiro, 2024.
- **Rodrigues, F. M. e S.;** de Melo, I. D.; Lima, G. R. S. Análise fractal das múltiplas soluções do fluxo de potência em sistemas elétricos. In: SBQEE. *Anais da XV Conferência Brasileira sobre Qualidade da Energia Elétrica*, 2023. São Luís, 2023.

## 1.5 ESTRUTURAÇÃO DO DOCUMENTO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, conforme descrito a seguir:

- **Capítulo 1: Introdução**

O primeiro capítulo desta dissertação é dedicado à contextualização da técnica de estimação de estados aplicada aos SEPs. Nele, apresenta-se a metodologia mais difundida na literatura, bem como suas limitações de convergência, aspecto que motivou o desenvolvimento deste trabalho. Por fim, são descritos os objetivos da dissertação e as principais contribuições científicas resultantes do processo de desenvolvimento deste documento.

- **Capítulo 2: Estimação de Estados em Sistemas Elétricos: Fundamentos e Estado da Arte**

No segundo capítulo é apresentado um apanhado geral da técnica de estimação de estados em SEPs, incluindo os equacionamentos da modelagem de incertezas nas medições, culminando na formulação geral do método dos MQP. Por fim, apresenta-se uma linha cronológica das principais contribuições sobre o tema até os dias atuais.

- **Capítulo 3: Método Holomórfico para o Fluxo de Potência: Fundamentos e Estado da Arte**

O terceiro capítulo apresenta de forma detalhadas o equacionamento do HELM aplicado ao problema de fluxo de potência. O nível de detalhamento matemático empregado neste capítulo foi adotado para facilitar a compreensão do capítulo seguinte. Além disso, o capítulo reúne uma revisão do estado da arte sobre o tema, destacando sua evolução desde 2012 até os dias atuais.

- **Capítulo 4: Metodologia Proposta**

O quarto capítulo constitui o foco deste trabalho e apresenta a metodologia proposta para um algoritmo de estimação de estados não iterativo, baseado em incorporação holomórfica. O capítulo traz o equacionamento detalhado do método, além de um fluxograma e de um exemplo tutorial resolvido passo a passo, com o objetivo de esclarecer sua aplicação.

- **Capítulo 5: Resultados e Discussões**

No penúltimo capítulo são apresentados os resultados das simulações computacionais do método proposto, aplicadas aos sistemas IEEE de 14 e IEEE 33 barras e ao sistema teste brasileiro de 107 barras. Nesse capítulo, diferentes planos de medição são avaliados e seus resultados são comparados com os valores de referência obtidos pelo fluxo de potência. Por fim, apresenta-se uma análise comparativa de desempenho entre o método proposto e a principal ferramenta utilizada atualmente na literatura.

- **Capítulo 6: Considerações Finais**

O último capítulo apresenta as considerações finais alcançadas nesta dissertação, juntamente com potenciais recomendações para futuras pesquisas.

## 2 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS ELÉTRICOS: FUNDAMENTOS E ESTADO DA ARTE

Neste capítulo são apresentados os fundamentos da estimação de estados em SEPs, com ênfase na formulação clássica por MQP, que constitui a base conceitual para os desenvolvimentos posteriores desta dissertação. Considerando que a estimação de estados e o método de MQP são amplamente consolidados na literatura e empregados de forma rotineira em centros de controle, opta-se por uma exposição mais sucinta, centrada nas principais hipóteses de modelagem, na formulação matemática do problema e no procedimento numérico de solução. Na sequência, é realizada uma revisão da literatura sobre estimação de estados em sistemas de transmissão e de distribuição, destacando as contribuições mais relevantes, tendências recentes e desafios encontrados em cada contexto.

### 2.1 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS

A estimação de estados é uma das técnicas mais importantes para o monitoramento e a supervisão de redes elétricas, pois permite reconstruir a condição operacional do sistema a partir de informações parciais (medições obtidas de partes do sistema) e sujeitas a incertezas referentes ao processo de instrumentação (erros aleatórios de medições) (Cheng *et al.*, 2023). Em geral, sua implementação ocorre nos centros de controle, integrada aos sistemas SCADA, nos quais um processador de topologia consolida a configuração da rede em tempo real, com base nos dados de admitâncias de elementos da rede, status de disjuntores, chaves seccionadoras e possíveis contingências que afetem a configuração dos sistema. Com base nessa topologia e em um conjunto de medições disponíveis continuamente (tipicamente associadas com erros aleatórios inerentes ao processo de instrumentação e medição), a estimação de estados torna possível obter as tensões em todas as barras do sistema, fornecendo uma visão global do estado operativo, mesmo quando nem todas as grandezas são diretamente medidas (Darmis; Korres, 2024).

O desenvolvimento formal da estimação de estados em SEPs teve início na década de 1970, sendo formalizada por Fred Schweppe e sua equipe do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) (Schweppe; Wildes, 1970), a partir da incorporação de conceitos estatísticos e da teoria da regressão linear ao problema de monitoramento de redes elétricas, respeitando as equações algébricas do fluxo de potência. Trabalhos pioneiros estabeleceram as bases matemáticas do problema ao reconhecer que as medições disponíveis em centros de controle são afetadas por incertezas e que, portanto, a determinação do estado do sistema deve ser tratada como um problema de natureza estatística.

Do ponto de vista da modelagem, as medições coletadas em campo, tais como potências ativas e reativas, tensões e correntes, não correspondem exatamente aos seus valores reais, mas a versões correspondentes contaminadas por erros aleatórios associados aos instrumentos de medição (transformadores de potencial e corrente) e aos canais de

comunicação (protocolos de comunicação, sincronismo e envio de dados ao centro de controle). Esses erros são geralmente tratados como variáveis aleatórias, sendo comumente modelados por distribuições gaussianas de média nula, uma vez que esse modelo reproduz adequadamente o comportamento observado na prática e facilita o tratamento matemático do problema (Abur; Exposito, 2004). Desta forma, uma medição genérica  $z$  pode ser modelada como a soma do valor verdadeiro  $\mu$  (associado ao valor médio de esperança da amostragem coletada) e de um erro aleatório com distribuição gaussiana  $\epsilon$ , conforme apresentado na Equação (2.1). Onde,  $\sigma$  representa o desvio padrão do erro e está diretamente relacionado à classe de exatidão dos instrumentos de medição.

$$z = \mu + \epsilon(0, \sigma), \quad (2.1)$$

Sob essa hipótese, a incerteza associada à medição é completamente caracterizada pela sua Função Densidade de Probabilidade (FDP) (Melo, 2022). No caso de erro gaussiano, a FDP da medição  $z$  é dada por:

$$\text{FDP}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z-\mu}{2\sigma}\right)^2}. \quad (2.2)$$

A partir da Equação (2.2), a estimação do valor mais provável associado a uma medição  $z$  pode ser interpretada como um problema de maximização da FDP. Em outras palavras, maximizar (2.2) se reduz a minimizar o termo quadrático presente no expoente da distribuição Gaussiana, ou seja:

$$\min J = \left(\frac{z - \mu}{2\sigma}\right)^2. \quad (2.3)$$

Quando o problema é estendido para um conjunto de múltiplas medições coletadas, cada uma é associada a um desvio padrão específico e obtém-se um critério de minimização baseado na soma dos resíduos ao quadrado normalizados pelas respectivas variâncias. Essa generalização conduz à formulação dos Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), amplamente empregada na estimação de estados em SEPs.

### 2.1.1 Mínimos Quadrados Ponderados

Sendo  $\hat{\mathbf{x}}$  o vetor de variáveis de estado a ser estimado e  $\phi_i(\hat{\mathbf{x}})$  a função que relaciona esse vetor à  $i$ -ésima medição, o problema de estimação de estados pode ser formulado conforme mostrado na Equação (2.4), onde  $m$  representa o número total de medições disponíveis e  $\sigma_i$  denota o desvio padrão associado à  $i$ -ésima medição:

$$\min J(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \phi_i(\hat{\mathbf{x}})}{\sigma_i}\right)^2. \quad (2.4)$$

Definindo  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) = [\phi_1(\hat{\mathbf{x}}) \cdots \phi_m(\hat{\mathbf{x}})]^T$ , a função objetivo  $J(\hat{\mathbf{x}})$  pode ser reescrita em termos matriciais como:

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]. \quad (2.5)$$

Na representação matricial em (2.5), o vetor  $\mathbf{z}$  é composto por todas as medições utilizadas no processo de estimação de estados, enquanto o vetor  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$  representa o conjunto de equações de medição, contendo os valores estimados correspondentes, calculados em função do vetor de variáveis de estado. A matriz de covariância  $\mathbf{R}$  é formada por elementos dispostos na diagonal principal, correspondentes às variâncias das medições individuais, dadas por  $\sigma_i^2$ .

No método tradicional dos MQP, a solução do problema de estimação é obtida a partir da derivada da função objetivo  $J(\hat{\mathbf{x}})$ , contida em (2.5), em relação ao vetor de estados, impondo-se que sua derivada seja igual a zero. Dessa forma, as condições de otimalidade do problema devem ser satisfeitas, conforme expresso pela Equação (2.6), na qual a matriz Jacobiana das medições é definida como  $\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}$ :

$$\frac{\partial J(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -\mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = 0. \quad (2.6)$$

Assumindo-se a expansão de  $\frac{\partial J(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}}$  em série de Taylor ao redor de  $\hat{\mathbf{x}}^t$ , obtém-se, em cada iteração, um sistema linear cuja solução fornece a correção do estado atualizado a cada iteração. Essa atualização é computada pelo método de Gauss-Newton, conforme a Equação (2.7), em que  $\hat{\mathbf{x}}^t$  representa a estimativa na iteração  $t$ .

$$\hat{\mathbf{x}}^{t+1} = \hat{\mathbf{x}}^t - [\mathcal{H}^T(\hat{\mathbf{x}}^t) \mathbf{R}^{-1} \mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}^t)]^{-1} \mathcal{H}(\hat{\mathbf{x}}^t) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}^t)]. \quad (2.7)$$

A solução do sistema linear (2.7) é obtida de forma iterativa, atualizando-se o vetor de variáveis de estado  $\hat{\mathbf{x}}$  a cada passo do algoritmo. O processo é encerrado quando a correção calculada entre duas iterações consecutivas torna-se suficientemente pequena, isto é, quando a norma de  $\hat{\mathbf{x}}^{t+1} - \hat{\mathbf{x}}^t$  fica abaixo de uma tolerância pré-estabelecida  $\varepsilon$ , de modo que:

$$\|\hat{\mathbf{x}}^{t+1} - \hat{\mathbf{x}}^t\|_{\infty} \leq \varepsilon. \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Revisão de Metodologias para Estimação de Estados

Esta subseção é destinada a reunir alguns dos principais métodos desenvolvidos para a estimação de estados em SEPs, a partir da fundamentação teórica proposta por (Schweppe; Wildes, 1970), na qual o vetor de variáveis de estado é composto por ângulos e magnitudes de tensão em todas as barras do sistema. A partir de medições coletadas de forma esparsa, essas informações são utilizadas em um centro de controle para se obter o estado mais provável do sistema.

Além da técnica tradicional dos MQP, outras abordagens ganharam destaque, permitindo o amadurecimento da estimação de estados desde sua concepção até os dias atuais. Dentre essas, destacam-se a técnica de transformação ortogonal, utilizada para facilitar a convergência dos métodos de estimação (Monticelli; Murari; Wu, 1985), e a aplicação

de metodologias para a análise da observabilidade da rede com um número reduzido de medidores (Monticelli; Wu, 1986). Essas abordagens baseiam-se fundamentalmente na análise da matriz Jacobiana formada durante o processo de estimação de estados.

Cronologicamente, após as primeiras publicações acerca do tema, diversos algoritmos foram propostos com o objetivo de lidar com a existência de erros grosseiros provenientes dos medidores instalados em campo. Na técnica tradicional, o estimador de estados assume a presença de erros aleatórios oriundos do processo de instrumentação, os quais são minimizados iterativamente. Contudo, quando erros sistemáticos, também denominados erros grosseiros ou *bad data*, estão presentes no vetor de medições utilizado pelos algoritmos, o processo de estimação pode resultar em soluções com baixa acurácia. Nesse sentido, Mili e Cutsem (1988) ressaltou a necessidade de, após a realização do processo de estimação, detectar a presença de erros grosseiros para posteriormente identificá-los e removê-los do plano de medição.

A técnica mais amplamente utilizada para a detecção de erros grosseiros é a aplicação do teste da qui-quadrada. Para a identificação desses erros, realiza-se a análise dos resíduos de medição normalizados máximos, a partir de inferências estatísticas e testes de hipóteses (Mili; Phaniraj; Rousseeuw, 1990). Uma vez identificada a medição errônea, esta pode ser excluída do plano de medição, desde que o sistema permaneça observável após sua retirada.

O método LAV (*Least Absolute Value*) foi desenvolvido a partir dos trabalhos de Singh e Alvarado (1994). Nessa abordagem, a equação de estimação que visa minimizar o somatório das diferenças quadráticas entre as medições e seus valores estimados correspondentes é substituída por uma formulação que busca minimizar o valor absoluto dessas diferenças. Essa abordagem mostra-se mais robusta frente à introdução de múltiplos erros grosseiros nas medições.

A remoção de erros grosseiros do plano de medição pode resultar na perda da observabilidade da rede, fazendo com que o estimador de estados apresente divergência ou problemas de convergência, uma vez que a retirada de medidas críticas pode interferir negativamente no processo de estimação. Nesse contexto, uma alternativa proposta consiste na aplicação de técnicas de robustez estatística com o objetivo de suprimir iterativamente os erros grosseiros existentes no plano de medição (Mili; Phaniraj; Rousseeuw, 1990). Com base nessa premissa, diversos algoritmos denominados estimadores robustos de estados foram propostos, conforme descrito em (Mili *et al.*, 2002). Esses métodos são desenvolvidos a partir da aplicação de técnicas avançadas de estatística que permitem a supressão de dados espúrios em um conjunto de medições.

Em outra vertente, as técnicas de estimação também foram aprimoradas com o objetivo de contornar problemas de convergência e a fragilidade da aplicação direta do método de Gauss-Newton sem o uso de técnicas de esparsidade, fatoração e particionamento

matricial. Destaca-se o desenvolvimento de métodos desacoplados (Monticelli; Garcia, 2002), nos quais as medições que interferem predominantemente nos cálculos de potência ativa e reativa são separadas em dois grupos, permitindo o cálculo dos ângulos e das magnitudes de tensão de forma desacoplada, de maneira análoga às técnicas empregadas no fluxo de potência desacoplado.

O método de Peters e Wilkinson (Gu *et al.*, 2007) representou uma das principais inovações metodológicas após a publicação dos trabalhos pioneiros de Schweppe. Por meio de técnicas de fatoração voltadas à melhoria da convergência do estimador de estados em casos de mal condicionamento matricial, esse método possibilitou a obtenção de soluções para sistemas sobrecarregados e numericamente mal condicionados.

Além disso, a formulação do problema de estimação de estados como um modelo de otimização tornou-se um marco relevante nesse contexto (Korres, 2002). Nessa abordagem, além da minimização da soma quadrática dos resíduos de medição, novas equações são adicionadas ao modelo sob a forma de restrições de igualdade. Como exemplo, para medições com elevada acurácia e alta confiabilidade de seus valores reais, a utilização de restrições de igualdade mostra-se adequada, como nos casos de barras com injeção de potência nula, também denominadas barras de passagem. Em cenários com baixa observabilidade, o uso desse tipo de restrição contribui para um melhor condicionamento do sistema linear resolvido iterativamente, permitindo a obtenção de estimativas mais acuradas ao final do processo de estimação. Esse tipo de informação adicional sobre o sistema é comumente denominado medida virtual na literatura.

O uso de restrições de desigualdade também constitui um marco relevante na evolução dos estimadores de estados. Desde os trabalhos iniciais de Handschin, Langer e Kliokys (1995) e Clements, Davis e Frey (2002), restrições de desigualdade passaram a ser utilizadas para inferir sinais de fluxos de potência e potências injetadas, permitindo uma melhor representação do sistema quando essas grandezas modelam cargas ou geração de potência. Posteriormente, o uso dessas inequações possibilitou a introdução do conceito de pseudomedidas, definidas como dados obtidos a partir de séries históricas e informações mensais de faturamento de consumidores. Embora apresentem baixa acurácia, essas informações podem ser utilizadas para complementar a escassez de medições em tempo real em redes com observabilidade deficitária (Singh; Pal; Jabr, 2010).

Outro marco importante foi o desenvolvimento da tecnologia de sincrofasores, que possibilitou a obtenção não apenas das magnitudes, mas também dos ângulos dos fasores, coletados em pontos geograficamente distantes de um sistema elétrico supervisionado. Nesse contexto, foi implantado em Atlanta o primeiro sistema trifásico de monitoramento de grandes áreas utilizando PMUs, permitindo o monitoramento contínuo de grandezas elétricas e de correntes harmônicas propagando-se em linhas de transmissão (Fardanesh *et al.*, 1998; Meliopoulos *et al.*, 2008).

O uso de PMUs consolidou-se como uma tecnologia que representa uma mudança significativa nos sistemas de monitoramento, pois possibilitou a obtenção de informações em tempo real com elevadas taxas de amostragem. Essas características permitem não apenas a estimação da dinâmica da rede elétrica monitorada, mas também a melhoria significativa das estimativas de estado em regime permanente. Isso se deve ao fato de as PMUs fornecerem informações angulares sincronizadas por meio do GPS, oferecendo medições de alta precisão e sincronismo temporal, o que facilita análises de estabilidade e segurança de SEP (Abbasy; Ismail, 2009; Su; Liu, 2015).

Os métodos de estimação de estados desenvolvidos antes da ampla disseminação das PMUs passaram por revisões com o objetivo de incorporar essas novas possibilidades aos algoritmos clássicos, permitindo maior efetividade no monitoramento da dinâmica do sistema por meio de técnicas estáticas e dinâmicas. Nesse contexto, destacam-se aplicações baseadas no filtro de Kalman (Karimipour; Dinavahi, 2015; Zhao; Netto; Mili, 2016; Zhao, 2017; Zhao *et al.*, 2019).

Outra técnica relevante é a minimização da correntropia, descrita por Miranda, Santos e Pereira (2009). Essa abordagem é caracterizada pela modificação da função objetivo a ser minimizada durante o processo de estimação de estados, incorporando conceitos avançados de estatística e teoria da informação. Essa técnica permite mitigar erros grosseiros introduzidos por medições angulares incorretas provenientes de PMUs (Nogueira *et al.*, 2023).

O arcabouço teórico estabelecido pelas técnicas desenvolvidas para o monitoramento de redes de transmissão, incluindo sistemas de alta e extra-alta tensão, serviu como base para o desenvolvimento de estimadores de estados aplicados a redes de distribuição. Esses estimadores possibilitam o monitoramento de sistemas de média tensão a partir do uso combinado de medições em tempo real, micro-PMUs, que são versões modulares e compactas das PMUs tradicionais, adequadas para instalação em níveis de média e baixa tensão, além de medições com diferentes granularidades temporais, exigindo frequentemente o emprego de técnicas híbridas de estimação de estados.

Além disso, a aplicação direta de estimadores clássicos em sistemas de distribuição não se mostra plenamente efetiva devido às particularidades dessas redes, tais como impedâncias assimétricas, trechos de linhas curtos, alimentadores predominantemente radiais e a escassez de medições em tempo real distribuídas ao longo da rede. Essas características tornam desafiadora a tarefa de estimar grandezas elétricas em cada centro de carga e transformador de média tensão.

Nesse sentido, uma das primeiras modificações propostas por Baran e Kelley (1994) e Baran e Kelley (1995) foi a adoção de pseudomedidas de carga, geralmente obtidas a partir de dados de faturamento e consumo médio mensal de cada consumidor, agregados em pontos de carga da rede. Embora pouco precisas, as pseudomedidas permitem

complementar as informações coletadas por um número reduzido de medidores instalados na rede. Adicionalmente, o vetor de variáveis de estado, tradicionalmente composto por tensões fasoriais em cada barra, é substituído por correntes de ramo nas linhas de distribuição (Baran; Kelley, 1995). Essa mudança possibilitou a obtenção de estimativas mais satisfatórias para sistemas de distribuição, uma vez que os ângulos de tensão nessas redes são geralmente muito pequenos entre barras consecutivas. Por outro lado, as correntes de ramo apresentam maior abertura angular, fornecendo maior variabilidade e permitindo a obtenção de equações linearmente independentes, o que contribui para uma estimação mais eficaz do estado operativo da rede.

A partir dessa abordagem, diversas outras metodologias foram desenvolvidas com o objetivo de aprimorar a estimação de estados em redes de distribuição. Uma das características mais desafiadoras nesse contexto é a modelagem de redes trifásicas desequilibradas (Baran; Kelley, 2002).

Ainda no contexto do monitoramento de redes de média tensão, o conceito de redes elétricas inteligentes foi fundamental para a introdução dos chamados medidores inteligentes, ou *smart meters*. Esses sensores digitais foram desenvolvidos para a medição de potência ativa e reativa próximo aos consumidores, permitindo observar o consumo e a demanda em intervalos de tempo contínuos, tradicionalmente de quinze em quinze minutos (Alimardani *et al.*, 2015). O avanço tecnológico, contudo, possibilitou o surgimento de equipamentos com diferentes granularidades temporais e níveis de acurácia (Melo, 2022).

O uso combinado de PMUs, micro-PMUs, medidores inteligentes e pseudomedidas tornou-se uma tendência na evolução dos estimadores de estado aplicados a sistemas de distribuição, conforme destacado nas revisões de literatura apresentadas por Primadianto e Lu (2016) e Dehghanpour *et al.* (2018).

Nesse contexto, Oliveira *et al.* (2018) propôs um modelo de otimização com restrições de desigualdade que utiliza pseudomedidas e um número limitado de apenas duas PMUs por alimentador trifásico, considerando a radialidade intrínseca da maioria dos sistemas de média tensão. Essa abordagem permite estimar com precisão os estados operativos do sistema ao longo do dia, representando uma estratégia de baixo custo para implementação em centros de controle e operação de sistemas de distribuição.

A aplicação do método de pontos interiores com barreiras de segurança para o monitoramento de grandezas elétricas trifásicas e componentes harmônicas em tempo real foi proposta por Melo *et al.* (2019). Essa abordagem alia modelos de redes desequilibradas estimadas no domínio da frequência, possibilitando a estimação de índices de qualidade de energia relevantes para o acompanhamento da qualidade do fornecimento aos consumidores.

Com base nessa mesma abordagem, demonstrou-se ser possível utilizar estimadores de estados para a identificação de perdas não técnicas de energia, comumente associadas a furtos de energia elétrica (Souza *et al.*, 2020), para o monitoramento de curvas diárias

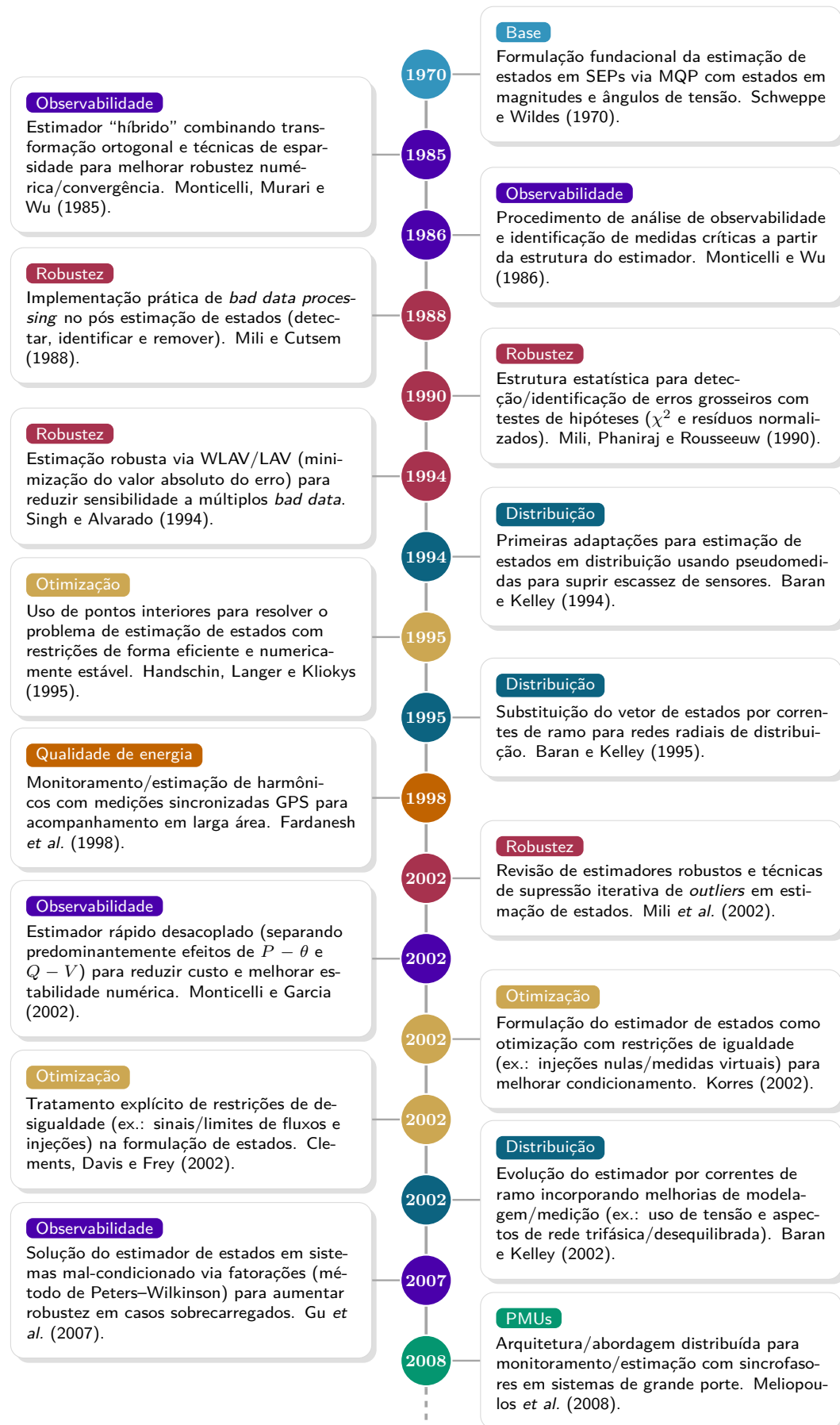
de carga e geração, para a identificação de erros grosseiros introduzidos nas medições de PMUs Oliveira, Melo e Souza (2021), bem como para a estimação da tensão entre neutro e terra, conhecida como NEV (*Neutral-to-Earth Voltage*), em sistemas multiterrados com a presença de quatro condutores (Melo; Teixeira; Mingorança, 2023; Diogo *et al.*, 2024).

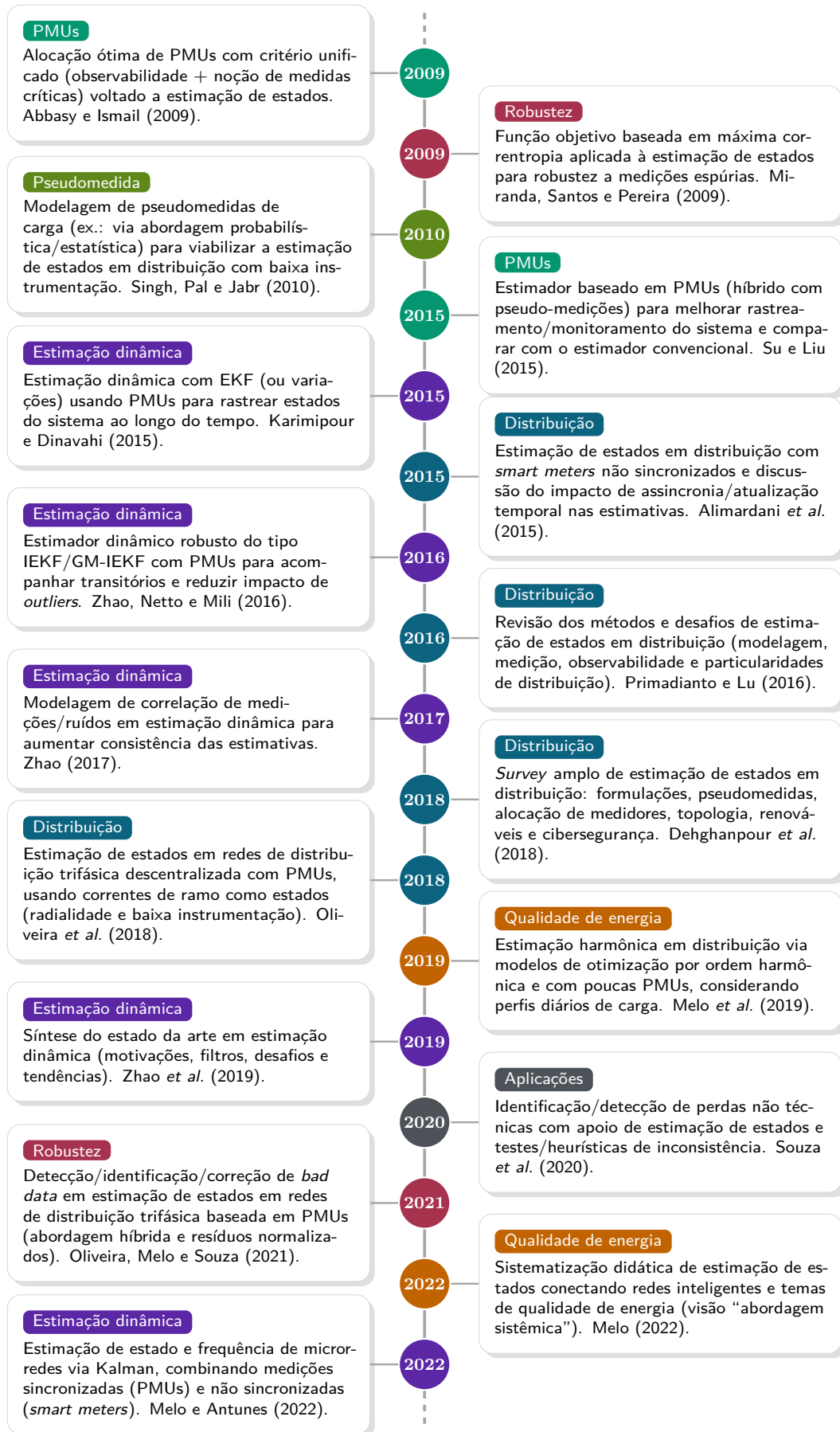
O uso do filtro de Kalman com medições provenientes de PMUs para o monitoramento de microrredes de média tensão também foi explorado por Melo e Antunes (2022) e Nogueira *et al.* (2023), considerando variações de frequência, operação ilhada de microrredes e a representação de dispositivos do tipo grid-forming, os quais contribuem ativamente para a variação da frequência da rede monitorada.

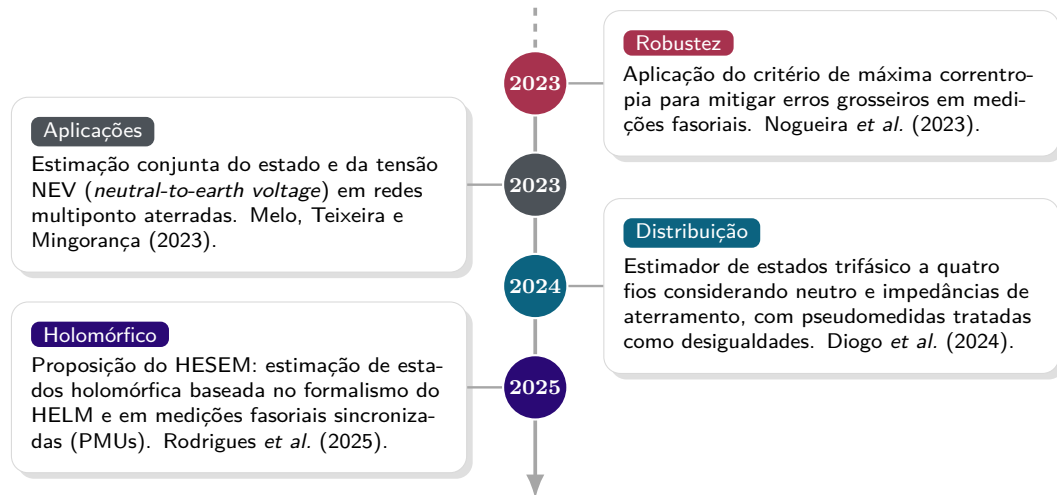
O presente trabalho insere-se nessa linha de pesquisa, uma vez que, na publicação de 2025, Rodrigues *et al.* (2025) propõe o uso de funções holomorfas para a resolução analítica do problema de estimação de estados por meio do método holomórfico, com base em medições fasoriais sincronizadas. A relevância desse trabalho no contexto do estado da arte reside na adoção de uma técnica distinta das abordagens iterativas tradicionais. Essa metodologia permite o uso de PMUs tanto para o monitoramento de redes de transmissão quanto de distribuição, não apresentando problemas de convergência ou instabilidade numérica. Diferentemente das técnicas baseadas em processos iterativos, essa abordagem mostra-se eficaz independentemente dos valores iniciais usualmente adotados na estimação de estados.

Em síntese, as referências discutidas nesta subseção estão reunidas na Figura 1, na qual foi elaborada uma linha do tempo com os principais marcos relacionados à estimação de estados em SEPs. De forma visual, a figura organiza cronologicamente as contribuições da literatura, permitindo observar a progressão das abordagens propostas e situar este trabalho no contexto do desenvolvimento histórico do tema.

Figura 1 – Linha do tempo de contribuições relacionadas à Estimação de Estados.







## 2.2 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi apresentada uma visão geral da estimação de estados em SEPs, com ênfase na modelagem das incertezas associadas às medições e na formulação do método dos MQP. Em seguida, foi conduzida uma revisão do estado da arte, sintetizando a evolução das principais contribuições da literatura e estabelecendo a base teórica necessária para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

### 3 MÉTODO HOLOMÓRFICO PARA O FLUXO DE POTÊNCIA: FUNDAMENTOS E ESTADO DA ARTE

Neste capítulo são apresentados os fundamentos do Método Holomórfico para o cálculo do fluxo de potência, que constitui um dos pilares desta dissertação e serve de base para a metodologia proposta para estimação de estados. Considerando que se trata de uma abordagem ainda menos difundida na literatura, opta-se por uma exposição mais detalhada de seus conceitos, hipóteses e etapas de formulação, com o objetivo de tornar explícita a lógica que sustenta o método e facilitar a leitura dos desenvolvimentos posteriores. Na sequência, é realizada uma revisão da literatura relacionada ao método, destacando as principais contribuições, extensões e aplicações, bem como limitações e desafios reportados.

#### 3.1 MÉTODO HOLOMÓRFICO

O cálculo do fluxo de potência é fundamental para a operação e o planejamento de SEPs, pois permite determinar o perfil de tensões e os fluxos de potência nos ramos a partir dos dados de carga, geração e parâmetros da rede. Em geral, esse problema é resolvido por métodos numéricos iterativos amplamente utilizados, como Newton–Raphson e suas variantes, baseados em sucessivas linearizações das equações não lineares do sistema. Apesar de sua eficácia, tais métodos podem apresentar limitações associadas à dependência de uma solução inicial adequada e a dificuldades de convergência em regimes de carregamento elevado, em situações de mal condicionamento numérico e na proximidade de pontos críticos de operação (Melo; Rodrigues; Lima, 2023).

Diante dessas limitações, Trias (2012) introduziu um novo método para a resolução das equações do fluxo de potência, proporcionando uma solução única e estável. Esse método, denominado *Holomorphic Embedding Load-flow Method* (HELM), elimina a necessidade de estimativas iniciais para as variáveis a serem calculadas, pois essas são determinadas diretamente pelo algoritmo por meio de um processo chamado cálculo da solução germinal. Além disso, a solução é obtida de forma não iterativa, garantindo um tempo computacional reduzido e eficiente. Essas características decorrem da formulação analítica adotada pelo método, a qual se apoia em conceitos de análise complexa.

O HELM fundamenta-se no conceito de funções holomorfas. Uma função holomorfa é uma função de variável complexa que satisfaz as equações de Cauchy–Riemann em uma região do plano complexo, sendo, portanto, diferenciável em todos os pontos desse domínio. Essa importante propriedade permite que tais funções sejam representadas por meio de sua expansão em série de Maclaurin, conforme mostrado na Equação (3.1). No contexto do método holomórfico aplicado a sistemas de potência, essa representação em série é utilizada para modelar as grandezas elétricas de interesse, em particular as tensões nodais.

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \alpha^n = f[0] + f[1] \alpha + f[2] \alpha^2 + f[3] \alpha^3 + \dots \quad (3.1)$$

### 3.1.1 Incorporação holomórfica

Uma vez modelado o sistema de potência no domínio fasorial, a potência complexa injetada em uma barra “ $i$ ” pode ser escrita em função do seu fasor de tensão, a partir das leis de Kirchhoff. Considerando o conjunto das  $\mathbf{N}$  barras do sistema, obtém-se as Equações de Balanço de Potência (EBPs) apresentada na Equação (3.2). Nessa expressão,  $Y_{ik}$  corresponde à admitância generalizada entre as barras “ $i$ ” e “ $k$ ”, a qual incorpora simultaneamente as admitâncias dos ramos e os termos *shunt* associados às barras.

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik} V_k = \left( \frac{S_i^{esp}}{V_i} \right)^*, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.2)$$

Seguindo a formulação proposta por Trias (2012), introduz-se uma variável complexa, denotada por  $\alpha$ , às EBPs descritas em (3.2), de modo que as variáveis de estado passem, por definição, a serem tratadas como funções holomorfas dessa variável. Existem diversas formas de se realizar essa incorporação. Neste trabalho, adota-se a estratégia em que todos os termos especificados em (3.2) são multiplicados pelo parâmetro de incorporação  $\alpha$ , enquanto as incógnitas passam a ser representadas como funções dessa nova variável.

#### 3.1.1.1 Barra de carga

Sob essa parametrização proposta, a modelagem matemática de uma barra de carga “ $i$ ” pertencente ao conjunto  $\mathbf{PQ}$  do sistema pode ser expressa na forma apresentada na Equação (3.3).

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k(\alpha) = \alpha (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*(\alpha^*) - \alpha Y_i^{sh} V_i(\alpha), \quad \forall i \in \mathbf{PQ}. \quad (3.3)$$

Observa-se, em (3.3), a presença do termo  $W_i^*(\alpha^*)$ , o qual corresponde ao inverso da tensão  $V_i^*(\alpha^*)$ , conforme definido na Equação (3.4). A introdução dessa variável desempenha papel central na formulação do método e será utilizada ao longo do desenvolvimento sempre que apropriado (Subramanian; Feng; Tylavsky, 2013).

$$W_i^*(\alpha^*) = \frac{1}{V_i^*(\alpha^*)}, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.4)$$

#### 3.1.1.2 Barra de geração

Para as barras de geração, concentradas no conjunto  $\mathbf{PV}$ , adota-se um procedimento análogo, cuja formulação é apresentada na Equação (3.5). Entretanto, como a potência reativa não é previamente especificada nesse tipo de barra, sua representação também é parametrizada em função de  $\alpha$ , devendo ser tratada como incógnita juntamente com as tensões nodais.

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k(\alpha) = (\alpha P_i^{esp} - jQ_i(\alpha)) W_i^*(\alpha^*) - \alpha Y_i^{sh} V_i(\alpha), \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \quad (3.5)$$

### 3.1.1.3 Barra de referência

A modelagem para a barra de referência, ou *slack*, representada pelo conjunto unitário  $\mathbf{V}\theta$ , é apresentada na Equação (3.6). Note que uma formulação especial é atribuída a essa barra, pois sua tensão complexa deve sempre ser especificada.

$$V_i(\alpha) = 1 + \alpha (V_i^{esp} - 1), \quad \forall i \in \mathbf{V}\theta. \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Séries de MacLaurin

A representação matemática de cada barra do sistema é construída a partir de funções holomorfas associadas às tensões nodais e, no caso das barras do conjunto  $\mathbf{P}\mathbf{V}$ , às respectivas potências reativas. Por meio da parametrização em função de  $\alpha$  escolhida, garante-se que, ao se tomar  $\alpha = 1$ , as EBPs do fluxo de potência convencional sejam integralmente recuperadas, caracterizando a condição de operação nominal. Nessa configuração, a avaliação das funções  $V_i(\alpha)$  e  $W_i(\alpha)$ ,  $\forall i \in \mathbf{N}$ , e  $Q_i(\alpha)$ ,  $\forall i \in \mathbf{P}\mathbf{V}$ , no ponto  $\alpha = 1$ , conforme definido em (3.3), (3.5) e (3.6), corresponde à solução estável do fluxo de potência. Nesse sentido, o objetivo central do método consiste em determinar explicitamente essas funções.

A partir dessa modelagem holomórfica, a determinação das variáveis de estado do problema, isto é, as tensões em todas as barras e as potências reativas nas barras do tipo “PV”, é realizada por meio do desenvolvimento das funções  $V_i(\alpha)$ ,  $W_i(\alpha)$  e  $Q_i(\alpha)$  em séries de Maclaurin, de forma análoga à representação genérica apresentada em (3.1), conforme indicado nas Equações (3.7), (3.8) e (3.9).

$$V_i(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} V_i[n] \alpha^n = V_i[0] + V_i[1] \alpha + \dots \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.7)$$

$$W_i^*(\alpha^*) = \sum_{n=0}^{\infty} W_i^*[n] (\alpha^*)^n = W_i^*[0] + W_i^*[1] \alpha^* + \dots \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.8)$$

$$Q_i(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_i[n] \alpha^n = Q_i[0] + Q_i[1] \alpha + \dots \quad \forall i \in \mathbf{P}\mathbf{V}. \quad (3.9)$$

Dessa forma, resolver o problema de fluxo de potência utilizando o HELM equivale a determinar os coeficientes das séries que representam as funções  $V_i(\alpha)$ ,  $W_i(\alpha)$  e  $Q_i(\alpha)$ , até uma ordem  $n$  adequada e soma-los, uma vez que a solução do fluxo de potência é determinada avaliando-se essas séries em  $\alpha = 1$ .

#### 3.1.2.1 Solução germinal

Para determinar recursivamente os coeficientes das séries de Maclaurin das tensões nodais, dos inversos das tensões nodais e das potências reativas, descritas em (3.7), (3.8) e (3.9), respectivamente, é necessário especificar uma condição inicial para o parâmetro

de incorporação  $\alpha$ . Essa condição, denominada solução germinal, é obtida avaliando-se as equações holomorfas no ponto  $\alpha = 0$ . Conforme discutido em Subramanian, Feng e Tylavsky (2013), tal ponto corresponde à operação do sistema na ausência de cargas e de geração, isto é, um estado em que não há correntes circulantes na rede.

Considerando a formulação holomorfa da barra *slack*, apresentada em (3.6), e a expansão em série de Maclaurin de  $V_i(\alpha)$  definida em (3.7), obtém-se:

$$V_i[0] + V_i[1]\alpha + \dots = 1 + \alpha (V_i^{esp} - 1), \quad \forall i \in \mathbf{V}\theta. \quad (3.10)$$

Ao impor a condição  $\alpha = 0$  na Equação (3.10), obtém-se o primeiro coeficiente da série, que representa a função holomorfa da tensão na barra *slack*:

$$V_i[0] = 1, \quad \forall i \in \mathbf{V}\theta. \quad (3.11)$$

Em seguida, combinando-se (3.3), (3.7) e (3.8), a equação de injeção de potência nas barras de carga pode ser escrita em termos das séries de Maclaurin como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} (V_k[0] + V_k[1]\alpha + \dots) &= \alpha (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) (W_i^*[0] + W_i^*[1]\alpha + \dots) \\ &\quad - \alpha Y_i^{sh} (V_i[0] + V_i[1]\alpha + \dots), \quad \forall i \in \mathbf{PQ}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avaliando a Equação (3.12) em  $\alpha = 0$ , observa-se que todos os termos do lado direito são proporcionalmente multiplicados por  $\alpha$  e, portanto, anulam-se. Assim, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[0] = 0, \quad \forall i \in \mathbf{PQ}. \quad (3.13)$$

A Equação (3.13) descreve o equilíbrio de correntes na rede em condição sem injeções de potência nas barras do tipo “PQ”. Sob a hipótese usual de que a rede é conectada e de que a matriz de admitâncias de transmissão  $\mathbf{Y}^{tr}$  não contém admitâncias de derivação, tal equilíbrio só pode ser satisfeito se todas as tensões nodais compartilharem o mesmo valor. Como em (3.11) foi fixado  $V_i[0] = 1$  na barra *slack*, conclui-se que:

$$V_i[0] = 1, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.14)$$

Os coeficientes associados às funções recíprocas das tensões nodais  $W_i(\alpha)$  podem ser obtidos a partir da relação apresentada na Equação (3.15) em conjunto com as suas respectivas expansões em série.

$$W_i(\alpha) = \frac{1}{V_i(\alpha)}. \quad (3.15)$$

Substituindo expansões definidas em (3.7) e (3.8) na Equação (3.15), obtém-se:

$$W_i[0] + W_i[1]\alpha + \dots = \frac{1}{V_i[0] + V_i[1]\alpha + \dots}, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.16)$$

Ao avaliar (3.16) em  $\alpha = 0$  e utilizar o resultado obtido em (3.14), conclui-se que:

$$W_i[0] = \frac{1}{V_i[0]} = 1, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.17)$$

Como  $W_i[0]$  é real, tem-se também  $W_i^*[0] = 1$  para todas as barras.

Por fim, para determinar  $Q_i[0]$  nas barras do tipo “PV”, combina-se o resultado obtido em (3.5), (3.7), (3.8) e (3.9), o que leva à seguinte expressão em séries:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} (V_k[0] + V_k[1]\alpha + \dots) &= (\alpha P_i^{esp} - j(Q_i[0] + Q_i[1]\alpha + \dots)) (W_i^*[0] + W_i^*[1]\alpha + \dots) \\ &\quad - \alpha Y_i^{sh} (V_i[0] + V_i[1]\alpha + \dots), \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Impondo  $\alpha = 0$  em (3.18), resulta:

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[0] = -j Q_i[0] W_i^*[0], \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \quad (3.19)$$

Por outro lado, como a solução germinal é tal que  $V_i[0] = 1$  para todas as barras, conforme (3.14), e  $W_i^*[0] = 1$ , de acordo com (3.17), a soma no lado esquerdo de (3.19) representa novamente uma condição de ausência de correntes, o que implica:

$$Q_i[0] = 0, \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \quad (3.20)$$

Em síntese, a solução germinal do HELM é caracterizada por  $V_i[0] = 1$  e  $W_i[0] = 1$  em todas as barras, enquanto  $Q_i[0] = 0$  nas barras “PV”. Esses coeficientes iniciais são utilizados como condição de partida para o cálculo recursivo dos termos de ordem superior das séries de Maclaurin das grandezas de interesse.

### 3.1.2.2 Termos de ordem superior

Uma vez obtida a solução germinal, isto é, os coeficientes de ordem zero das séries  $V_i(\alpha)$ ,  $W_i(\alpha)$  e  $Q_i(\alpha)$ , descritas em (3.7), (3.8) e (3.9), respectivamente, torna-se necessário estabelecer uma formulação recursiva que permita calcular os coeficientes de ordem superior ( $n \geq 1$ ). Essa formulação é obtida a partir do desenvolvimento algébrico de (3.10), (3.12), (3.16) e (3.18), nas quais se introduzem as representações em séries de Maclaurin das grandezas envolvidas.

#### 3.1.2.2.1 Desenvolvimento matemático: Inverso das tensões

Partindo da relação entre  $V_i(\alpha)$  e  $W_i(\alpha)$ , dada em (3.16), tem-se que o produto dessas séries é identicamente igual a 1, o que pode ser escrito como:

$$(V_i[0] + V_i[1]\alpha + V_i[2]\alpha^2 + \dots)(W_i[0] + W_i[1]\alpha + W_i[2]\alpha^2 + \dots) = 1, \quad \forall i \in \mathbf{N}. \quad (3.21)$$

Uma forma direta de explorar (3.21) consiste em realizar a multiplicação das séries de Maclaurin e, em seguida, igualar os coeficientes associados a uma mesma potência de  $\alpha$  em ambos os lados da igualdade. Esse procedimento resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
V_i[0] W_i[0] = 1 &\implies W_i[0] = \frac{1}{V_i[0]}, \\
V_i[0] W_i[1] + V_i[1] W_i[0] = 0 &\implies W_i[1] = -\frac{V_i[1] W_i[0]}{V_i[0]}, \\
V_i[0] W_i[2] + V_i[1] W_i[1] + V_i[2] W_i[0] = 0 &\implies W_i[2] = -\frac{V_i[1] W_i[1] + V_i[2] W_i[0]}{V_i[0]}, \\
&\vdots \quad \forall i \in \mathbf{N}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Observa-se que as equações em (3.22) seguem um padrão bem definido: para cada ordem  $n \geq 1$ , o coeficiente  $W_i[n]$  depende apenas dos coeficientes de ordem igual ou inferior de  $V_i(\alpha)$  e  $W_i(\alpha)$ . De forma compacta, esse padrão pode ser generalizado para:

$$W_i[n] = -\frac{1}{V_i[0]} \sum_{k=0}^{n-1} V_i[n-k] W_i[k], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{N}. \tag{3.23}$$

Dessa forma, (3.23) estabelece um procedimento recursivo: cada novo coeficiente  $W_i[n]$  é calculado a partir do conhecimento dos coeficientes  $V_i[0], \dots, V_i[n]$  e dos termos  $W_i[0], \dots, W_i[n-1]$ . Assim, o conjunto completo de coeficientes de  $W_i(\alpha)$  pode ser obtido sucessivamente, ordem a ordem, com base apenas nos coeficientes previamente conhecidos de  $V_i(\alpha)$ .

### 3.1.2.2.2 *Desenvolvimento matemático: Barra de referência*

Para a barra *slack*, parte-se de (3.10) e compara-se, termo a termo, os coeficientes de  $\alpha$  em cada lado da igualdade, assim como foi desenvolvido na subseção anterior. Dessa forma, além do termo de ordem zero  $V_i[0] = 1$ , previamente definido como solução germinal, obtém-se que o coeficiente de primeira ordem é dado por  $V_i[1] = V_i^{esp} - 1$ , enquanto todos os coeficientes de ordem superior,  $V_i[n]$  com  $n > 1$ , são nulos. De forma compacta, para as barras do conjunto  $\mathbf{V}\theta$ , tem-se:

$$V_i[n] = \begin{cases} V_i^{esp} - 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1, \end{cases} \quad \forall i \in \mathbf{V}\theta. \tag{3.24}$$

### 3.1.2.2.3 *Desenvolvimento matemático: Barra de carga*

O mesmo raciocínio pode ser estendido às barras do tipo “PQ”. Considerando (3.12), a igualdade dos coeficientes associados às potências de  $\alpha$  gera, para as primeiras

ordens, o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[1] &= (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[0] - Y_i^{sh} V_i[0], \\
\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[2] &= (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[1] - Y_i^{sh} V_i[1], \\
\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[3] &= (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[2] - Y_i^{sh} V_i[2], \\
&\vdots \quad \forall i \in \mathbf{PQ}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Observa-se que, para cada ordem  $n \geq 1$ , o lado esquerdo envolve apenas os coeficientes  $V_k[n]$ , enquanto o lado direito depende de termos já conhecidos das séries  $V_i(\alpha)$  e  $W_i(\alpha)$ , de ordem inferior. Esse padrão pode ser generalizado para:

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[n] = (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[n-1] - Y_i^{sh} V_i[n-1], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PQ}. \tag{3.26}$$

A Equação (3.26) define, portanto, um sistema linear para os coeficientes  $V_k[n]$  em cada ordem  $n$ , cuja solução é obtida a partir dos valores já conhecidos de  $V_i[n-1]$  e  $W_i[n-1]$ .

Para explorar separadamente as componentes real e imaginária das tensões nodais, adota-se a decomposição  $Y_{ik}^{tr} = G_{ik} + jB_{ik}$  e  $V_k[n] = V_k^{re}[n] + jV_k^{im}[n]$ . Substituindo essas expressões em (3.26) e reorganizando os termos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N (G_{ik} V_k^{re}[n] - B_{ik} V_k^{im}[n]) + j (G_{ik} V_k^{im}[n] + B_{ik} V_k^{re}[n]) = \\
(P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[n-1] - Y_i^{sh} V_i[n-1], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PQ}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A comparação das partes real e imaginária em ambos os lados de (4.37) leva a dois conjuntos de equações lineares acopladas:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N (G_{ik} V_k^{re}[n] - B_{ik} V_k^{im}[n]) = \operatorname{Re} \left\{ (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[n-1] - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\}, \\
n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PQ},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N (G_{ik} V_k^{im}[n] + B_{ik} V_k^{re}[n]) = \operatorname{Im} \left\{ (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[n-1] - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\}, \\
n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PQ}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Na forma matricial, (3.28) e (3.29) podem ser expressas como:

$$\begin{bmatrix} G_{i1} & -B_{i1} & \cdots & G_{ii} & -B_{ii} & \cdots & G_{iN} & -B_{iN} \\ B_{i1} & G_{i1} & \cdots & B_{ii} & G_{ii} & \cdots & B_{iN} & G_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ \vdots \\ V_i^{re}[n] \\ V_i^{im}[n] \\ \vdots \\ V_N^{re}[n] \\ V_N^{im}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left\{ (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[n-1] - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\} \\ \operatorname{Im} \left\{ (P_i^{esp} - jQ_i^{esp}) W_i^*[n-1] - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PQ}. \quad (3.30)$$

#### 3.1.2.2.4 *Desenvolvimento matemático: Barra de geração*

Para as barras do tipo “PV”, pode-se, de forma análoga ao procedimento adotado para as barras “PQ” na subseção anterior, obter uma formulação recursiva em forma matricial que relaciona as injeções líquidas de potência nas barras de geração aos fasores de tensão do sistema. Partindo de (3.18) e igualando os coeficientes associados a uma mesma ordem em  $\alpha$  em ambos os lados da expressão, obtêm-se as seguintes relações de igualdade:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[1] &= P_i^{esp} W_i^*[0] - j(Q_i[0] W_i^*[1] + Q_i[1] W_i^*[0]) \\ &\quad - Y_i^{sh} V_i[0], \\ \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[2] &= P_i^{esp} W_i^*[1] - j(Q_i[0] W_i^*[2] + Q_i[1] W_i^*[1] + Q_i[2] W_i^*[0]) \\ &\quad - Y_i^{sh} V_i[1], \\ \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[3] &= P_i^{esp} W_i^*[2] - j(Q_i[0] W_i^*[3] + Q_i[1] W_i^*[2] + Q_i[2] W_i^*[1] + Q_i[3] W_i^*[0]) \\ &\quad - Y_i^{sh} V_i[2], \\ &\quad \vdots \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A partir das expressões explicitadas para as ordens  $n = 1$ ,  $n = 2$  e  $n = 3$ , observa-se um padrão recorrente na estrutura das equações. Em cada ordem  $n$ , o lado esquerdo permanece como uma combinação linear dos coeficientes  $V_k[n]$  ponderados pelos elementos da matriz de admitâncias de transmissão  $Y_{ik}^{tr}$ . Já o lado direito é composto por três contribuições: (i) um termo proporcional à potência ativa especificada  $P_i^{esp}$ , multiplicada por  $W_i^*[n-1]$ ; (ii) uma soma de termos que envolve a potência reativa  $Q_i[m]$  convolvida

com os coeficientes  $W_i^*[n - m]$ , para  $m$  variando de 0 até  $n$ ; e (iii) um termo associado à admitância de derivação  $Y_i^{sh}$  e ao coeficiente de tensão  $V_i[n - 1]$ . Esse padrão, claramente identificado nas ordens iniciais, permite a escrita de uma expressão compacta e válida para qualquer  $n \geq 1$ , resultando na forma recursiva geral apresentada na Equação (3.32).

$$\sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[n] = P_i^{esp} W_i^*[n - 1] - j \sum_{m=0}^n Q_i[m] W_i^*[n - m] - Y_i^{sh} V_i[n - 1], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}. \quad (3.32)$$

Nota-se que o segundo termo do lado direito em (3.32) pode ser interpretado como uma convolução discreta entre as sequências de coeficientes  $Q_i$  e  $W_i^*$ . Para explicitar a contribuição de cada par  $(Q_i[m], W_i^*[n - m])$  na formação do coeficiente de ordem  $n$ , reescreve-se essa soma na forma expandida, conforme mostrado na Equação (3.33).

$$\sum_{m=0}^n Q_i[m] W_i^*[n - m] = Q_i[0] W_i^*[n] + Q_i[1] W_i^*[n - 1] + Q_i[2] W_i^*[n - 2] + \dots + Q_i[n] W_i^*[0]. \quad (3.33)$$

Na expressão (3.33), ao se analisar o coeficiente de ordem  $n$  da série de Maclaurin, verifica-se que o termo  $Q_i[n]$  aparece sempre multiplicado por  $W_i^*[0]$ . Como, pela solução germinal, tem-se  $W_i[0] = 1$ , esse produto reduz-se simplesmente a  $Q_i[n]$ . De forma análoga, o termo  $W_i^*[n]$  está associado a  $Q_i[0]$ . Entretanto, também pela solução germinal, sabe-se que  $Q_i[0] = 0$ , o que faz com que a contribuição proporcional a  $W_i^*[n]$  seja nula. Com essas observações, a soma em (3.33) pode ser reescrita destacando-se o termo de ordem  $n$  e restringindo o somatório aos índices intermediários  $1 \leq m \leq n - 1$ , o que leva a:

$$\sum_{m=0}^n Q_i[m] W_i^*[n - m] = \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n - m] + Q_i[n], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}. \quad (3.34)$$

Reescrevendo a equação recursiva das barras do tipo “PV” considerando a simplificação em (3.34), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[n] = & P_i^{esp} W_i^*[n - 1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n - m] + Q_i[n] \right) \\ & - Y_i^{sh} V_i[n - 1], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Uma vez que o HELM possui caráter recursivo, para uma dada ordem  $n \geq 1$ , assume-se que todos os coeficientes de ordem inferior ( $n - 1, n - 2, \dots$ ) já foram determinados em etapas anteriores do processo. Essa observação permite reorganizar (3.35) de modo a agrupar, no lado esquerdo, todos os termos que envolvem coeficientes de ordem  $n \geq 1$ , enquanto os termos que dependem apenas de coeficientes de ordem estritamente inferior são deslocados para o lado direito e tratados como conhecidos. Dessa forma, (3.35) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N Y_{ik}^{tr} V_k[n] + j Q_i[n] = & P_i^{esp} W_i^*[n - 1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n - m] \right) \\ & - Y_i^{sh} V_i[n - 1], \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aplicando-se, também, a decomposição em partes real e imaginária às tensões nodais e às admitâncias presentes no lado esquerdo de (3.36), obtém-se, de forma análoga ao procedimento adotado no equacionamento das barras do tipo “ $PQ$ ”, dois conjuntos acoplados de equações lineares, conforme apresentado nas Equações (3.37) e (3.38).

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (G_{ik} V_k^{re}[n] - B_{ik} V_k^{im}[n]) = \\ \text{Re} \left\{ P_i^{esp} W_i^*[n-1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n-m] \right) - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\}, \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (G_{ik} V_k^{im}[n] + B_{ik} V_k^{re}[n]) + Q_i[n] = \\ \text{Im} \left\{ P_i^{esp} W_i^*[n-1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n-m] \right) - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\}, \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

As expressões (3.37) e (3.38) completam a formulação recursiva das tensões nas barras do tipo “ $PV$ ”. Do ponto de vista estrutural do modelo, entretanto, é importante notar que, nessa formulação, a potência reativa passa a ser tratada como uma variável livre adicional. Para que o problema permaneça determinado, torna-se necessária a inclusão da Equação (3.39) no conjunto de equações holomórficas. Essa equação impõe o módulo de tensão desejado na barra, garantindo que o valor obtido na avaliação em  $\alpha = 1$  convirja para o nível especificado e, simultaneamente, assegurando que o sistema algébrico resultante seja determinado, isto é, que o número de equações independentes coincida com o número de incógnitas (Trias *et al.*, 2018).

$$V_i(\alpha) V_i^*(\alpha^*) = 1 + \alpha (|V_i^{esp}|^2 - 1), \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \quad (3.39)$$

Dando sequência, substituem-se em (3.39), as expansões em séries de Maclaurin das tensões  $V_i(\alpha)$  e  $V_i^*(\alpha^*)$ , o que leva à expressão:

$$\begin{aligned} & \left( V_i[0] + V_i[1]\alpha + V_i[2]\alpha^2 + \dots \right) \left( V_i^*[0] + V_i^*[1]\alpha^* + V_i^*[2](\alpha^*)^2 + \dots \right) = \\ & 1 + \alpha (|V_i^{esp}|^2 - 1), \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Em seguida, procede-se à igualdade, em ambos os lados de (3.40), dos coeficientes associados às mesmas potências de  $\alpha$  e  $\alpha^*$ , obtendo-se, para as primeiras ordens:

$$\begin{aligned}
V_i[0] V_i^*[0] &= 1, \\
&\Rightarrow V_i[0] = V_i^*[0] = 1, \\
V_i[0] V_i^*[1] + V_i[1] V_i^*[0] &= |V_i^{esp}|^2 - 1, \\
&\Rightarrow V_i^{re}[1] = \frac{1}{2}(|V_i^{esp}|^2 - 1), \\
V_i[0] V_i^*[2] + V_i[1] V_i^*[1] + V_i[2] V_i^*[0] &= 0, \\
&\Rightarrow V_i^{re}[2] = -\frac{1}{2} V_i[1] V_i^*[1], \\
V_i[0] V_i^*[3] + V_i[1] V_i^*[2] + V_i[2] V_i^*[1] + V_i[3] V_i^*[0] &= 0, \\
&\Rightarrow V_i^{re}[3] = -\frac{1}{2} (V_i[1] V_i^*[2] + V_i[2] V_i^*[1]) \\
&\vdots \quad \forall i \in \mathbf{PV}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

As igualdades em (3.41), obtidas para as ordens iniciais de  $\alpha$ , evidenciam o padrão seguido pelos coeficientes de  $V_i(\alpha)$ . Em  $n = 0$ , recupera-se a solução germinal; em  $n = 1$ , obtém-se a correção inicial em função do módulo especificado  $|V_i^{esp}|$  e, para  $n > 1$ , verifica-se que a parte real de  $V_i[n]$  passa a depender apenas de combinações entre coeficientes de ordem inferior, na forma de uma soma do tipo convolução. Essa estrutura permite escrever a seguinte expressão geral:

$$V_i^{re}[n] = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{2}(|V_i^{esp}|^2 - 1), & \text{se } n = 1 \\ -\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{n-1} V_i[k] V_i^*[n-k] \right), & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad \forall i \in \mathbf{PV}. \tag{3.42}$$

Uma vez conhecidos os valores de  $V_i^{re}[n]$ ,  $\forall i \in \mathbf{PV}$ , a partir de (3.42), esses coeficientes podem ser substituídos em (3.37) e (3.38). Dessa forma, todas as parcelas que dependem apenas de termos já determinados são reunidas no segundo membro, enquanto permanecem no primeiro membro apenas as incógnitas associadas à ordem  $n$ . Essa reorganização conduz, para cada ordem  $n$ , a um sistema linear que pode ser expresso em forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} G_{i1} & -B_{i1} & \cdots & 0 & -B_{ii} & \cdots & G_{iN} & -B_{iN} \\ B_{i1} & G_{i1} & \cdots & 1 & G_{ii} & \cdots & B_{iN} & G_{iN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ \vdots \\ Q_i[n] \\ V_i^{im}[n] \\ \vdots \\ V_N^{re}[n] \\ V_N^{im}[n] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} G_{ii} \\ B_{ii} \end{bmatrix} V_i^{re}[n]$$

$$\begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ P_i^{esp} W_i^*[n-1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n-m] \right) - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\} \\ \text{Im} \left\{ P_i^{esp} W_i^*[n-1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n-m] \right) - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1, \forall i \in \mathbf{PV}.$$

(3.43)

### 3.1.2.3 Sistema matricial

Combinando (3.24), (3.30) e (3.43), é possível montar o seguinte sistema de equações matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{i1} & -B_{i1} & \cdots & 1 & -B_{ii} & \cdots & G_{im} & -B_{im} & \cdots \\ B_{i1} & G_{i1} & \cdots & 0 & G_{ii} & \cdots & B_{im} & G_{im} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{m1} & -B_{m1} & \cdots & 0 & -B_{mi} & \cdots & G_{mm} & -B_{mm} & \cdots \\ B_{m1} & G_{m1} & \cdots & 0 & G_{mi} & \cdots & B_{mm} & G_{mm} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{rec}} \underbrace{\begin{bmatrix} V_1^{re}[n] \\ V_1^{im}[n] \\ \vdots \\ Q_i[n] \\ V_i^{im}[n] \\ \vdots \\ V_m^{re}[n] \\ V_m^{im}[n] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}[n]} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & G_{ii} & \cdots \\ \cdots & B_{ii} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & G_{mi} & \cdots \\ \cdots & B_{mi} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_{pv}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ V_i^{re}[n] \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^{re}[n]}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{cases} V_1^{esp} - 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases} \\ 0 \\ \vdots \\ \text{Re} \left\{ P_i^{esp} W_i^*[n-1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n-m] \right) - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\} \\ \text{Im} \left\{ P_i^{esp} W_i^*[n-1] - j \left( \sum_{m=1}^{n-1} Q_i[m] W_i^*[n-m] \right) - Y_i^{sh} V_i[n-1] \right\} \\ \vdots \\ \text{Re} \left\{ (P_m^{esp} - jQ_m^{esp}) W_m^*[n-1] - Y_m^{sh} V_m[n-1] \right\} \\ \text{Im} \left\{ (P_m^{esp} - jQ_m^{esp}) W_m^*[n-1] - Y_m^{sh} V_m[n-1] \right\} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}[n]}, \quad n \geq 1.$$

(3.44)

Para um sistema com  $N$  barras, das quais  $N_{PV}$  são do tipo “ $PV$ ”, o sistema em (3.44) pode ser interpretado de forma compacta da seguinte maneira. Denotando o número total de incógnitas por  $N_x = 2N$ , tem-se:

$$\mathbf{Y}_{\text{rec}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}, \quad \mathbf{x}[n] \in \mathbb{R}^{N_x}, \quad \mathbf{Y}_{\text{pv}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_{PV}}, \quad \mathbf{V}^{\text{re}}[n] \in \mathbb{R}^{N_{PV}}, \quad \mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^{N_x}.$$

O vetor de incógnitas  $\mathbf{x}[n]$  reúne todas as variáveis da ordem  $n$ , isto é, as componentes real e imaginária das tensões em todas as barras (*slack*, “ $PQ$ ” e “ $PV$ ”), bem como os coeficientes  $Q_i[n]$  das potências reativas nas barras do tipo “ $PV$ ”. No caso das barras “ $PV$ ”, a componente real  $V_i^{\text{re}}[n]$  não é incluída em  $\mathbf{x}[n]$ , pois é previamente calculada pela expressão geral (3.42), sendo substituída por  $Q_i[n]$  como variável adicional.

A matriz  $\mathbf{Y}_{\text{rec}}$  representa a estrutura recursiva do problema e reúne, em um único bloco, os coeficientes que multiplicam as incógnitas de ordem  $n$ . As duas primeiras linhas correspondem às equações da barra *slack*, derivadas de (3.24), enquanto os demais blocos são obtidos a partir das formulações matriciais das barras do tipo “ $PQ$ ” e “ $PV$ ”, dadas por (3.30) e (3.43), construídas a partir da separação em partes real e imaginária em (3.28)–(3.38). Do ponto de vista numérico,  $\mathbf{Y}_{\text{rec}}$  depende apenas da topologia e da classificação das barras, podendo ser tratada como uma matriz fixa ao longo das recursões.

O termo  $-\mathbf{Y}_{\text{pv}} \mathbf{V}^{\text{re}}[n]$  isola a contribuição das componentes reais das tensões nas barras do tipo “ $PV$ ” na ordem  $n$ . O vetor  $\mathbf{V}^{\text{re}}[n]$  contém os valores  $V_i^{\text{re}}[n]$ ,  $i \in \mathbf{PV}$ , previamente obtidos por (3.42), enquanto a matriz  $\mathbf{Y}_{\text{pv}}$  coleta os coeficientes que, nas equações das barras do tipo “ $PV$ ”, multiplicam essas componentes reais. Dessa forma, todos os termos proporcionais a  $V_i^{\text{re}}[n]$  são remanejados para o segundo membro, passando a ser tratados como termos conhecidos na ordem  $n$ .

Por fim, o vetor  $\mathbf{y}[n]$  agrupa as contribuições de excitação de ordem  $n$ , isto é, todos os termos que dependem apenas de parâmetros do sistema (potências especificadas, admitâncias, tensões de referência) e de coeficientes calculados em ordens anteriores ( $V_i[k]$ ,  $W_i[k]$ ,  $Q_i[k]$  com  $k < n$ ). Nas posições associadas à barra *slack*, aparecem os termos ligados a  $V_1^{\text{esp}}$  conforme (3.24); nas barras do tipo “ $PV$ ” surgem as combinações envolvendo  $P_i^{\text{esp}}$ ,  $Q_i[m]$ ,  $W_i[n - m]$  e  $Y_i^{\text{sh}}$ ; e nas barras do tipo “ $PQ$ ” surgem os termos dependentes de  $P_i^{\text{esp}}$ ,  $Q_i^{\text{esp}}$  e  $Y_i^{\text{sh}}$  avaliados com  $V_i[n - 1]$ . Assim, para cada ordem  $n \geq 1$ , (3.44) reduz-se à solução de um sistema linear com matriz  $\mathbf{Y}_{\text{rec}}$  fixa e termo de excitação dado por  $\mathbf{Y}_{\text{pv}} \mathbf{V}^{\text{re}}[n] + \mathbf{y}[n]$ , permitindo construir recursivamente os coeficientes das séries de Maclaurin até a ordem desejada.

Uma vez obtidos esses coeficientes, a solução do fluxo de potência é recuperada ao se avaliar as tensões em  $\alpha = 1$ . Em alguns casos, a soma parcial da série pode exigir muitos termos para fornecer uma avaliação estável, o que aumenta o custo computacional. Para atenuar esse efeito, empregam-se aproximantes de Padé como técnica de continuação analítica, substituindo-se a série por uma função racional construída a partir dos coeficientes

já calculados. Nesta dissertação, a formulação adotada e o procedimento de obtenção dos coeficientes seguem Subramanian, Feng e Tylavsky (2013) e são apresentados em detalhe no Capítulo 4.

Conforme já discutido, busca-se uma solução precisa, única e estável para as EBPs ao se avaliar, em  $\alpha = 1$ , as funções holomorfas que representam as tensões nodais do sistema. O critério de convergência adotado para o HELM é análogo ao empregado nos métodos clássicos da literatura: ao final de cada recursão, calculam-se os *mismatches* de potência por meio do sistema de Equações (3.45) usando as tensões obtidas na avaliação em  $\alpha = 1$ , e considera-se que a solução foi alcançada quando o maior *mismatch* torna-se inferior a uma tolerância  $\varepsilon$  pré-estabelecida.

$$\begin{cases} \max |\Delta \mathbf{P}, \Delta \mathbf{Q}| \leq \varepsilon. \\ \Delta P_i = P_i^{esp} - P_i^{cal}(V_j(\alpha = 1), \forall j \in \mathbf{N}), \quad \forall i \in \mathbf{PQ} \cup \mathbf{PV}. \\ \Delta Q_i = Q_i^{esp} - Q_i^{cal}(V_j(\alpha = 1), \forall j \in \mathbf{N}), \quad \forall i \in \mathbf{PQ}. \end{cases} \quad (3.45)$$

### 3.1.3 Revisão do Método Holomórfico em Análise de Redes Elétricas

Esta subseção tem como objetivo apresentar a evolução temporal do HELM deste sua idealização até os dias atuais. Como já mencionado neste capítulo, o algoritmo do HELM, proposto por Trias (2012), surge como uma alternativa de solucionador do problema do fluxo de potência. Até então, a principal metodologia aplicada nos cálculos não lineares envolvendo SEPs eram técnicas iterativas, conhecidas pela forte dependência da estimativa que inicializa o algoritmo. Foi nesse cenário em que o HELM ganhou relevância, por se tratar de uma metodologia recursiva que dispensa estimativas iniciais da solução. Além disso, com base nessa pesquisa, diversos pesquisadores buscaram se aprofundar no tema representando uma metodologia alternativa ao tradicional Newton-Raphson usado para cálculo do fluxo de potência.

Quando foi apresentado na literatura, a formulação do HELM tratava de sistemas envolvendo apenas barras de carga. Isso mudou quando Subramanian, Feng e Tylavsky (2013) propuseram a primeira abordagem para incluir barramentos de geração no problema. Assim, reformula-se as restrições dessas barras de modo a contornar a dependência da potência reativa, introduzindo uma nova equação adicional que impõe o controle da magnitude de tensão na barra, permitindo estender o método a redes com múltiplas unidades geradoras.

Um ano depois, com mais detalhes, Subramanian (2014) detalhou, em sua dissertação, outra técnica para adicionar o controle da tensão especificada às barras de carga. A dissertação também compara técnicas iterativas como o clássico método de Newton-Raphson em coordenadas polares com o HELM, evidenciando sua aplicabilidade em SEPs.

A análise das soluções instáveis associadas ao fluxo de potência também passaram a ser objeto de estudos no campo do HELM. O trabalho apresentado por Feng (2015) propôs um procedimento de incorporação holomórfica para obter soluções instáveis durante a resolução do fluxo de potência para redes de baixa tensão, importantes para os estudos de estabilidade e segurança de SEPs.

Em seguida, a escolha da forma como o problema é incorporado com a variável holomórfica passou a ser investigada como um fator determinante para o desempenho do método. Nesse cenário, o trabalho apresentado por Li (2015) analisou o efeito de diferentes formas de incorporação holomórfica no HELM considerando convergência e estabilidade numérica do método. O estudo evidenciou que pequenas modificações na parametrização do problema podem alterar significativamente o número de termos necessários para obter a convergência do problema.

Seguindo a linha evolutiva de pesquisa, a aplicabilidade do HELM foi além das aplicações em sistemas de transmissão, passando a ser explorado também em redes de distribuição, nas quais a estrutura tipicamente radial e múltiplos cenários de carregamento tornam imprescindível o desenvolvimento de abordagens mais eficientes. Nesse contexto, Rao e Tylavsky (2016) propuseram um procedimento de redução de rede no qual um trecho radial a jusante, composto por diversas barras e ramos, é substituído por um equivalente não linear concentrado na barra de conexão, de modo que, ao se aplicar uma tensão nessa barra, o equivalente reproduza o mesmo efeito elétrico. Com isso, mantém-se o impacto desse conjunto de ramais sobre a rede remanescente, reduzindo o porte do problema e tornando mais eficiente a análise em diferentes condições operativas.

Ampliando o escopo inicial do HELM, Trias e Marín (2016) estenderam o método para sistemas em corrente contínua. Por meio de um incorporação holomórfica apropriado, os autores mostram que a abordagem se adapta naturalmente a redes CC, incluindo cenários emergentes em sistemas com presença de elos *High Voltage Direct Current* (HVDC), preservando o caráter construtivo do HELM, isto é, a obtenção a solução estável do sistema quando ela existe.

A incorporação de dispositivos de controle também passou a ser considerada na evolução do HELM. Em (Basiri-kejani; Gholipour, 2017), os autores propõem uma modelagem por incorporação holomórfica para controladores Sistema de Transmissão CA Flexível (FACTS) baseados em tiristores, de modo a representar, no próprio equacionamento do fluxo de potência, as restrições e relações não lineares impostas por esses equipamentos. Com isso, o método passa a contemplar explicitamente a presença de recursos de compensação e controle típicos de sistemas de transmissão, ampliando a aplicabilidade do HELM para estudos em que a operação do sistema é fortemente influenciada por dispositivos eletrônicos de potência.

Além do uso como solucionador do fluxo de potência, o HELM passou a ser

explorado em tarefas de monitoramento em tempo real. Em (Liu *et al.*, 2017a), o método é utilizado para reconstruir a curva  $P-V$  de áreas de carga e estimar a margem até o colapso de tensão, com identificação do ponto de máximo carregamento via aproximantes de Padé.

Na mesma linha das aplicações voltadas à reconstrução da curva  $P-V$  para análise de estabilidade, Wang, Liu e Sun (2018) propuseram uma metodologia para calcular essa curva de forma mais robusta em regiões de carregamento elevado, próximas ao ponto de máximo carregamento. A proposta divide o traçado em múltiplos estágios, combinando etapas de predição e correção, a fim de controlar o erro acumulado sem recorrer a esquemas iterativos tradicionais. Assim, o método busca preservar a precisão do traçado da curva  $P-V$  em condições nas quais abordagens diretas podem perder acurácia.

No contexto da operação, em que a regulação de tensão pode exigir a coordenação de diferentes fontes de geração de reativo, o HELM também foi adaptado para problemas de controle de tensão. Em (Liu *et al.*, 2019), os autores propõem uma abordagem de controle remoto de tensão baseada no HELM, na qual a incorporação holomórfica é combinada com modificações na modelagem de tipos de barra para representar a regulação de tensão em uma barra de escolha por meio de geração de potência reativa de geradores espalhados no sistema. Além disso, é utilizada uma matriz de fatores de participação para distribuir as injeções de potência reativa entre múltiplos geradores, resultando em um esquema coordenado de controle remoto que mantém a tensão especificada no barramento monitorado.

Dando sequência às aplicações do HELM relacionadas à análise de estabilidade de tensão, Chen, Wang e Xu (2020) propuseram o uso do método para o cálculo do fluxo de potência continuado. A abordagem adapta a incorporação holomórfica para traçar a curva  $P-V$  do sistema à medida que um parâmetro de carregamento é variado, permitindo identificar o ponto de máximo carregamento do sistema.

Com o avanço das aplicações do HELM e o crescente interesse da comunidade, também surgiram iniciativas voltadas à disponibilização de ferramentas computacionais acessíveis para sua utilização. Nesse contexto, Molina, Ortega e Muñoz (2021) apresentaram o *HELMpy*, um pacote *open source* desenvolvido em *Python 3* que reúne solucionadores de fluxo de potência, incluindo o HELM. A contribuição do trabalho está em facilitar a reprodução de resultados e a adoção do método em ambientes acadêmicos e de pesquisa, oferecendo uma implementação modular que permite comparar o HELM com solucionadores tradicionais no mesmo arcabouço computacional.

Avançando na direção de aplicações em redes de distribuição, Heidarifar, Andrianesis e Caramanis (2022) estenderam o HELM para o cálculo do fluxo de potência em redes trifásicas desbalanceadas, contemplando explicitamente cargas do tipo *ZIP*. O trabalho adapta a incorporação holomórfica à modelagem trifásica, permitindo representar de forma

mais realista a dependência da potência consumida com a tensão e considerar efeitos de desbalanceamento típicos de sistemas de distribuição. Com isso, a proposta amplia o domínio de aplicação do HELM em cenários de distribuição, aproximando o método de condições operativas mais próximas das redes reais.

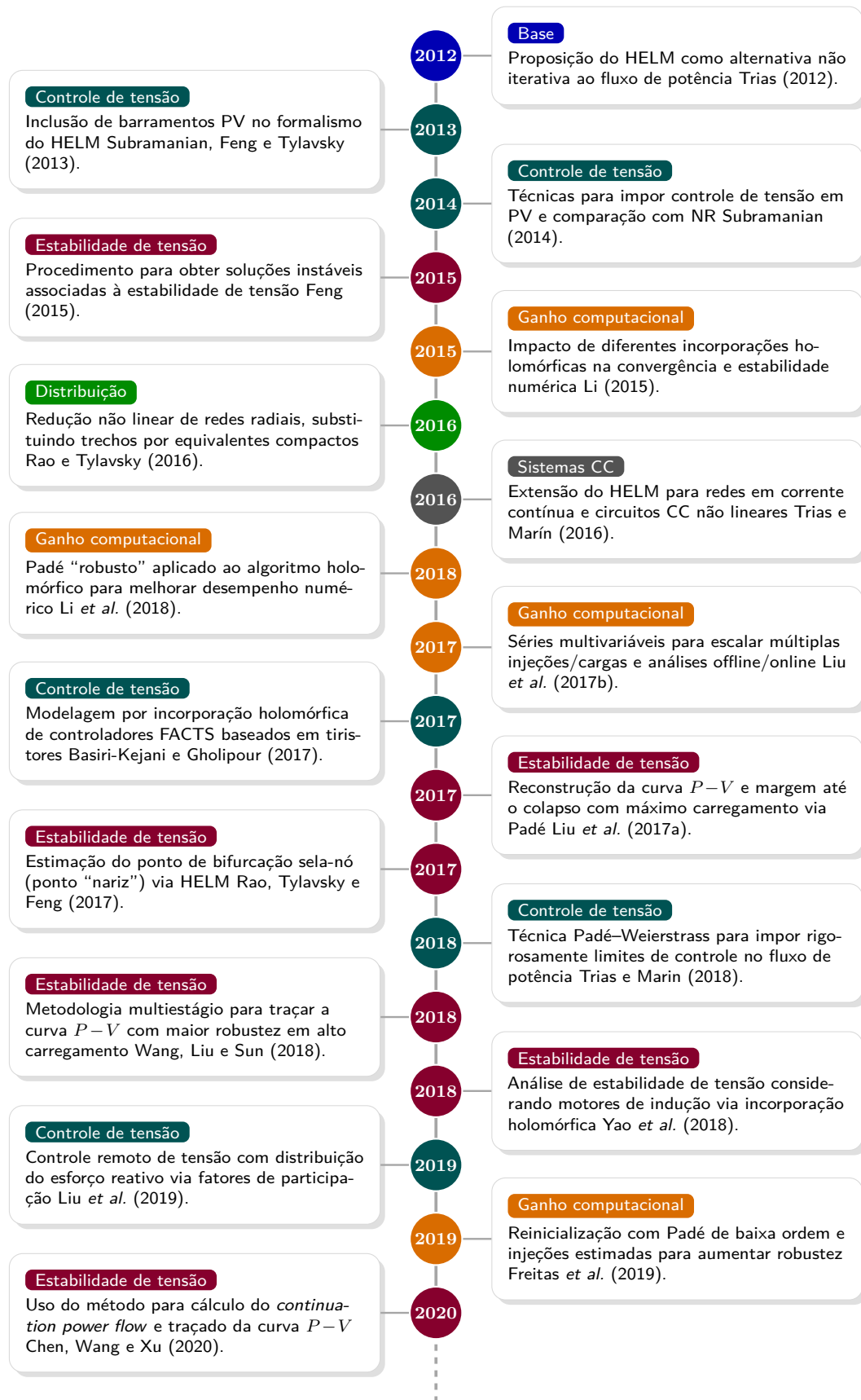
Visando reduzir o esforço computacional em análises de estabilidade de tensão, Sun *et al.* (2023) propôs um método baseado na incorporação holomórfica multidimensional para acelerar a avaliação estática de estabilidade. A ideia central do trabalho foi obter, via HELM, expressões analíticas do fluxo de potência e, a partir delas, derivar *offline* expressões multivariáveis de sensibilidade  $V-Q$ . Em seguida, essas sensibilidades são computadas *online* para diferentes condições de operação, permitindo identificar barras fracas e estimar a proximidade do ponto de colapso de tensão sem a necessidade de recalculá-lo repetidamente o fluxo de potência.

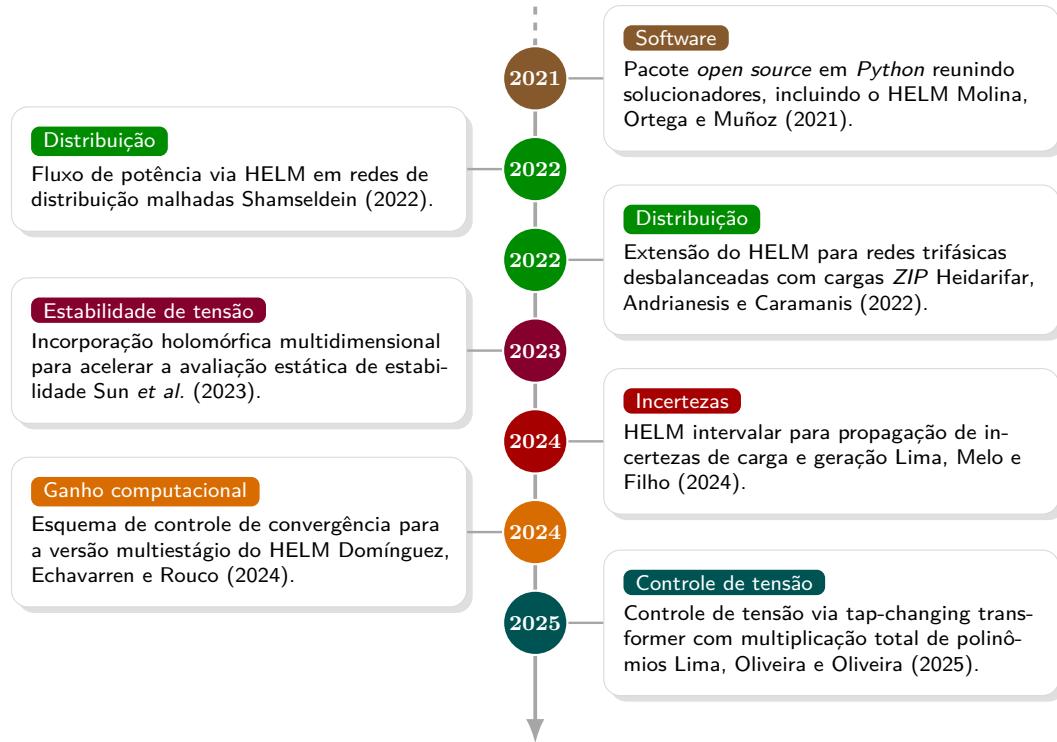
Considerando a necessidade de tratar incertezas inerentes a cargas e geração, Lima, Melo e Filho (2024) propuseram o *Interval Holomorphic Embedding Load Flow Method* como uma extensão do HELM para *análise intervalar*. A abordagem modela demandas e injeções como intervalos, permitindo obter faixas de variação para as variáveis de estado em vez de valores pontuais. Dessa forma, o método fornece uma forma direta de propagar incertezas de carga e geração ao resultado do fluxo de potência, mantendo a estrutura baseada em incorporação holomórfica para avaliar, em um único procedimento, limites superiores e inferiores das grandezas elétricas de interesse.

No contexto de controle de tensão, Lima, Oliveira e Oliveira (2025) propuseram uma estratégia de regulação por transformadores com comutação de taps baseada no HELM. O trabalho incorpora o tap como variável de controle no equacionamento e utiliza uma formulação fundamentada na multiplicação total de polinômios para organizar os termos resultantes da incorporação holomórfica, permitindo atualizar a solução do fluxo de potência sob diferentes posições de tap de forma sistemática. Assim, o método oferece um procedimento direto para ajustar o tap visando atender níveis de tensão especificados, mantendo a estrutura do HELM aplicada a um problema de controle discreto amplamente presente na operação de SEPs.

Em síntese, o HELM evoluiu de um solucionador alternativo de fluxo de potência para uma família de abordagens aplicada a diferentes problemas em SEPs. A Figura 2 destaca de forma visual através de uma linha do tempo a evolução do HELM ao longo do tempo. Destaca-se que as referências citadas aqui representam apenas alguns exemplos dentre os diversos trabalhos publicados entre 2012 e 2026 sobre o tema.

Figura 2 – Linha do tempo de contribuições relacionadas ao HELM.





### 3.2 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi apresentado, de forma detalhada, o método holomórfico aplicado ao problema de fluxo de potência. Esse aprofundamento foi adotado por se tratar de uma abordagem mais recente e menos difundida quando comparada aos métodos clássicos de estimação de estados, servindo também como base para a compreensão da metodologia proposta nos capítulos seguintes. Por fim, foi realizada uma revisão da literatura, sintetizando a evolução e as principais contribuições relacionadas ao tema.

## 4 METODOLOGIA PROPOSTA

Neste capítulo é apresentada a metodologia proposta para a estimação de estados em SEPs, construída a partir da formulação clássica de estimação e dos princípios do HELM aplicado a problemas de redes elétricas. Como, até o momento, não foram identificados na literatura trabalhos específicos de estimação de estados holomórfica, não se apresenta uma revisão dedicada a esse tema, mas sim a consolidação dos fundamentos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Após a fundamentação que abordou a modelagem estatística das medições e a estrutura do estimador por MQP, bem como a formulação holomórfica para o cálculo do fluxo de potência, este capítulo integra esses conceitos em uma abordagem unificada e original, na qual as variáveis de estado são obtidas por meio de uma incorporação holomórfica do problema de estimação de estados.

### 4.1 ESTIMADOR DE ESTADOS HOLOMÓRFICO

Na metodologia proposta neste trabalho, o conjunto de medições é construído para refletir a forma como os dados são efetivamente disponibilizados em SEPs modernos, isto é, a partir de diferentes fontes e tecnologias de aquisição (Cheng *et al.*, 2023; Mingorança; Melo; Santos, 2023). A Equação (4.1) expressa essa ideia ao definir um vetor de medições que integra informações de naturezas distintas. Assim, o vetor inclui medições de potência ativa e reativa líquidas nas barras, bem como medições dos fluxos de potência ativa e reativa nos ramos do sistema, além de medições fasoriais obtidas por *Phasor Measurement Units* (PMUs), representadas pelas componentes real e imaginária dos fasores de tensão e de corrente. Em (4.1),  $\mathbf{z}$  contém  $M$  medições, e  $N$  denota o conjunto das barras do sistema.

$$\mathbf{z} = [V_k^{re}, V_k^{im}, \dots, I_{km}^{re}, I_{km}^{im}, \dots, P_k, Q_k, \dots, P_{km}, Q_{km}]^T, \quad \forall (k, m) \in \mathbf{N}. \quad (4.1)$$

A partir da aquisição de múltiplas medições distribuídas pela rede, torna-se possível inferir o estado operativo do sistema. Neste trabalho, o estado é representado pelo vetor definido na Equação (4.2), no qual  $N$  denota o número total de barras do sistema. Adota-se a representação das variáveis de estado por meio das tensões nodais em coordenadas retangulares, separando-as em suas componentes real e imaginária. O acento circunflexo é empregado para indicar as grandezas estimadas, reunidas no vetor  $\hat{\mathbf{x}}$ .

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{V}_1^{re}, \hat{V}_1^{im}, \hat{V}_2^{re}, \hat{V}_2^{im}, \dots, \hat{V}_N^{re}, \hat{V}_N^{im}]^T. \quad (4.2)$$

Dessa forma, o vetor de estado possui  $2N$  elementos. A partir dessas componentes, a magnitude e o ângulo do fasor de tensão em cada barra podem ser obtidos diretamente por relações algébricas usuais.

#### 4.1.1 Modelagem matemática das medições

No processo de estimação de estados, as medições disponíveis não são utilizadas de forma isolada, elas precisam ser comparadas com valores calculados a partir do modelo elétrico da rede. Por esse motivo, ao lado do vetor de medições  $\mathbf{z}$ , define-se um conjunto de funções de medição  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$ , responsável por mapear o vetor de estados estimado  $\hat{\mathbf{x}}$  para o espaço das grandezas observadas. Em outras palavras, enquanto  $\mathbf{z}$  reúne os valores medidos,  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$  reúne os valores que o modelo prevê para essas mesmas grandezas, e a estimação procura tornar essa diferença a menor possível.

Para ilustrar a construção das funções de medição, considere a medição da potência complexa  $\bar{S}_k$  tomada na barra  $k \in \Omega_{S_k}$ , sendo  $\Omega_{S_k}$  o conjunto de barras com medições de potência. A relação entre essa grandeza e o estado do sistema é descrita pela Equação (4.3), na qual  $\hat{V}_k$  denota o fasor de tensão estimado na barra “ $k$ ” desse mesmo conjunto. Nessa formulação,  $Y_k^{sh}$  representa a admitância *shunt* conectada à barra “ $k$ ”, ao passo que  $Y_{km}^{tr}$  agrega as admitâncias associadas às ligações diretamente conectadas à barra, desconsiderando-se o elemento *shunt*.

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m = \left( \frac{\bar{S}_k}{\hat{V}_k} \right)^* - Y_k^{sh} \hat{V}_k, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.3)$$

As potências ativa e reativa podem ser expressas em função das tensões nodais estimadas do sistema, reunidas no vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$ , a partir das componentes real e imaginária da relação apresentada na Equação (4.4).

$$\bar{S}_k^*(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{V}_k^* \left[ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m + Y_k^{sh} \hat{V}_k \right], \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.4)$$

O valor medido do fluxo de potência complexa no ramo que conecta as barras “ $k$ ” e “ $m$ ” também pode ser expresso diretamente em função das tensões nodais estimadas. A Equação (4.5) formaliza essa relação, incorporando os parâmetros elétricos do ramo: a admitância série  $y_{km}$ , a susceptância *shunt*  $b_{km}^{sh}$  e, quando aplicável, a relação de tap do transformador  $a_{km}$ . Para linhas de transmissão, adota-se  $a_{km} = 1$ , enquanto, para transformadores, considera-se  $b_{km}^{sh} = 0$ . Além disso, define-se  $\Omega_{S_{km}}$  como o conjunto de ramos do sistema que dispõem de medições de fluxo de potência, de modo que (4.5) é aplicada para todo ramo  $(k,m) \in \Omega_{S_{km}}$ .

$$\bar{S}_{km}^*(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{V}_k^* \left[ y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k - \hat{V}_m) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k \right], \quad \forall (k,m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.5)$$

De maneira equivalente, a corrente no ramo “ $km$ ” é obtida a partir da mesma estrutura elétrica, resultando na expressão apresentada na Equação (4.6). Define-se  $\Omega_{I_{km}}$  como o conjunto de ramos do sistema que dispõem de medições de corrente, de modo que (4.6) é aplicada para todo ramo  $(k,m) \in \Omega_{I_{km}}$ .

$$\bar{I}_{km}(\hat{\mathbf{x}}) = y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k - \hat{V}_m) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k, \quad \forall (k,m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.6)$$

Já as medições fasoriais de tensão possuem correspondência imediata com as variáveis de estado, uma vez que o fasor de tensão na barra “ $k$ ” é expresso diretamente por suas componentes em coordenadas retangulares, conforme a Equação (4.7). Define-se  $\Omega_{V_k}$  como o conjunto de barras do sistema que dispõem de medições fasoriais de tensão, de modo que (4.7) é aplicada para toda barra  $k \in \Omega_{V_k}$ .

$$\hat{V}_k(\hat{\mathbf{x}}) = \bar{V}_k^{re} + j\bar{V}_k^{im}, \quad \forall k \in \Omega_{V_k}. \quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Incorporação holomórfica no modelo de medição

Para estimar, de forma recursiva, os elementos do vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$ , faz-se necessária a incorporação holomórfica das equações de medição apresentadas em (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7). Em particular, cada relação que compõe o modelo de medição deve ser reescrita de modo a assegurar a holomorfia das variáveis de estado envolvidas no plano complexo.

Assim como proposto por Trias (2012) na formulação original do HELM, introduz-se nas equações do problema uma variável complexa de incorporação, denotada por  $\alpha$ , com o propósito de construir uma formulação holomórfica para as variáveis de estado a serem estimadas. No método proposto, essa incorporação é implementada ao multiplicar por  $\alpha$  todas as grandezas provenientes do vetor de medições  $\mathbf{z}$ , enquanto as variáveis de estado passam a ser definidas como funções desse parâmetro, isto é,  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ .

Ao aplicar esse modelo de parametrização à (4.4), obtém-se a formulação apresentada na Equação (4.8), que relaciona a medição de  $\bar{S}_k$  ao vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$ . Observa-se que, nessa expressão, o termo  $Y_k^{sh}$  também é multiplicado por  $\alpha$ , pois, embora não constitua uma medição, trata-se de um parâmetro conhecido do sistema.

$$\alpha \bar{S}_k^* = \hat{V}_k^*(\alpha^*) \left[ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m(\alpha) + \alpha Y_k^{sh} \hat{V}_k(\alpha) \right], \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.8)$$

O mesmo procedimento de incorporação holomórfica é aplicado às equações de medição associadas aos fluxos de potência e corrente nos ramos do sistema. Em particular, ao aplicar o modelo de parametrização em (4.5) e (4.6), obtêm-se, respectivamente, as formulações incorporadas apresentadas nas Equações (4.9) e (4.10).

$$\alpha \bar{S}_{km}^* = \hat{V}_k^*(\alpha^*) \left[ y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k(\alpha) + \hat{V}_m(\alpha) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k(\alpha)) \right], \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}, \quad (4.9)$$

$$\alpha \bar{I}_{km} = y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k(\alpha) - \hat{V}_m(\alpha)) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k(\alpha), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.10)$$

Além disso, a equação de medição de tensão no barramento “ $k$ ”, descrita em (4.7), também pode ser incorporada holomorficamente por meio da parametrização apresentada na Equação (4.11).

$$\hat{V}_k(\alpha) = 1 + \alpha (\bar{V}_k - 1), \quad \forall k \in \Omega_{V_k}. \quad (4.11)$$

A Tabela 1 sintetiza as expressões do modelo de medição consideradas neste trabalho, apresentando, para cada tipo de grandeza, a forma clássica e sua correspondente formulação holomórfica.

Tabela 1 – Equações clássicas e holomórficas segundo o tipo de medição.

Medição	Equação clássica	Equação holomórfica
$\bar{V}_k, \forall k \in \Omega_{V_k}$	$\hat{V}_k(\hat{\mathbf{x}}) = \bar{V}_k^{re} + j\bar{V}_k^{im}$	$\hat{V}_k(\alpha) = 1 + \alpha(\bar{V}_k - 1)$
$\bar{S}_k, \forall k \in \Omega_{S_k}$	$\bar{S}_k^*(\hat{\mathbf{x}}) = V_k^* \left[ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m + Y_k^{sh} \hat{V}_k \right]$	$\alpha \bar{S}_k^* = \hat{V}_k^*(\alpha^*) \left[ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m(\alpha) + \alpha Y_k^{sh} \hat{V}_k(\alpha) \right]$
$\bar{S}_{km}, \forall k \in \Omega_{S_{km}}$	$\bar{S}_{km}^*(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{V}_k^* \left[ y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k - \hat{V}_m) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k \right]$	$\alpha \bar{S}_{km}^* = \hat{V}_k^*(\alpha^*) \left[ y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k(\alpha) - \hat{V}_m(\alpha)) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k(\alpha) \right]$
$\bar{I}_{km}, \forall k \in \Omega_{I_{km}}$	$\bar{I}_{km}(\hat{\mathbf{x}}) = y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k - \hat{V}_m) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k$	$\alpha \bar{I}_{km} = y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k(\alpha) - \hat{V}_m(\alpha)) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k(\alpha)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ressalta-se que, assim como na formulação do HELM, existem diferentes estratégias para introduzir o parâmetro de incorporação  $\alpha$  nas equações de estimação de estados. Neste trabalho, adota-se a forma definida na Tabela 1 por assegurar que, ao avaliar  $\alpha = 1$ , todas as grandezas medidas sejam recuperadas sem alterações. Conseqüentemente,  $\hat{\mathbf{x}}(\alpha = 1)$  corresponde à estimativa do estado operativo do sistema obtida pelo método proposto.

Dessa forma, o objetivo central do método consiste em determinar as funções holomorfas  $\hat{V}_k(\alpha)$  para todas as barras  $k$  do conjunto  $\mathbf{N}$ , uma vez que a avaliação em  $\alpha = 1$  fornece diretamente a solução do problema de estimação de estados. Contudo, obter essas funções diretamente a partir das equações incorporadas não é, em geral, simples. Por essa razão, elas são representadas por meio de expansões em séries de Maclaurin.

### 4.1.3 Séries de Maclaurin

O fato de as tensões estimadas serem, por definição, funções holomorfas permite representá-las por meio de séries de Maclaurin, que constituem um caso particular das séries de Taylor, conforme indicado na Equação (4.12). Com essa representação, o problema de estimação de estados pode ser reinterpretado como a determinação dos coeficientes da expansão, isto é, dos  $n$  termos que compõem cada série.

$$\hat{V}_k(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{V}_k[n] \alpha^n = \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1] \alpha + \hat{V}_k[2] \alpha^2 + \dots, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (4.12)$$

Uma vez obtidas essas expansões para todas as barras  $k \in \mathbf{N}$ , a estimativa do estado operativo é recuperada avaliando-se as séries em  $\alpha = 1$ , o que, na prática, equivale

a somar os  $n$  termos calculados, obtendo-se então  $\hat{V}_k(\alpha = 1)$  para cada barra.

#### 4.1.3.1 Solução germinal

Assim como na formulação original do HELM, para iniciar o processo recursivo de determinação dos  $n$  termos que compõem (4.12) é necessário definir uma condição inicial para o parâmetro de incorporação  $\alpha$ . Essa condição, denominada solução germinal, é obtida avaliando-se o modelo de medições no ponto  $\alpha = 0$ .

##### 4.1.3.1.1 Solução germinal: medições de tensão

Considerando a modelagem holomorfa para uma medição de tensão  $V_k$ , conforme descrito em (4.11), e aplicando a expansão sem séries de Maclaurin proposta em (4.12) para as funções de tensão obtém-se:

$$\hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots = 1 + \alpha (\bar{V}_k - 1), \quad \forall k \in \Omega_{V_k}. \quad (4.13)$$

Substituindo  $\alpha = 0$  na Equação (4.13), obtém-se o termo inicial da expansão em série que descreve as tensões nas barras para as quais há medição de tensão:

$$\hat{V}_k[0] = 1, \quad \forall k \in \Omega_{V_k}. \quad (4.14)$$

##### 4.1.3.1.2 Solução germinal: medições de potência

Aplicando-se o mesmo procedimento de expansão em séries de Maclaurin ao modelo de medição de potência líquida nas barras  $k \in \Omega_{S_k}$ , obtém-se a relação apresentada na Equação (4.15).

$$\begin{aligned} \alpha \bar{S}_k^* = & \left( \hat{V}_k^*[0] + \hat{V}_k^*[1]\alpha + \dots \right) \left[ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \left( \hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1]\alpha + \dots \right) \right. \\ & \left. + \alpha Y_k^{sh} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right) \right], \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Avaliando-se (4.15) em  $\alpha = 0$ , chega-se a:

$$0 = \hat{V}_k^*[0] \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[0], \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.16)$$

A Equação (4.16) impõe que o produto entre  $\hat{V}_k^*[0]$  e o termo  $\sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[0]$  seja nulo. Para que isso ocorra, é necessário que pelo menos um desses fatores seja igual a zero. Entretanto, impor  $\hat{V}_k^*[0] = 0$  não é compatível com a premissa de solução germinal adotada no HELM, na qual essa solução representa um estado do sistema energizado em

vazio de carga, com tensões bem definidas. Assim, por conveniência e coerência com essa interpretação, adota-se a condição de que o termo do somatório seja nulo, isto é:

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[0] = 0, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.17)$$

Essa condição pode ser interpretada como um equilíbrio elétrico no qual não há injeções equivalentes de corrente associadas às medições de potência, caracterizando a condição de vazio de carga. Sob a hipótese usual de que a rede é conectada e de que a matriz de admitâncias de transmissão  $\mathbf{Y}^{tr}$  é composta apenas por admitâncias série (isto é, não inclui admitâncias de derivação), esse equilíbrio só é possível quando todas as tensões nodais do sistema compartilham o mesmo valor complexo.

Como na seção anterior foi estabelecido que  $\hat{V}_k[0] = 1$  para as barras com medição de tensão, isto é,  $\forall k \in \Omega_{V_k}$ , conclui-se que a constante comum associada à solução germinal para as séries de Maclaurin das tensões nodais estimadas em todas as barras deve assumir esse mesmo valor. Sendo assim:

$$\hat{V}_k[0] = 1, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (4.18)$$

#### 4.1.3.1.3 *Solução germinal: medições de fluxo de potência*

A escolha  $\hat{V}_k[0] = 1, \forall k \in \mathbf{N}$ , mostrou-se consistente para iniciar a expansão recursiva quando se tratam medições nodais, como tensão e potência líquida. Entretanto, ao considerar medições de fluxo de potência em ramos, surge uma particularidade importante. Mesmo sob a solução germinal, a modelagem do ramo pode prever uma contribuição não nula associada ao elemento *shunt* da linha e, em certos casos, ao tap do transformador. Essa característica torna-se evidente ao aplicar a representação em séries diretamente na equação incorporada de fluxo.

Partindo-se de (4.9) e substituindo as funções das tensões estimadas por suas expansões em série com em (4.12), obtém-se a forma expandida do modelo de medição de  $\bar{S}_{km}$ :

$$\begin{aligned} \alpha \bar{S}_{km}^* &= \left( \hat{V}_k^*[0] + \hat{V}_k^*[1]\alpha + \dots \right) \left[ y_{km} a_{km} \left( a_{km} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1]\alpha + \dots \right) \right) + j b_{km}^{sh} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right) \right], \quad (4.19) \\ &\quad \forall (k,m) \in \Omega_{S_{km}}. \end{aligned}$$

Avalia-se a Equação (4.19) em  $\alpha = 0$ . Como  $\alpha \bar{S}_{km}^* \Big|_{\alpha=0} = 0$ ,  $\hat{V}_k(0) = \hat{V}_k[0]$  e  $\hat{V}_m(0) = \hat{V}_m[0]$ , resulta:

$$0 = \hat{V}_k^*[0] \left[ y_{km} a_{km} \left( a_{km} \hat{V}_k[0] - \hat{V}_m[0] \right) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k[0] \right], \quad \forall (k,m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.20)$$

Aplicando-se agora a solução germinal previamente definida,  $\hat{V}_k[0] = \hat{V}_m[0] = 1$ , obtém-se a condição implícita:

$$0 = y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) + j b_{km}^{sh}, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.21)$$

A Equação (4.21) evidencia que, mantendo-se a incorporação (4.9) tal como está, a condição germinal  $\hat{V}_k[0] = 1$ ,  $\forall k \in \mathbf{N}$  não torna automaticamente nula a expressão do modelo para o fluxo em ramos. De fato, em linhas de transmissão considera-se na equação  $a_{km} = 1$ , o que anula o termo série, mas permanece a contribuição do *shunt*. Por outro lado, em transformadores é comum adotar  $b_{km}^{sh} = 0$ , porém taps diferentes de 1 fazem com que o termo  $y_{km} a_{km} (a_{km} - 1)$  não se anule.

Para eliminar a inconsistência observada no ponto  $\alpha = 0$ , introduz-se uma função auxiliar holomorfa, denotada por  $S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$ , incorporada ao modelo do fluxo no ramo. Essa função é definida de modo a compensar, na condição germinal, os incrementos associados aos elementos do ramo que permanecem não nulos. Com isso, a equação incorporada para a medição de  $\bar{S}_{km}$  passa a ser escrita como:

$$\alpha \bar{S}_{km}^* = V_k^*(\alpha^*) \left[ y_{km} a_{km} (a_{km} V_k(\alpha) - V_m(\alpha)) + j b_{km}^{sh} V_k(\alpha) \right] + S_{km}^{\text{incr}}(\alpha), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.22)$$

Por ser holomorfa por definição, a função  $S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$  admite representação em série de Maclaurin, de forma análoga às tensões estimadas.

$$S_{km}^{\text{incr}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{km}^{\text{incr}} \alpha^n = S_{km}^{\text{incr}}[0] + S_{km}^{\text{incr}}[1] \alpha + S_{km}^{\text{incr}}[2] \alpha^2 + \dots, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.23)$$

Substituindo-se a expansão (4.23), juntamente com a representação em séries das tensões estimadas no modelo (4.22), tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{S}_{km}^* = & \left( \hat{V}_k^*[0] + \hat{V}_k^*[1] \alpha^* + \dots \right) \left[ y_{km} a_{km} \left( a_{km} (\hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1] \alpha + \dots) \right. \right. \\ & \left. \left. - (\hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1] \alpha + \dots) \right) + j b_{km}^{sh} (\hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1] \alpha + \dots) \right] \\ & + \left( S_{km}^{\text{incr}}[0] + S_{km}^{\text{incr}}[1] \alpha + \dots \right), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aplicando-se a condição de solução germinal, isto é, avaliando a Equação (4.24) em  $\alpha = 0$ , e utilizando o resultado previamente estabelecido de que  $\hat{V}_k[0] = 1$  para todas as barras  $k \in \mathbf{N}$ , determina-se diretamente o primeiro coeficiente da série associada a  $S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$ . Em particular, impõe-se que o modelo satisfaça a condição germinal, o que conduz a:

$$S_{km}^{\text{incr}}[0] = -y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) - j b_{km}^{sh}, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.25)$$

#### 4.1.3.1.4 *Solução germinal: medições de corrente em ramos*

De forma análoga ao caso das medições de fluxo de potência, a incorporação holomórfica da corrente no ramo “ $km$ ” pode apresentar uma inconsistência em  $\alpha = 0$  quando se adota a condição  $\hat{V}_k[0] = 1, \forall k \in \mathbf{N}$ . Isso ocorre porque a expressão de  $\bar{I}_{km}$  inclui contribuições estruturais do ramo associadas ao tap  $a_{km}$  e ao termo *shunt*  $b_{km}^{sh}$ , as quais não se anulam automaticamente sob a condição estabelecida.

Para contornar essa inconsistência, introduz-se uma função holomorfa auxiliar, denotada por  $I_{km}^{incr}(\alpha)$ , a qual é incorporada ao modelo de medição da corrente no ramo. Essa função é definida de forma a compensar, na condição germinal, os incrementos associados ao tap e ao elemento *shunt* do ramo. Assim, a equação incorporada correspondente à medição de  $\bar{I}_{km}$  passa a ser expressa por:

$$\alpha \bar{I}_{km} = y_{km} a_{km} \left( a_{km} V_k(\alpha) - V_m(\alpha) \right) + j b_{km}^{sh} V_k(\alpha) + I_{km}^{incr}(\alpha), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.26)$$

Como  $I_{km}^{incr}(\alpha)$  é holomorfa por definição, ela admite expansão em série de Maclaurin. Assim, escreve-se:

$$I_{km}^{incr}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{km}^{incr} \alpha^n = I_{km}^{incr}[0] + I_{km}^{incr}[1] \alpha + I_{km}^{incr}[2] \alpha^2 + \dots, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.27)$$

Substituindo-se a expansão (4.27), juntamente com a representação em séries das tensões estimadas no modelo (4.26), tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{I}_{km} = y_{km} a_{km} & \left[ a_{km} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1] \alpha + \dots \right) \right. \\ & \left. - \left( \hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1] \alpha + \dots \right) \right] + j b_{km}^{sh} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1] \alpha + \dots \right) \\ & + \left( I_{km}^{incr}[0] + I_{km}^{incr}[1] \alpha + \dots \right), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ao impor a condição germinal  $\alpha = 0$  em (4.28) e utilizar  $\hat{V}_k[0] = \hat{V}_m[0] = 1$ , determina-se diretamente o termo de ordem zero da função auxiliar, obtendo-se:

$$I_{km}^{incr}[0] = -y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) - j b_{km}^{sh}, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.29)$$

Com essa escolha, o modelo incorporado passa a satisfazer a condição germinal e permanece compatível com a expansão recursiva adotada para as tensões nodais. Assim, ao final desta etapa, ficam estabelecidos tanto o coeficiente de ordem zero das tensões quanto os termos iniciais das funções auxiliares associadas às medições em ramos. A Tabela 2 resume essas condições germinais e serve como referência para o desenvolvimento das relações recursivas de ordens superiores apresentado na sequência.

Tabela 2 – Resumo das condições germinais das funções holomorfas.

Função holomorfa	Solução germinal (coeficiente de ordem zero)
$\hat{V}_k(\alpha)$	$\hat{V}_k[0] = 1, \quad \forall k \in \mathbf{N}$
$S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$	$S_{km}^{\text{incr}}[0] = -y_{km}a_{km}(a_{km} - 1) - j b_{km}^{\text{sh}}, \quad \forall (k,m) \in \Omega_{S_{km}}$
$I_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$	$I_{km}^{\text{incr}}[0] = -y_{km}a_{km}(a_{km} - 1) - j b_{km}^{\text{sh}}, \quad \forall (k,m) \in \Omega_{I_{km}}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

#### 4.1.3.2 Termos de ordem superior

Com a condição germinal já determinada, o ponto de partida do processo recursivo fica completamente definido. Em particular, dispõem-se dos coeficientes de ordem zero das séries associadas às tensões estimadas e dos termos iniciais das funções auxiliares  $S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$  e  $I_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$ , os quais são sintetizados na Tabela 2. A etapa seguinte da metodologia proposta consiste em derivar relações recursivas capazes de computar os coeficientes de ordem superior ( $n \geq 1$ ) das expansões dessas funções. Para isso, desenvolvem-se algebricamente as expressões incorporadas (4.13), (4.15), (4.24) e (4.28), de modo a explicitar como os termos de cada ordem se relacionam.

##### 4.1.3.2.1 Desenvolvimento matemático: medição de tensão

A determinação dos coeficientes de ordem  $n \geq 1$  das expansões associadas às tensões estimadas nas barras com medição de tensão ( $k \in \Omega_{V_k}$ ) decorre diretamente de (4.13) pela comparação de coeficientes de mesma potência de  $\alpha$ : como essa igualdade deve valer termo a termo, e o lado direito contém apenas um termo constante e um termo linear em  $\alpha$ , conclui-se que o coeficiente de primeira ordem é dado por  $\bar{V}_k - 1$  e que não há contribuição para ordens superiores, isto é,  $\hat{V}_k[1] = \bar{V}_k - 1$  e  $\hat{V}_k[n] = 0$  para todo  $n > 1$ , resultando em:

$$\hat{V}_k[n] = \begin{cases} \bar{V}_k - 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1, \end{cases} \quad \forall k \in \Omega_{V_k}. \quad (4.30)$$

##### 4.1.3.2.2 Desenvolvimento matemático: medição de potência

Para estender o procedimento de comparação de coeficientes à Equação (4.15), reescreve-se inicialmente o modelo em uma forma que explicita o quociente envolvendo a potência medida e a tensão estimada. Essa reorganização conduz a (4.31), na qual o membro esquerdo permanece como uma combinação linear das tensões nodais, enquanto o

membro direito evidencia a razão entre  $\bar{S}_k$  e a expansão associada a  $\hat{V}_k$ :

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \left( \hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1]\alpha + \dots \right) = \frac{\alpha \bar{S}_k^*}{\left( \hat{V}_k^*[0] + \hat{V}_k^*[1]\alpha^* + \dots \right)} - \alpha Y_k^{sh} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right), \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.31)$$

A presença de uma série no denominador em (4.31) impede a extração direta dos coeficientes por ordem. Para contornar esse ponto, adota-se a estratégia clássica do HELM e introduz-se a função recíproca da tensão estimada,  $\hat{W}_k(\alpha)$ , definida por  $\hat{W}_k(\alpha) = 1/\hat{V}_k(\alpha)$ . Por ser holomorfa, essa função também admite representação em série de Maclaurin:

$$\hat{W}_k[0] + \hat{W}_k[1]\alpha + \dots = \frac{1}{\hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots}, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (4.32)$$

Como a solução germinal das tensões foi estabelecida por  $\hat{V}_k[0] = 1$ , conclui-se imediatamente que  $\hat{W}_k[0] = 1/\hat{V}_k[0] = 1$ , para todo  $k \in \mathbf{N}$ . Já para  $n \geq 1$ , os coeficientes de  $\hat{W}_k(\alpha)$  são obtidos de forma recursiva a partir da identidade  $\hat{V}_k(\alpha)\hat{W}_k(\alpha) \equiv 1$ , impondo a igualdade ordem a ordem em  $\alpha$ . A derivação completa dessa expressão encontra-se no Capítulo 3, culminando na relação geral:

$$\hat{W}_k[n] = -\frac{1}{\hat{V}_k[0]} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{V}_k[n-m] \hat{W}_k[m], \quad n \geq 1, \forall k \in \mathbf{N}. \quad (4.33)$$

Com a introdução de  $\hat{W}_k(\alpha)$ , o quociente em (4.31) é convertido em um produto, o que torna a comparação de coeficientes imediata. Substituindo-se a definição de  $\hat{W}_k(\alpha)$ , obtém-se:

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \left( \hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1]\alpha + \dots \right) = \alpha \bar{S}_k^* \left( \hat{W}_k^*[0] + \hat{W}_k^*[1]\alpha^* + \dots \right) - \alpha Y_k^{sh} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right), \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.34)$$

A partir de (4.34), impõe-se que a igualdade seja satisfeita ordem a ordem em  $\alpha$ . Como o termo de ordem zero já é atendido pela solução germinal, compara-se a partir de  $n \geq 1$ , obtendo-se o padrão ilustrado em (4.35):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[1] &= \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[0] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[0], \\ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[2] &= \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[1], \\ \sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[3] &= \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[2] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[2], \\ &\vdots \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Observa-se que, para toda ordem  $n \geq 1$ , o membro esquerdo envolve exclusivamente as incógnitas daquela ordem,  $\hat{V}_m[n]$ , enquanto o membro direito é formado apenas por

coeficientes já disponíveis de ordens anteriores. Assim, o padrão acima pode ser sintetizado na forma recursiva:

$$\sum_{m=1}^N Y_{km}^{tr} \hat{V}_m[n] = \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1], \quad n \geq 1, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \quad (4.36)$$

Portanto, para cada ordem  $n$ , a Equação (4.36) define um sistema linear cujas incógnitas são os coeficientes  $\hat{V}_m[n]$ . Em contrapartida, o termo independente é construído com base nos coeficientes já determinados na ordem anterior,  $\hat{V}_k[n-1]$ , e nos coeficientes correspondentes da função recíproca,  $\hat{W}_k[n-1]$ , obtidos via (4.33).

Por fim, para explicitar separadamente as componentes real e imaginária das tensões, decompõe-se  $Y_{km}^{tr} = G_{km} + jB_{km}$  e  $\hat{V}_m[n] = \hat{V}_m^{re}[n] + j\hat{V}_m^{im}[n]$ . Substituindo-se essas representações em (4.36) e reorganizando os termos, chega-se à forma complexa:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N (G_{km} \hat{V}_m^{re}[n] - B_{km} \hat{V}_m^{im}[n]) + j(G_{km} \hat{V}_m^{im}[n] + B_{km} \hat{V}_m^{re}[n]) = \\ \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1], \quad n \geq 1, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

A partir de (4.37), a separação em partes real e imaginária produz dois sistemas lineares acoplados:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N (G_{km} \hat{V}_m^{re}[n] - B_{km} \hat{V}_m^{im}[n]) = \operatorname{Re}\{\bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1]\}, \\ n \geq 1, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N (G_{km} \hat{V}_m^{im}[n] + B_{km} \hat{V}_m^{re}[n]) = \operatorname{Im}\{\bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1]\}, \\ n \geq 1, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Em forma matricial, (4.38) e (4.39) podem ser reunidas como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{k1} & -B_{k1} & \cdots & G_{kN} & -B_{kN} \\ B_{k1} & G_{k1} & \cdots & B_{kN} & G_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_1^{re}[n] \\ \hat{V}_1^{im}[n] \\ \vdots \\ \hat{V}_N^{re}[n] \\ \hat{V}_N^{im}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1]\} \\ \operatorname{Im}\{\bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1]\} \end{bmatrix}, \\ n \geq 1, \quad \forall k \in \Omega_{S_k}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

#### 4.1.3.2.3 *Desenvolvimento matemático: medição de fluxo de potência*

O desenvolvimento recursivo para medições de fluxo de potência em ramos segue o mesmo princípio adotado na medição de potência líquida, a equação incorporada deve

ser satisfeita ordem a ordem na variável de incorporação. Parte-se da expressão em série do modelo com termo auxiliar, apresentada em (4.24). Para tornar a comparação de coeficientes operacional, é conveniente explicitar o fator associado à tensão conjugada no ramo, isto é,  $\hat{V}_k^*(\alpha^*) = \hat{V}_k^*[0] + \hat{V}_k^*[1]\alpha^* + \dots$ , de modo que ele passe a ficar no denominador.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \bar{S}_{km}^*}{\left(\hat{V}_k^*[0] + \hat{V}_k^*[1]\alpha^* + \dots\right)} &= y_{km} a_{km} \left( a_{km} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \hat{V}_m[0] + \hat{V}_m[1]\alpha + \dots \right) \right) + j b_{km}^{sh} \left( \hat{V}_k[0] + \hat{V}_k[1]\alpha + \dots \right) \\ &\quad + \left( S_{km}^{\text{incr}}[0] + S_{km}^{\text{incr}}[1]\alpha + \dots \right), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A presença de  $S_{km}^{\text{incr}}(\alpha)$  é indispensável para garantir consistência no ponto germinal  $\alpha = 0$ . Contudo, para que o método mantenha consistência, é necessário garantir que, ao avaliar  $\alpha = 1$ , o modelo do fluxo seja recuperado exatamente como na formulação original. Em outras palavras, impõe-se que o termo auxiliar não altere a equação quando  $\alpha = 1$ , o que é obtido exigindo-se

$$S_{km}^{\text{incr}}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{km}^{\text{incr}}[n] = 0, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.42)$$

Como já estabelecido na análise da solução germinal, o coeficiente de ordem zero é dado por  $S_{km}^{\text{incr}}[0] = -y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) - j b_{km}^{sh}$ . Uma escolha simples e suficiente para satisfazer (4.42) consiste em concentrar a compensação apenas nos dois primeiros termos da série, definindo  $S_{km}^{\text{incr}}[1] = -S_{km}^{\text{incr}}[0]$  e anulando os demais coeficientes. Assim, obtém-se:

$$S_{km}^{\text{incr}}[n] = \begin{cases} -y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) - j b_{km}^{sh}, & n = 0, \\ y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) + j b_{km}^{sh}, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases} \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.43)$$

Com (4.43) definido, procede-se à comparação de coeficientes em (4.41). Para isso, utiliza-se novamente a função recíproca  $\hat{W}_k(\alpha) = 1/\hat{V}_k(\alpha)$ , de modo que a contribuição associada a  $\hat{V}_k^*(\alpha^*)$  seja manipulada em termos de um produto. A imposição da igualdade ordem a ordem conduz, para cada  $n \geq 1$ , à relação recursiva:

$$y_{km} a_{km} \left( a_{km} \hat{V}_k[n] - \hat{V}_m[n] \right) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k[n] = \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{\text{incr}}[n], \quad n \geq 1, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{S_{km}}. \quad (4.44)$$

Na Equação (4.44), em cada ordem  $n$ , o membro esquerdo envolve apenas os coeficientes de tensão dessa própria ordem, enquanto o membro direito é montado com termos já conhecidos das ordens anteriores e com o coeficiente correspondente da função auxiliar. Para trabalhar essa relação de forma mais direta, escreve-se a admitância do ramo como  $y_{km} = g_{km} + j b_{km}$  e, em seguida, separa-se a equação complexa em suas partes

real e imaginária. Com isso, chega-se ao sistema linear acoplado apresentado nas Equações (4.45) e (4.46).

$$\begin{aligned} & \hat{V}_k^{re}[n](a_{km}^2 g_{km}) + \hat{V}_k^{im}[n](-a_{km}^2 b_{km} - b_{km}^{sh}) + \hat{V}_m^{re}[n](-a_{km} g_{km}) + \hat{V}_m^{im}[n](a_{km} b_{km}) = \\ & \text{Re} \left\{ \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{incr}[n] \right\}, \quad n \geq 1, \quad \forall (k,m) \in \Omega_{S_{km}}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} & \hat{V}_k^{re}[n](a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh}) + \hat{V}_k^{im}[n](a_{km}^2 g_{km}) + \hat{V}_m^{re}[n](-a_{km} b_{km}) + \hat{V}_m^{im}[n](-a_{km} g_{km}) = \\ & \text{Im} \left\{ \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{incr}[n] \right\}, \quad n \geq 1, \quad \forall (k,m) \in \Omega_{S_{km}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por fim, escrevendo (4.45) (4.46) em formato matricial, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{km}^2 g_{km} & -a_{km}^2 b_{km} - b_{km}^{sh} & -a_{km} g_{km} & a_{km} b_{km} \\ a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh} & a_{km}^2 g_{km} & -a_{km} b_{km} & -a_{km} g_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_k^{re}[n] \\ \hat{V}_k^{im}[n] \\ \hat{V}_m^{re}[n] \\ \hat{V}_m^{im}[n] \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{incr}[n] \right\} \\ \text{Im} \left\{ \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{incr}[n] \right\} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1, \quad \forall k \in \Omega_{S_{km}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

#### 4.1.3.2.4 *Desenvolvimento matemático: medição de corrente em ramos*

O desenvolvimento recursivo para medições de corrente em ramos segue, o mesmo procedimento adotado para as medições de fluxo de potência, a igualdade incorporada deve ser satisfeita ordem a ordem em  $\alpha$ . Parte-se do modelo holomórfico com termo auxiliar, expresso em série em (4.28), no qual  $I_{km}^{incr}(\alpha)$  foi introduzida para eliminar a inconsistência na condição germinal.

Entretanto, além de garantir consistência em  $\alpha = 0$ , é necessário preservar a interpretação operacional do método: ao avaliar  $\alpha = 1$ , o modelo deve reproduzir exatamente a equação física original associada à medição. Isso implica que o termo auxiliar não pode alterar o valor do modelo no ponto de operação. Uma escolha simples e suficiente é construir  $I_{km}^{incr}(\alpha)$  de modo que apenas os dois primeiros coeficientes sejam não nulos, com sinais opostos, anulando-se em  $\alpha = 1$ . Como o termo de ordem zero já foi determinado na seção anterior,  $I_{km}^{incr}[0] = -y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) - j b_{km}^{sh}$  define-se, então,

$$I_{km}^{incr}[n] = \begin{cases} -y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) - j b_{km}^{sh}, & n = 0, \\ y_{km} a_{km} (a_{km} - 1) + j b_{km}^{sh}, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases} \quad \forall (k,m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.48)$$

A partir de (4.28), obtêm-se as relações recursivas da medição de corrente impondo que a igualdade seja satisfeita coeficiente a coeficiente na expansão em  $\alpha$ . Observa-se que o termo medido aparece no membro esquerdo na forma  $\alpha \bar{I}_{km}$  e, portanto, contribui apenas

para o coeficiente de primeira ordem: ao expandir  $\alpha \bar{I}_{km}$  em série, tem-se coeficiente nulo para  $n \neq 1$  e coeficiente igual a  $\bar{I}_{km}$  para  $n = 1$ . Para representar esse comportamento de maneira compacta, introduz-se a função indicadora  $\delta_n$ , definida em (4.50). Assim, ao comparar os termos de mesma ordem em  $\alpha$  para cada  $n \geq 1$ , obtém-se uma equação linear em  $\hat{V}_k[n]$  e  $\hat{V}_m[n]$  no membro esquerdo, enquanto o membro direito reúne a contribuição do termo medido e o coeficiente correspondente da função auxiliar. Dessa forma, resulta:

$$y_{km} a_{km} (a_{km} \hat{V}_k[n] - \hat{V}_m[n]) + j b_{km}^{sh} \hat{V}_k[n] = \delta_n (\bar{I}_{km} - I_{km}^{incr}[n]), \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \quad (4.49)$$

$$\delta_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases} \quad (4.50)$$

Como a Equação (4.49) é complexa, separa-se a igualdade em duas expressões reais, correspondentes às partes real e imaginária. Com isso, obtém-se um par de equações lineares acopladas, uma para cada componente:

$$\begin{aligned} & \hat{V}_k^{re}[n](a_{km}^2 g_{km}) + \hat{V}_k^{im}[n](-a_{km}^2 b_{km} - b_{km}^{sh}) + \hat{V}_m^{re}[n](-a_{km} g_{km}) + \hat{V}_m^{im}[n](a_{km} b_{km}) = \\ & \text{Re} \left\{ \delta_n (\bar{I}_{km} - I_{km}^{incr}[n]) \right\}, \quad n \geq 1, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & \hat{V}_k^{re}[n](a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh}) + \hat{V}_k^{im}[n](a_{km}^2 g_{km}) + \hat{V}_m^{re}[n](-a_{km} b_{km}) + \hat{V}_m^{im}[n](-a_{km} g_{km}) = \\ & \text{Im} \left\{ \delta_n (\bar{I}_{km} - I_{km}^{incr}[n]) \right\}, \quad n \geq 1, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Em formato matricial as Equações (4.51) e (4.52) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{km}^2 g_{km} & -a_{km}^2 b_{km} - b_{km}^{sh} & -a_{km} g_{km} & a_{km} b_{km} \\ a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh} & a_{km}^2 g_{km} & -a_{km} b_{km} & -a_{km} g_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_k^{re}[n] \\ \hat{V}_k^{im}[n] \\ \hat{V}_m^{re}[n] \\ \hat{V}_m^{im}[n] \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \text{Re} \left\{ \delta_n (\bar{I}_{km} - I_{km}^{incr}[n]) \right\} \\ \text{Im} \left\{ \delta_n (\bar{I}_{km} - I_{km}^{incr}[n]) \right\} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1, \quad \forall (k, m) \in \Omega_{I_{km}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

### 4.1.3.3 Técnica de Solução Matricial Direta

Combinando (4.30), (4.40), (4.47) e (4.53), é possível montar o seguinte sistema de equações matricial:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & G_{kk} & -B_{kk} & \cdots & G_{km} & -B_{km} & \cdots & G_{kN} & -B_{kN} \\
 \cdots & B_{kk} & G_{kk} & \cdots & B_{km} & G_{km} & \cdots & B_{kN} & G_{kN} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & a_{km}^2 g_{km} & -a_{km}^2 b_{km} - b_{km}^{sh} & \cdots & -a_{km} g_{km} & a_{km} b_{km} & \cdots & 0 & 0 \\
 \cdots & a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh} & a_{km}^2 g_{km} & \cdots & -a_{km} b_{km} & -a_{km} g_{km} & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & a_{km}^2 g_{km} & -a_{km}^2 b_{km} - b_{km}^{sh} & \cdots & -a_{km} g_{km} & a_{km} b_{km} & \cdots & 0 & 0 \\
 \cdots & a_{km}^2 b_{km} + b_{km}^{sh} & a_{km}^2 g_{km} & \cdots & -a_{km} b_{km} & -a_{km} g_{km} & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \right] \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hat{V}_k^{re}[n] \\
 \hat{V}_k^{im}[n] \\
 \vdots \\
 \hat{V}_m^{re}[n] \\
 \hat{V}_m^{im}[n] \\
 \vdots \\
 \hat{V}_N^{re}[n] \\
 \hat{V}_N^{im}[n] \\
 \underbrace{\hat{\mathbf{x}}[n]}
 \end{array} \\
 \mathbf{H} \\
 = \left[ \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \text{Re} \left\{ \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1] \right\} \\
 \text{Im} \left\{ \bar{S}_k^* \hat{W}_k^*[n-1] - Y_k^{sh} \hat{V}_k[n-1] \right\} \\
 \vdots \\
 \text{Re} \left\{ \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{inc}[n] \right\} \\
 \text{Im} \left\{ \bar{S}_{km}^* \hat{W}_k^*[n-1] - S_{km}^{inc}[n] \right\} \\
 \vdots \\
 \delta_n \left( \text{Re} \left\{ \bar{I}_{km} - I_{km}^{inc}[n] \right\} \right) \\
 \delta_n \left( \text{Im} \left\{ \bar{I}_{km} - I_{km}^{inc}[n] \right\} \right) \\
 \vdots \\
 \delta_n \left( \text{Re} \left\{ \bar{V}_k - 1 \right\} \right) \\
 \delta_n \left( \text{Im} \left\{ \bar{V}_k - 1 \right\} \right) \\
 \vdots
 \end{array} \right], \quad n \geq 1. \\
 \mathbf{h}
 \end{array} \tag{4.54}$$

A Equação (4.54) coloca o HESEM em um formato operacional simples. Em vez de manipular cada equação de medição separadamente, reúnem-se todas elas em um único sistema linear que se repete a cada ordem da expansão. Nesse sistema, a matriz  $\mathbf{H}$  funciona como um mapa fixo da rede, pois é construída a partir dos parâmetros de admitância e,

portanto, não se altera ao longo do processo.

$$\mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{h}[n - 1]. \quad (4.55)$$

O vetor  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  reúne as incógnitas do termo  $n$ , isto é, as partes real e imaginária das tensões estimadas em todas as barras. O vetor  $\mathbf{h}[n - 1]$  reúne as contribuições das medições já avaliadas no termo anterior, incluindo potência, fluxo de potência, correntes de ramo e tensão, sempre separadas em partes real e imaginária. Com a solução germinal em mãos, o algoritmo avança ordem por ordem, calculando-se  $\mathbf{h}[n - 1]$  e resolvendo-se o sistema para obter  $\hat{\mathbf{x}}[n]$ .

Entretanto, na prática, o número de medições  $M$  raramente coincide com o número de variáveis de estado  $2N$ , de modo que  $\mathbf{H}$  não é quadrada. Nesse caso, a inversa de  $\mathbf{H}$  não está definida. Para prosseguir, pré-multiplica-se o sistema por  $\mathbf{H}^T$ , obtendo-se uma forma quadrada que pode ser resolvida diretamente:

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{H}^T \mathbf{h}[n - 1]. \quad (4.56)$$

Por fim, para incorporar o nível de incerteza de cada medição no modelo, introduz-se a matriz diagonal de covariância  $\mathbf{R}$  descrita na Equação (4.57), que ajusta a contribuição de cada medição no sistema.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_M^2 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Com isso, obtém-se a forma compacta final do HESEM, apresentada na Equação (4.58).

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}}[n] = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{h}[n - 1] \quad (4.58)$$

#### 4.1.3.4 Demonstração Matemática da Equação do HESEM

A Equação (4.58) resume a regra de atualização do HESEM, pois permite obter as variáveis de estado por um cálculo recursivo termo a termo. Para explicar a origem dessa expressão, parte-se do mesmo ponto de partida da estimação de estado clássica. Define-se um resíduo de medição e procura-se o estado que torna esse resíduo tão pequeno quanto possível de acordo com um critério de parada. A demonstração da equação do HESEM consiste em mostrar que, ao aplicar essa ideia ao problema incorporado em  $\alpha$  e ao analisar um termo genérico  $n$ , a condição de otimalidade leva diretamente à (4.58).

O primeiro passo é reconhecer que o modelo não reproduz exatamente as medições. Na prática as medições carregam erros e, por isso, o cancelamento perfeito  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(\alpha))$  só

ocorre quando os resíduos são todos nulos. Sendo assim, formaliza-se o erro por meio do vetor de resíduos  $\mathbf{r}(\alpha)$ , conforme mostrado na Equação (4.59).

$$\mathbf{r}(\alpha) = \alpha \cdot \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(\alpha)). \quad (4.59)$$

Por sua vez,  $\mathbf{r}(\alpha)$  admite expansão em série de Maclaurin e pode ser calculado termo a termo, conforme mostrado na Equação (4.60).

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{h}[n-1] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n] \quad n \geq 1. \quad (4.60)$$

A seguir, impõe-se a principal condição da estimação de estado que diz que as variáveis medidas devem coincidir com os valores previstos pelo modelo quando este é avaliado no estado estimado. Com isso, o problema passa a ser definido como a minimização de uma função objetivo quadrática  $J$ , escrita diretamente em termos de  $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$  e ponderada pelas incertezas das medições.

$$J(\hat{\mathbf{x}}(\alpha)) = \sum_{j=1}^M \left( \frac{\alpha \cdot z_j - h_j(\hat{\mathbf{x}}(\alpha))}{\sigma_j} \right)^2 = [\alpha \cdot \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(\alpha))]^T \mathbf{R}^{-1} [\alpha \cdot \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(\alpha))]. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.60) na Equação (4.61), pode-se calcular a evolução da função objetivo a cada recursão  $n$  conforme mostrado na Equação (4.62).

$$J(\hat{\mathbf{x}}[n]) = [\mathbf{h}[n-1] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n]]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{h}[n-1] - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n]] \quad n \geq 1. \quad (4.62)$$

Expandindo algebricamente a expressão matricial (4.62), chega-se a:

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{x}}[n]) = & \underbrace{\mathbf{h}[n-1]^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1]}_{\text{parcela constante}} - \underbrace{\mathbf{h}[n-1]^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n]}_{\text{parcela linear}} \\ & - \underbrace{\hat{\mathbf{x}}[n]^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1]}_{\text{parcela linear}} + \underbrace{\hat{\mathbf{x}}[n]^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n]}_{\text{parcela quadrática}}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Por definição, a condição de otimalidade é obtida ao derivar a função objetivo e igualar sua derivada a zero. Observa-se que  $J(\hat{\mathbf{x}}[n])$  pode ser decomposta em quatro parcelas: uma constante em relação a  $\hat{\mathbf{x}}[n]$ , duas lineares em  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  e uma quadrática em  $\hat{\mathbf{x}}[n]$ . Assim, ao derivar cada parcela separadamente com respeito ao vetor de variáveis  $\hat{\mathbf{x}}[n]$ , obtém-se:

- **Parcela constante:** Essa parcela é constante porque  $\mathbf{R}$  é inteiramente constante e  $\mathbf{h}[n-1]$  é conhecida. Para uma dada recursão  $n$ , todos os termos obtidos nas recursões anteriores, isto é, até  $n-1$ , já foram calculados e, portanto, estão disponíveis, Logo:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}[n]} \left( \mathbf{h}[n-1]^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1] \right) = \mathbf{0}, \quad n \geq 1. \quad (4.64)$$

- **Parcelas lineares:** Derivando-se os dois termos lineares em relação a  $\mathbf{x}[n]$ , chega-se a:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}[n]} \left( -\mathbf{h}[n-1]^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n] \right) = -\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1], \quad n \geq 1. \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}[n]} \left( -\hat{\mathbf{x}}[n]^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1] \right) = -\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1], \quad n \geq 1. \quad (4.66)$$

- **Aplicando a regra da cadeia à parcela quadrática, obtém-se:**

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}[n]} \left( \hat{\mathbf{x}}[n]^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n] \right) = 2 \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n], \quad n \geq 1. \quad (4.67)$$

Portanto, o resultado da derivação de  $J(\hat{\mathbf{x}}[n])$ , é obtido somando-se os os resultados das Equações (4.64), (4.65), (4.66) e (4.67). Logo:

$$\frac{\partial J(\hat{\mathbf{x}}[n])}{\partial \hat{\mathbf{x}}[n]} = 2 \left( \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n] - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1] \right), \quad n \geq 1. \quad (4.68)$$

A condição de otimalidade é dada pela anulação da derivada de  $J(\hat{\mathbf{x}}[n])$ , isto é:

$$\frac{\partial J(\hat{\mathbf{x}}[n])}{\partial \hat{\mathbf{x}}[n]} = 0 \iff \left( \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}[n] - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}[n-1] \right) = 0, \quad n \geq 1. \quad (4.69)$$

O que conduz diretamente a equação associadas ao HESEM, apresentadas em (4.58).

#### 4.1.3.5 Continuação analítica por Aproximantes de Padé

A solução do problema de estimação de estados via HESEM é obtida pela resolução sucessiva do sistema matricial em (4.58). Entretanto, a série de Maclaurin das tensões pode não representar adequadamente a função holomorfa em  $\alpha = 1$  devido às limitações do raio de convergência. Para contornar essa lacuna, empregam-se aproximantes de Padé como técnica de continuação analítica, substituindo-se a série por uma função racional construída a partir dos mesmos coeficientes e, em geral, válida em uma região mais ampla, o que viabiliza a avaliação das tensões estimadas em  $\alpha = 1$ .

Os aproximantes de Padé correspondentes às séries de Maclaurin que representam as tensões estimadas do sistema, conforme descrito em (4.12), podem ser determinados a partir da Equação (4.70), em que  $L$  e  $D$  representam, respectivamente, os graus polinomiais do numerador e do denominador.

$$\check{V}_k(\alpha) = \frac{p_k(\alpha)}{q_k(\alpha)} \cong \frac{p_k[0] + p_k[1]\alpha + p_k[2]\alpha^2 + \dots + p_k[L]\alpha^L}{1 + q_k[1]\alpha + q_k[k]\alpha^2 + \dots + q_k[D]\alpha^D}, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (4.70)$$

Conforme apresentado em Subramanian, Feng e Tylavsky (2013), os coeficientes  $p_k(\alpha)$  e  $q_k(\alpha)$  presentes em (4.70) são obtidos diretamente a partir das Equações (4.72) e

(4.71).

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_k[L-D+1] & \cdots & \hat{V}_k[D] \\ \hat{V}_k[L-D+2] & \cdots & \hat{V}_k[D+1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{V}_k[D] & \cdots & \hat{V}_k[L+D-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k[D] \\ q_k[D-1] \\ \vdots \\ q_k[1] \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{V}_k[L+1] \\ \hat{V}_k[L+2] \\ \vdots \\ \hat{V}_k[L+D] \end{bmatrix} \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad (4.71)$$

$$p_k[D] = \hat{V}_k[D] + \sum_{j=1}^D q_k[j] \hat{V}_k[L-j], \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (4.72)$$

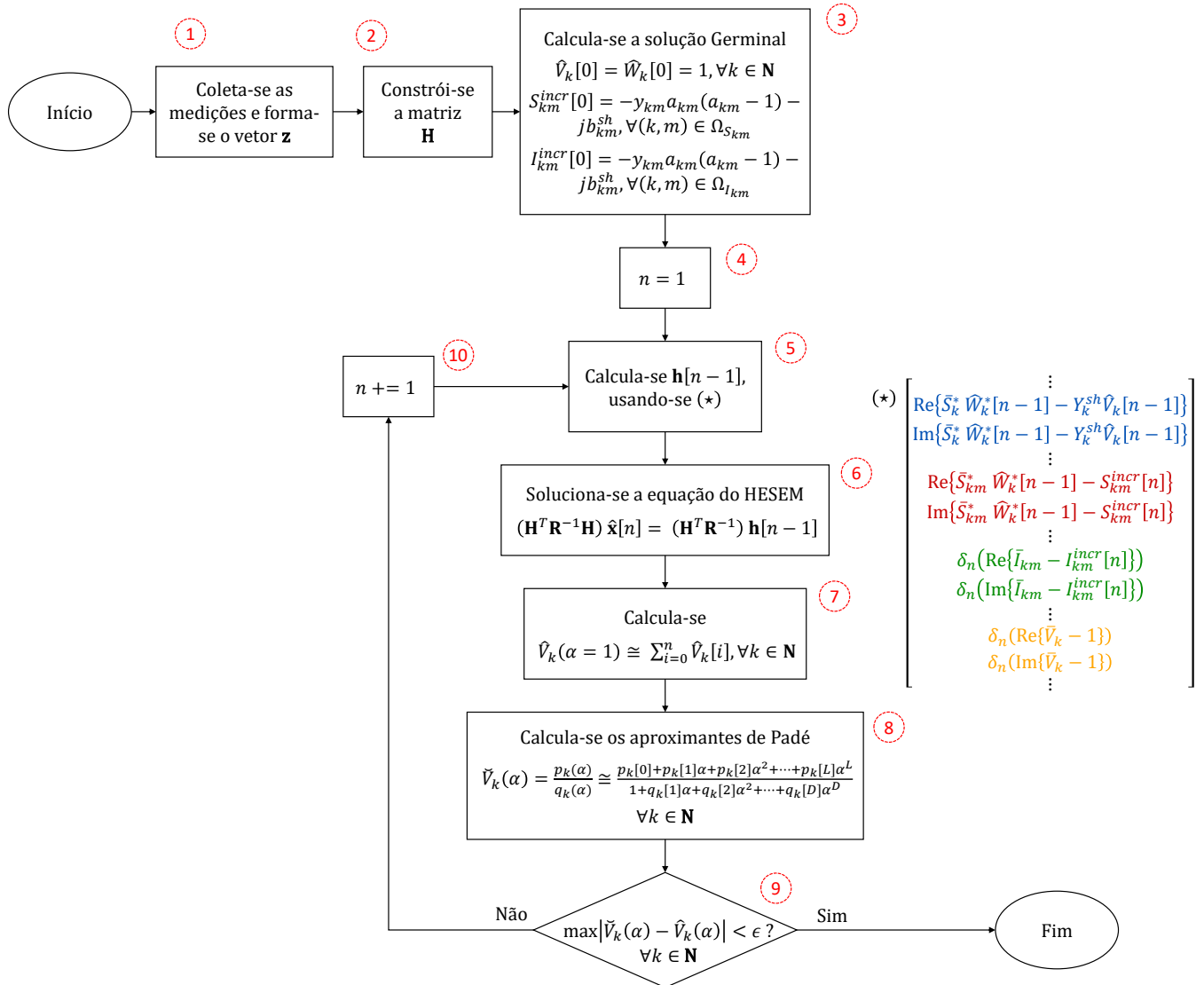
Uma vez obtidos  $\hat{V}_k(\alpha)$  pela soma parcial da série de MacLaurin e  $\check{V}_k(\alpha)$  pelos aproximantes de Padé, para todas as barras do sistema, adota-se como critério de parada a diferença entre essas duas estimativas. Considera-se que a resposta foi alcançada quando o maior valor absoluto de  $|\hat{V}_k(\alpha) - \check{V}_k(\alpha)|$ , avaliado dentre todas as barras  $k \in \mathbf{N}$ , é inferior a uma dada tolerância  $\varepsilon$  pu, conforme indicado na Equação (4.73).

$$\max_{k \in \mathbf{N}} |\hat{V}_k(\alpha) - \check{V}_k(\alpha)| \leq \varepsilon. \quad (4.73)$$

#### 4.1.3.6 Fluxograma

Um fluxograma do método proposto é apresentado na Figura 13. Para tornar o procedimento mais claro, ele foi organizado em nove blocos, que estruturam o algoritmo do HESEM e servem como guia para a descrição detalhada de cada etapa conforme descrito a seguir.

Figura 3 – Fluxograma da metodologia proposta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

- **Bloco 1: Formação do conjunto de medições e do vetor  $\mathbf{z}$ .** Reúnem-se as grandezas medidas disponíveis para a estimação em um vetor único, que servirá como entrada do procedimento recursivo. Em estudos computacionais, a mesma etapa pode ser interpretada como a geração de um cenário de operação por fluxo de potência e a posterior construção do vetor de medições com perturbações aleatórias que representem imperfeições de instrumentação. Ao final do bloco, obtém-se o vetor de medições definido em (4.1), que alimenta as funções de medição nas próximas etapas.
- **Bloco 2: Constrói-se a matriz de termos constantes  $\mathbf{H}$ .** Com base no conjunto de medições coletados do sistema é possível construir a matriz de termos constantes  $\mathbf{H}$  que será utilizada nos cálculos do HESEM. Como já mencionado, essa matriz é

composta por termos constantes retirados da própria matriz de admitâncias nodal, e de condutâncias e susceptâncias do sistema para o caso de medidas de fluxo de potencia e corrente passando em ramos.

- **Bloco 3: Definição da solução germinal e ancoragem do problema.** Define-se o ponto de partida do HESEM impondo  $\alpha = 0$  nas equações incorporadas holomorficamente apresentadas na Tabela 1. Essa escolha fixa o coeficiente de ordem zero das expansões em série das tensões estimadas e, ao mesmo tempo, determina as condições iniciais das funções auxiliares  $\hat{W}(\alpha)$ ,  $S_{km}^{incr}(\alpha)$  e  $I_{km}^{incr}(\alpha)$ . Em termos práticos, este bloco estabelece as condições germinais que tornam o processo recursivo bem definido e consistente, conforme sintetizado na Tabela 2.
- **Bloco 4: Inicialização da ordem recursiva.** Com as condições germinais já definidas, inicia-se o processo de cálculo dos coeficientes não triviais da expansão, selecionando-se o primeiro termo a ser estimado. Assim, fixa-se  $n = 1$  como a primeira ordem calculada a partir do estado germinal estabelecido no Bloco 1.
- **Bloco 5: Construção do vetor de funções de medição no termo anterior.** Calcula-se o vetor  $\mathbf{h}[n - 1]$  que entra no lado direito do sistema matricial do HESEM em (4.54). A ideia central deste bloco é transformar as medições e as relações do modelo em uma forma que dependa apenas de quantidades já conhecidas até a ordem  $(n - 1)$ , deixando o termo  $n$  reservado para as incógnitas. As expressões usadas para montar  $\mathbf{h}[n - 1]$  decorrem diretamente de (4.30), (4.37), (4.44) e (4.49), conforme indicado em  $(\star)$  no fluxograma.
- **Bloco 6: Resolução do sistema do HESEM no termo  $n$  com ponderação.** Resolve-se o sistema matricial em (4.54) para obter as variáveis de estado do termo  $n$ . Nesta etapa, incorpora-se explicitamente a modelagem dos erros aleatórios por meio da matriz diagonal de covariância  $\mathbf{R}$ , definida em (4.57).
- **Bloco 7: Reconstrução das tensões pela soma parcial da série de Maclaurin.** Converte-se o conjunto de coeficientes calculados até a ordem  $n$  em uma estimativa explícita das tensões em cada barra, realizando-se a soma parcial da série em  $\alpha = 1$ . Esse passo corresponde diretamente à forma de série apresentada em (4.12), produzindo o fasor  $V_k$  para cada barra  $k$  com os termos disponíveis até então.
- **Bloco 8: Aproximação racional por aproximantes de Padé.** A partir dos mesmos  $n$  termos já calculados, constroem-se os aproximantes de Padé para as expansões em série associadas às barras do sistema. Para isso utiliza-se as Equações (4.70)–(4.72).
- **Bloco 9: Critério de parada por comparação entre Maclaurin e Padé.** Verifica-se a consistência entre as tensões estimadas pela soma de Maclaurin e

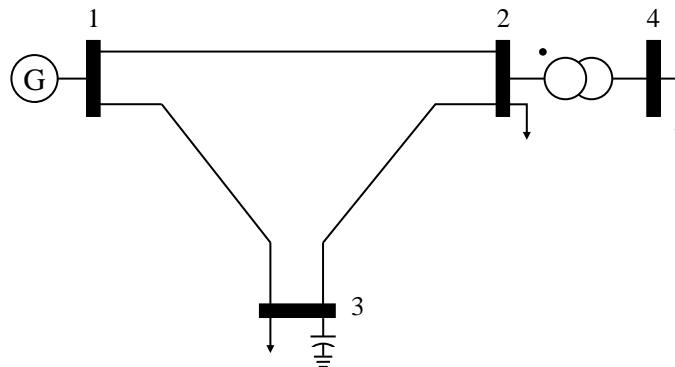
aquelas fornecidas pelos aproximantes de Padé. Se a diferença ficar abaixo do limiar  $\epsilon$ , considera-se que a solução atingiu estabilidade numérica e encerra-se a processo, conforme o critério formal apresentado na Equação (4.73). Caso contrário, prossegue-se para o Bloco 9.

- **Bloco 10: Atualização da ordem e retorno ao ciclo recursivo.** Caso o critério de parada não seja atendido, incrementa-se a ordem ( $n+ = 1$ ) e reinicia-se o ciclo a partir da reconstrução de  $\mathbf{h}[n - 1]$ . Com isso, o sistema em (4.54) é novamente montado e resolvido para o novo termo, repetindo-se o processo até que o limiar  $\epsilon$  seja satisfeito.

#### 4.1.3.7 Exemplo tutorial

Para elucidar a metodologia proposta nesse trabalho, propõem-se estimar, de forma detalhada, o estado operativo do sistema teste usado no exemplo 2.1 encontrado em (Abur; Exposito, 2004), cuja topologia é apresentada na Figura 4, com dados de barras e de linhas dispostos nas Tabelas 3 e 4, respectivamente.

Figura 4 – Diagrama unifilar sistema tutorial.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Tabela 3 – Dados de barra — sistema tutorial.

Barra	Tipo	$P_k^{\text{carga}}$ (pu)	$Q_k^{\text{carga}}$ (pu)	$Y_k^{\text{sh}}$ (pu)
1	$V\theta$	0,00	0,00	0,00
2	$PQ$	0,50	0,30	0,00
3	$PQ$	1,20	0,80	0,50
4	$PQ$	0,25	0,10	0,00

Fonte: (Abur; Exposito, 2004).

Tabela 4 – Dados de linha — sistema tutorial.

De	Para	$R$ (pu)	$X$ (pu)	$Y_{km}^{sh}$ (pu)	Tap
1	2	0,02	0,06	0,20	–
1	3	0,02	0,06	0,25	–
2	3	0,05	0,10	0,00	–
2	4	0,00	0,08	0,00	0,98

Fonte: (Abur; Exposito, 2004).

Para iniciar o algoritmo do HESEM, é necessário definir um conjunto de medições que forma o vetor  $\mathbf{z}$  ao qual torna o sistema totalmente observável. Tal plano de medição é mostrado na Tabela 5.

Tabela 5 – Plano de medições — sistema tutorial.

Medição	Valor (pu)	$R_{ii}$
$\bar{V}_1$	1,00	$1,6 \times 10^{-5}$
$\bar{\theta}_1$	0,00	$1,6 \times 10^{-5}$
$\bar{P}_3$	-1,20	$1,0 \times 10^{-4}$
$\bar{Q}_3$	-0,80	$1,0 \times 10^{-4}$
$\bar{P}_{12}$	0,8864	$6,4 \times 10^{-5}$
$\bar{Q}_{12}$	0,2406	$6,4 \times 10^{-5}$
$\bar{P}_{13}$	1,1092	$6,4 \times 10^{-5}$
$\bar{Q}_{13}$	0,2083	$6,4 \times 10^{-5}$
$\bar{P}_{24}$	0,2500	$6,4 \times 10^{-5}$
$\bar{Q}_{24}$	0,1061	$6,4 \times 10^{-5}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez coletadas as medições do sistema, monta-se a matriz de termos constantes  $\mathbf{H}$ , conforme explicado em (4.54). Como o vetor de medições possui dez elementos e o sistema possui quatro barras, obtém-se uma matriz  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{10 \times 8}$ . Isso está indicado na Equação (4.74).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -15 & -4 & -8 & 9 & 23 & 0 & 0 \\ 15 & -5 & 8 & -4 & -23 & 9 & 0 & 0 \\ 5 & 14,90 & -5 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -14,90 & 5 & 15 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 14,88 & 0 & 0 & -5 & -15 & 0 & 0 \\ -14,88 & 5 & 0 & 0 & 15 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -12,25 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 12,25 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Em seguida, determina-se a solução germinal. Por definição, sua regra de formação é a apresentada na Tabela 2. Para o sistema tutorial, a solução germinal correspondente é mostrada na Tabela 6.

Tabela 6 – Solução germinal — sistema tutorial.

Função holomorfa	Valor (pu)
$\hat{V}_1[0] = \hat{W}_1[0]$	1
$\hat{V}_2[0] = \hat{W}_2[0]$	1
$\hat{V}_3[0] = \hat{W}_3[0]$	1
$\hat{V}_4[0] = \hat{W}_4[0]$	1
$S_{12}^{incr}[0]$	$-j 0,100$
$S_{13}^{incr}[0]$	$-j 0,125$
$S_{24}^{incr}[0]$	$j 0,260$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a solução germinal e a matriz  $\mathbf{H}$  definidas, e sabendo que a matriz de covariância  $\mathbf{R}$  é diagonal, formada pelas variâncias de cada medição apresentadas na Tabela 5, dá-se início ao processo recursivo:

- **Primeira recursão** ( $n = 1$ ): Calcula-se o vetor  $\mathbf{h}[n - 1]$ , cujas equações estão sintetizadas no lado direito do sistema matricial (4.54) e também indicadas por  $(\star)$  no fluxograma da Figura 13. Como aqui  $n - 1 = 0$ , todos os termos de  $\mathbf{h}[0]$  são diretamente conhecidos a partir da solução germinal. Além disso, pela relação (4.43), o coeficiente de primeira ordem das funções auxiliares satisfaz  $S_{km}^{incr}[1] = -S_{km}^{incr}[0]$ , sendo  $S_{km}^{incr}[0]$  o valor já apresentado na Tabela 6. Logo:

$$\mathbf{h}[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,20 & 0,175 & 0,886 & -0,341 & 1,109 & -0,333 & 0,250 & 0,154 \end{bmatrix}^T. \quad (4.75)$$

Aplicando-se a equação do HESEM descrita em (4.58), é possível determinar o coeficiente de ordem  $n = 1$  de todas as tensões estimadas do sistema.

De posse desses coeficientes, somam-se os termos das séries de cada tensão para obter a estimativa do estado operativo na recursão atual, conforme apresentado na quarta coluna da Tabela 7. Em seguida, avalia-se o critério de convergência definido em (4.73), comparando essa soma com as respectivas aproximações de Padé, calculadas a partir de (4.70), (4.71) e (4.72). Como indicado na última coluna da Tabela 7, o maior resíduo obtido ainda é superior à tolerância de  $10^{-4}$  adotada neste exemplo, portanto, prossegue-se para a próxima recursão.

Tabela 7 – Resultado da primeira recursão — sistema tutorial.

Tensão estimada	$n = 0$	$n = 1$	$\sum_0^n$	Padé	Resíduo
$\hat{V}_1^{re}[n]$	1	0,0016	1,0016	1,0016	0
$\hat{V}_1^{im}[n]$	0	$j$ 0,0002	$j$ 0,0002	$j$ 0,0002	0
$\hat{V}_2^{re}[n]$	1	-0,0382	0,9618	0,9613	0,0005
$\hat{V}_2^{im}[n]$	0	$-j$ 0,0461	$-j$ 0,0461	$-j$ 0,0426	-0,0034
$\hat{V}_3^{re}[n]$	1	-0,0360	0,9640	0,9620	0,0020
$\hat{V}_3^{im}[n]$	0	$-j$ 0,0603	$-j$ 0,0603	$-j$ 0,0560	-0,0043
$\hat{V}_4^{re}[n]$	1	-0,0269	0,9731	0,9697	0,0034
$\hat{V}_4^{im}[n]$	0	$-j$ 0,0666	$-j$ 0,0666	$-j$ 0,0629	-0,0037

Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Segunda recursão** ( $n = 2$ ): Essa nova recursão inicia-se com o cálculo dos coeficientes  $\hat{W}_1[1]$ ,  $\hat{W}_2[1]$ ,  $\hat{W}_3[1]$ ,  $\hat{W}_4[1]$ . Esse coeficientes representam, por definição, o recíproco das tensões na recursão atual, e são calculados diretamente por (4.33).

Tabela 8 – Recíproco das tensões estimadas — segunda recursão — sistema tutorial.

Recíproco das tensões	$n = 0$	$n = 1$
$\hat{W}_1^{re}[n]$	1	-0,0016
$\hat{W}_1^{im}[n]$	0	$-j$ 0,0002
$\hat{W}_2^{re}[n]$	1	0,0382
$\hat{W}_2^{im}[n]$	0	$j$ 0,0461
$\hat{W}_3^{re}[n]$	1	0,0360
$\hat{W}_3^{im}[n]$	0	$j$ 0,0603
$\hat{W}_4^{re}[n]$	1	0,0269
$\hat{W}_4^{im}[n]$	0	$j$ 0,0666

Fonte: Elaborado pelo autor.

De posse dos coeficientes de primeira ordem das séries dos recíprocos das tensões em todas as barras, determina-se novamente o vetor  $\mathbf{h}[n - 1]$ . Isso é possível pois os termos de ordem inferior das séries das tensões estimadas já são conhecidos das recursões anteriores e conforme descrito em (4.43), para  $n > 1$ , tem-se  $S_{km}^{incr}[n] = 0$ . Logo:

$$\mathbf{h}[1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,1999 & j0,1750 & 0,8864 & -j0,3406 & 1,1092 & -j0,3333 & 0,25 & j0,1542 \end{bmatrix}^T. \quad (4.76)$$

Aplicando-se novamente a equação do HESEM, calcula-se os termos de segunda ordem das expansões em séries das tensões estimadas, conforme mostrado na Tabela 9. Aplicando-se as condições de convergência (4.73), verifica-se que será necessário mais uma recursão.

Tabela 9 – Resultado da segunda recursão — sistema tutorial.

Tensão estimada	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$\sum_0^n$	Padé	Resíduo
$\hat{V}_1^{re}[n]$	1	0,0016	-0,0015	1,0001	1,0008	$-0,7030 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_1^{im}[n]$	0	$j 0,0002$	$-j 0,0003$	0	$j 0,0001$	$-j 0,1345 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_2^{re}[n]$	1	-0,0382	0,0001	0,9619	0,9619	$-0,0011 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_2^{im}[n]$	0	$-j 0,0461$	$-j 0,0002$	$-j 0,0463$	$-j 0,0463$	$-j 0,0003 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_3^{re}[n]$	1	-0,0360	-0,0056	0,9584	0,9582	$0,1616 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_3^{im}[n]$	0	$-j 0,0603$	$j 0,0003$	$-j 0,0600$	$-j 0,0596$	$-j 0,4370 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_4^{re}[n]$	1	-0,0269	-0,0011	0,9720	0,9720	$0,0210 \times 10^{-3}$
$\hat{V}_4^{im}[n]$	0	$-j 0,0666$	$-j 0,0006$	$-j 0,0672$	$-j 0,0672$	$-j 0,0040 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Terceira recursão** ( $n = 3$ ): Repete-se o mesmo procedimento das recursões anteriores: Calculam-se os recíprocos das tensões estimadas pela Equação (4.33), cujos resultados são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10 – Recíproco das tensões estimadas — terceira recursão — sistema tutorial.

Recíproco das tensões	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\hat{W}_1^{re}[n]$	1	-0,0016	0,0015	$0,1138 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_1^{im}[n]$	0	$-j 0,0002$	$j 0,0003$	$-j 0,0280 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_2^{re}[n]$	1	0,0382	-0,0008	$-0,1550 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_2^{im}[n]$	0	$j 0,0461$	$j 0,0037$	$j 0,1957 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_3^{re}[n]$	1	0,0360	0,0033	$0,5819 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_3^{im}[n]$	0	$j 0,0603$	$j 0,0040$	$j 0,5600 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_4^{re}[n]$	1	0,0269	-0,0026	$-0,2280 \times 10^{-3}$
$\hat{W}_4^{im}[n]$	0	$j 0,0666$	$j 0,0042$	$j 0,0675 \times 10^{-3}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Monta-se o vetor  $\mathbf{h}[n - 1]$  conforme (4.54), cujos resultados são apresentados na Equação 4.77.

$$\mathbf{h}[2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0005 & j 0,0110 & 0,0012 & -j 0,0006 & 0,0016 & -j 0,0006 & -0,0006 & -j 0,0009 \end{bmatrix}^T. \quad (4.77)$$

E em seguida, obtêm-se as tensões estimadas através da Equação (4.58):

Tabela 11 – Resultado da terceira recursão — sistema tutorial.

Tensão estimada	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$\sum_{i=0}^n$	Padé	Resíduo
$\hat{V}_1^{re}[n]$	1	0,0016	-0,0015	$-0,1184 \times 10^{-3}$	1	1	$0,0553 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_1^{im}[n]$	0	$j 0,0002$	$-j 0,0003$	$j 0,0265 \times 10^{-3}$	0	0	$-j 0,0705 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_2^{re}[n]$	1	-0,0382	0,0001	$-0,0633 \times 10^{-3}$	0,9618	0,9618	$0,0271 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_2^{im}[n]$	0	$-j 0,0461$	$-j 0,0002$	$-j 0,0873 \times 10^{-3}$	$-j 0,0464$	$-j 0,0464$	$j 0,0118 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_3^{re}[n]$	1	-0,0360	-0,0056	$-0,4866 \times 10^{-3}$	0,9579	0,9578	$0,7870 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_3^{im}[n]$	0	$-j 0,0603$	$j 0,0003$	$j 0,1098 \times 10^{-3}$	$-j 0,0599$	$-j 0,0599$	$-j 0,3530 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_4^{re}[n]$	1	-0,0269	-0,0011	$-0,1313 \times 10^{-3}$	0,9719	0,9719	$0,0495 \times 10^{-4}$
$\hat{V}_4^{im}[n]$	0	$-j 0,0666$	$-j 0,0006$	$-j 0,0423 \times 10^{-3}$	$-j 0,0672$	$-j 0,0672$	$-j 0,0457 \times 10^{-4}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na terceira recursão, o critério de convergência é finalmente satisfeito. O estado operativo estimado do sistema, apresentado na Tabela 12, é obtido pela simples conversão dos valores retangulares fornecidos pelos aproximantes de Padé para a forma polar.

Tabela 12 – Tensões estimadas — sistema tutorial.

Tensão	Valor (pu)
$\hat{V}_1$	1,0000 $\angle 0$
$\hat{V}_2$	0,9629 $\angle -2,76$
$\hat{V}_3$	0,9597 $\angle -3,58$
$\hat{V}_4$	0,9742 $\angle -3,96$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vale destacar que, neste exemplo, os valores obtidos via aproximantes de Padé não diferiram significativamente daqueles resultantes da simples soma das séries de Maclaurin. Entretanto, em sistemas maiores e mais carregados, essa soma direta tende a falhar, pois as séries deixam de representar adequadamente as funções holomorfas no ponto  $\alpha = 1$ .

## 4.2 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi apresentada a metodologia proposta nesta dissertação para a estimação de estados baseada em incorporação holomórfica. Ao longo do capítulo, o desenvolvimento do HESEM foi apresentado de forma progressiva, partindo do equacionamento do método até chegar à demonstração matemática de sua relação central. Além disso, foi incluído um fluxograma do algoritmo e foi resolvido um exemplo tutorial passo a passo, com o objetivo de esclarecer o procedimento e apoiar a aplicação nos estudos de caso posteriores.

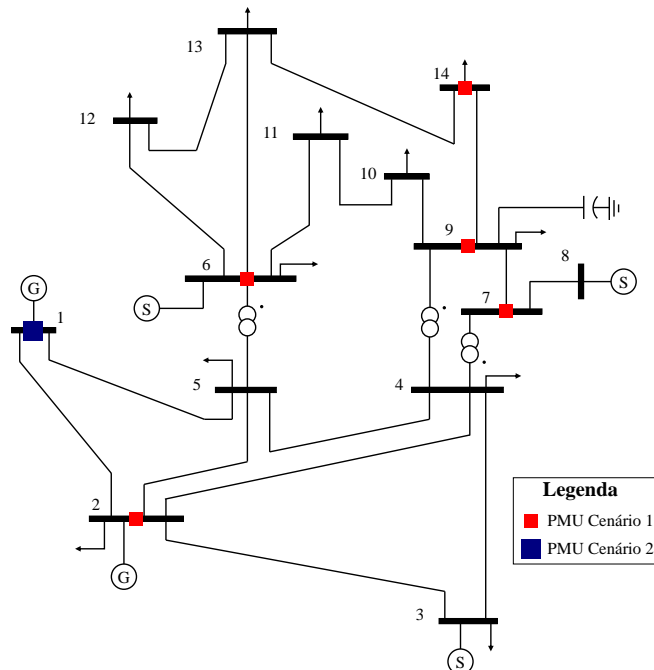
## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir da implementação computacional do HESEM. Para validar a metodologia proposta em sistemas de distribuição, adotou-se o sistema IEEE de 33 barras considerando dois cenários distintos de plano de medição. Os testes em sistemas de transmissão foram conduzidos nos sistemas IEEE de 14 barras, novamente sob dois cenários de plano de medição e, em especial, no sistema-teste brasileiro de 107 barras, cuja topologia subdividida em três subsistemas e a presença de corredores de transmissão tornam o caso particularmente adequado para avaliar limitações operativas. Adicionalmente, as mesmas simulações foram realizadas via MQP, adotado como referência para a comparação de desempenho. Vale destacar que todos os códigos computacionais foram desenvolvidos no *soft* MatLab, sendo os cálculos executados em um computador com processador Intel Core i5-10210U a 1,60 GHz e 8 GB de RAM. Além disso, a tolerância adotada como limiar para o critério de parada em todas as simulações nesse trabalho foi de  $10^{-3}$ .

### 5.1 SISTEMA IEEE 14 BARRAS

A Figura 5 apresenta o diagrama unifilar do sistema de transmissão de 14 barras, cujos dados de cargas e linhas são encontrados em Al-Roomi (2022). Para os testes a seguir, consideram-se dois conjuntos distintos de medições, os quais são apresentados como estudos de caso separados.

Figura 5 – Diagrama unifilar do sistema IEEE 14 barras.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 5.1.1 Cenário 1

A alocação ótima de PMUs, visando à observabilidade completa do sistema, foi definida conforme o método apresentado em (Babu; Bhattacharyya, 2016), que propõem instalar as PMUs nas barras 2, 6, 7, 9 e 14. Nesse arranjo, são medidos os fasores de tensão nas barras com PMU instalada e, adicionalmente, consideram-se medidas as correntes nos ramos diretamente conectados a esses medidores.

Para representar um cenário mais próximo do real, foram adicionados erros aleatórios gaussianos às medições, de 0,4% para tensões e 0,8% para correntes. Dessa forma, o plano contendo 29 medição apresentado na Tabela 13 é definido a partir das medições disponibilizadas pelas PMUs alocadas.

Tabela 13 – Plano de medição - sistema IEEE 14 barras - cenário 1.

Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$	Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$		
			Mag. (pu)	Fase (°)					Mag. (pu)	Fase (°)			
1	$V_k$	1	-	1,0563	0,00	$1,6 \times 10^{-5}$	16	$I_{km}$	4	5	0,6528	-176,36	$6,4 \times 10^{-5}$
2	$V_k$	2	-	1,0429	-5,32	$1,6 \times 10^{-5}$	17	$I_{km}$	4	7	0,3116	7,15	$6,4 \times 10^{-5}$
3	$V_k$	4	-	1,0158	-10,91	$1,6 \times 10^{-5}$	18	$I_{km}$	4	9	0,1649	-10,20	$6,4 \times 10^{-5}$
4	$V_k$	6	-	1,0671	-15,04	$1,6 \times 10^{-5}$	19	$I_{km}$	5	6	0,4711	-23,84	$6,4 \times 10^{-5}$
5	$V_k$	7	-	1,0615	-14,12	$1,6 \times 10^{-5}$	20	$I_{km}$	6	11	0,0839	-42,63	$6,4 \times 10^{-5}$
6	$V_k$	8	-	1,1003	-14,11	$1,6 \times 10^{-5}$	21	$I_{km}$	6	12	0,0799	-33,15	$6,4 \times 10^{-5}$
7	$V_k$	9	-	1,0516	-15,78	$1,6 \times 10^{-5}$	22	$I_{km}$	6	13	0,1900	-37,62	$6,4 \times 10^{-5}$
8	$V_k$	11	-	1,0583	-15,63	$1,6 \times 10^{-5}$	23	$I_{km}$	7	8	0,1687	75,90	$6,4 \times 10^{-5}$
9	$V_k$	13	-	1,0448	-16,02	$1,6 \times 10^{-5}$	24	$I_{km}$	7	9	0,2867	-26,74	$6,4 \times 10^{-5}$
10	$I_{km}$	1	2	1,6081	7,76	$1,6 \times 10^{-5}$	25	$I_{km}$	9	10	0,0648	-52,97	$6,4 \times 10^{-5}$
11	$I_{km}$	1	5	0,7481	-2,97	$1,6 \times 10^{-5}$	26	$I_{km}$	9	14	0,1001	-35,85	$6,4 \times 10^{-5}$
12	$I_{km}$	2	3	0,7394	-7,70	$1,6 \times 10^{-5}$	27	$I_{km}$	10	11	0,0430	137,55	$6,4 \times 10^{-5}$
13	$I_{km}$	2	4	0,5608	-4,03	$1,6 \times 10^{-5}$	28	$I_{km}$	12	13	0,0181	-41,87	$6,4 \times 10^{-5}$
14	$I_{km}$	2	5	0,4182	-7,27	$1,6 \times 10^{-5}$	29	$I_{km}$	13	14	0,0610	-34,92	$6,4 \times 10^{-5}$
15	$I_{km}$	3	4	0,2485	179,98	$1,6 \times 10^{-5}$							

Devido ao caráter estocástico do problema, foram realizadas 5.000 simulações, onde considerou-se o estado operativo do sistema como o valor médio dessas simulações. A Figura 6a apresenta a comparação entre as magnitudes de tensão reais, obtidas por um algoritmo tradicional de fluxo de potência, e as magnitudes estimadas médias calculadas a partir das 5.000 execuções do método proposto. A Figura 6b mostra os erros correspondentes aos dois resultados.

Com base na Figura 6a é possível concluir que o estado operativo do sistema foi devidamente estimado pelo HESEM uma vez que as tensões coincidem com as calculadas pelo fluxo de potência. Neste estudo de caso os erros de magnitude de tensão se mostraram estáveis, ficando na ordem de  $10^{-3}$  %.

Os ângulos das tensões também são estimados com boa precisão, conforme apresentado na Figura 7, na qual os valores reais, obtidos pelo fluxo de potência, e os valores estimados, calculados a partir das simulações, estão associados a baixos erros de estimação.

Figura 6 – Magnitude das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 1.

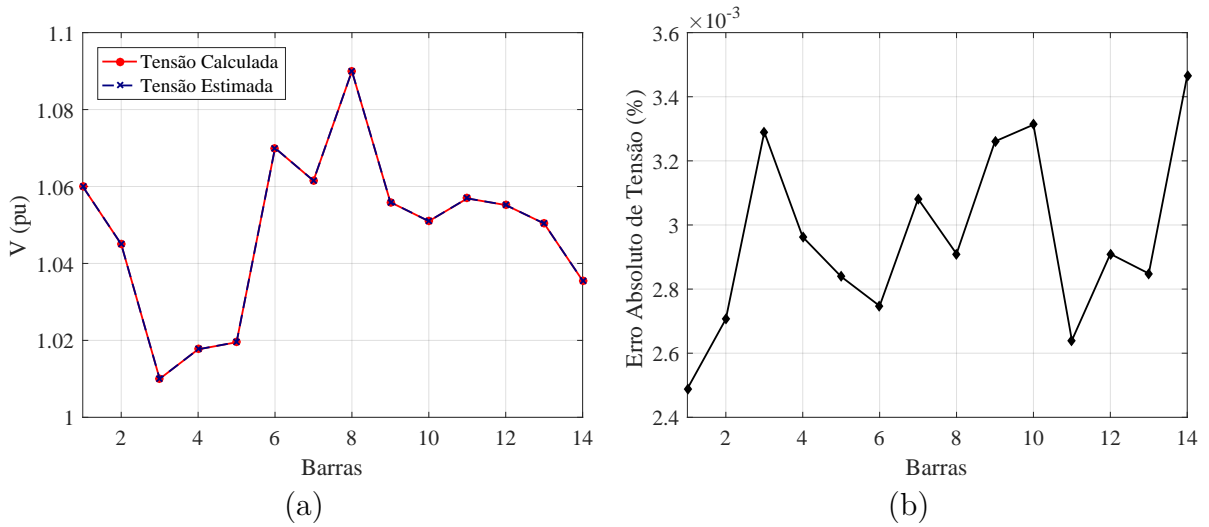
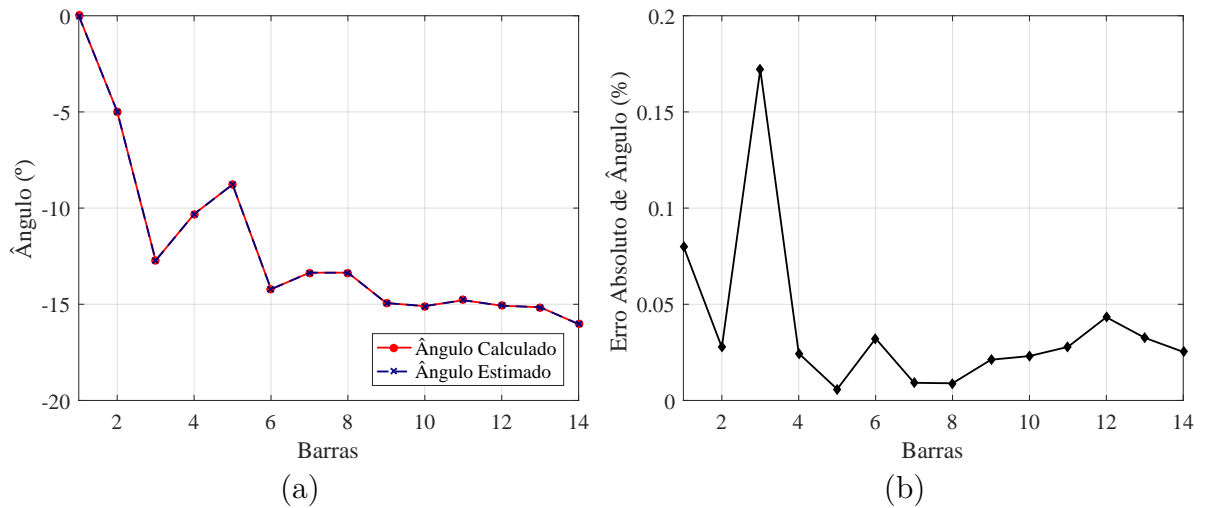


Figura 7 – Ângulo das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 1.



### 5.1.2 Cenário 2

No segundo estudo de caso aplicado ao sistema de 14 barras, consideram-se medidos os fluxos de potência ativa e reativa em todos os ramos do sistema. Adicionalmente, assume-se a instalação de uma única PMU na barra 1.

Para simular um cenário de incerteza, da mesma forma que o caso de estudo anterior, adiciona-se erros aleatórios gaussianos às medições: nas tensões, esses ruídos mantêm amplitude de 0,4%, enquanto, nos fluxos de potência nos ramos, consideram-se erros aleatório proporcional a 1%. Dessa forma, o plano de medição contendo 21 medições adotado para este novo cenário é apresentado na Tabela 14.

Após 5.000 simulações, as tensões estimadas são comparadas aos valores do fluxo de potência nas Figuras 8a e 9a. Os erros de estimação das magnitudes e dos ângulos são apresentados, respectivamente, nas Figuras 8b e 9b.

Tabela 14 – Plano de medição - sistema IEEE 14 barras - cenário 2.

Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$	Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$		
			Mag. (pu)	Fase (°)					Mag. (pu)	Fase (°)			
1	$V_k$	1	-	1,0562	0,00	$1,6 \times 10^{-5}$	6	$S_{km}$	6	11	0,0814	25,84	$6,4 \times 10^{-5}$
2	$S_{km}$	1	2	1,6026	-7,41	$1,6 \times 10^{-5}$	6	$S_{km}$	6	12	0,0810	17,82	$6,4 \times 10^{-5}$
3	$S_{km}$	1	5	0,7546	2,92	$1,6 \times 10^{-5}$	7	$S_{km}$	6	13	0,1949	22,13	$6,4 \times 10^{-5}$
4	$S_{km}$	2	3	0,7402	2,78	$1,6 \times 10^{-5}$	7	$S_{km}$	7	8	0,1725	-90,00	$6,4 \times 10^{-5}$
5	$S_{km}$	2	4	0,5626	-1,58	$1,6 \times 10^{-5}$	9	$S_{km}$	7	9	0,2908	11,63	$6,4 \times 10^{-5}$
6	$S_{km}$	2	5	0,4124	1,62	$1,6 \times 10^{-5}$	9	$S_{km}$	9	10	0,0675	38,91	$6,4 \times 10^{-5}$
7	$S_{km}$	3	4	0,2363	169,13	$1,6 \times 10^{-5}$	10	$S_{km}$	9	14	0,1000	20,96	$6,4 \times 10^{-5}$
8	$S_{km}$	4	5	0,6252	165,49	$1,6 \times 10^{-5}$	12	$S_{km}$	10	11	0,0407	-156,89	$6,4 \times 10^{-5}$
9	$S_{km}$	4	7	0,2974	-19,03	$1,6 \times 10^{-5}$	13	$S_{km}$	12	13	0,0180	25,04	$6,4 \times 10^{-5}$
10	$S_{km}$	4	9	0,1593	-1,52	$1,6 \times 10^{-5}$	21	$S_{km}$	13	14	0,0588	17,20	$6,4 \times 10^{-5}$
11	$S_{km}$	5	6	0,4572	15,79	$1,6 \times 10^{-5}$							

Como esperado, por estarem associadas a maiores erros aleatórios, as medições de fluxo de potência resultam em erros de estimação superiores aos do caso anterior. Ainda assim, o HESEM foi capaz de estimar o estado do sistema.

Figura 8 – Magnitude das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 2.

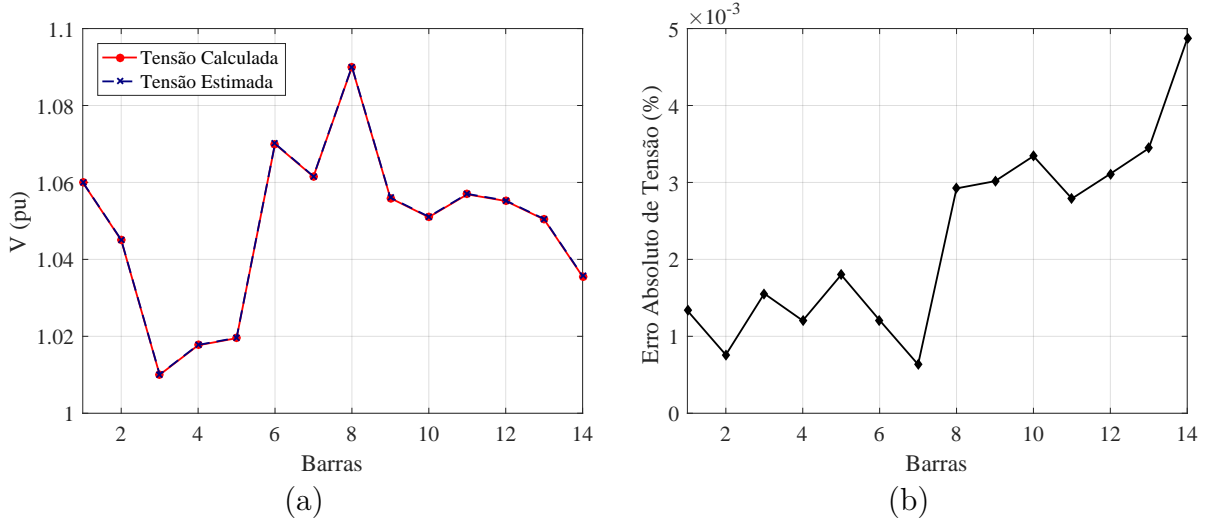
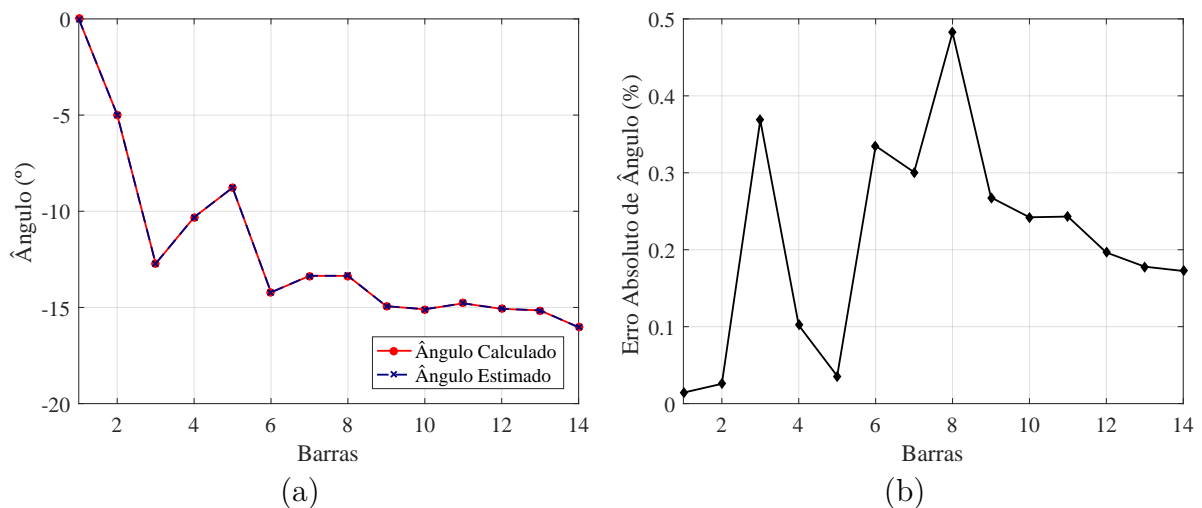


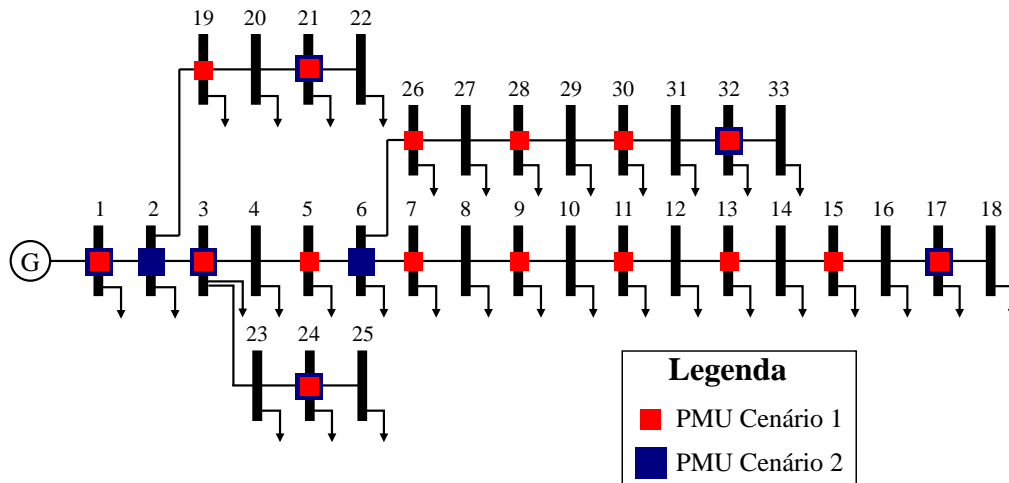
Figura 9 – Ângulo das tensões no sistema IEEE 14 barras: Cenário 2.



## 5.2 SISTEMA IEEE 33 BARRAS

A Figura 10 ilustra o sistema de distribuição radial IEEE 33 barras, cujos dados de barras e linhas são encontrados em Baran e Wu (1989).

Figura 10 – Diagrama unifilar do sistema IEEE 33 barras.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

### 5.2.1 Cenário 1

Neste primeiro cenário, as PMUs são alocadas nas barras 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 26, 28, 30 e 32. Assim, ficam disponíveis em tempo real os fasores de tensão das barras monitoradas, bem como as correntes de ramo das linhas conectadas às respectivas unidades de medição.

Para deixar a simulação mais próxima do que acontece na prática, essas grandezas também foram perturbadas por um erro aleatório gaussiano, considerando níveis de 0,4% nas medições de tensão e 0,8% nas medições de corrente. A Tabela 15 apresenta o plano contendo as 48 medições definido a partir das medições disponibilizadas pelas PMUs alocadas.

Tabela 15 – Plano de medição - sistema IEEE 33 barras - cenário 1.

Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$	Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$		
			Mag. (pu)	Fase (°)					Mag. (pu)	Fase (°)			
1	$V_k$	1	-	1,0001	0,00	$1,6 \times 10^{-5}$	25	$I_{km}$	9	10	0,0079	-25,59	$6,4 \times 10^{-5}$
2	$V_k$	3	-	0,9853	0,10	$1,6 \times 10^{-5}$	26	$I_{km}$	10	11	0,0070	-26,20	$6,4 \times 10^{-5}$
3	$V_k$	5	-	0,9672	0,24	$1,6 \times 10^{-5}$	27	$I_{km}$	11	12	0,0065	-25,39	$6,4 \times 10^{-5}$
4	$V_k$	7	-	0,9361	-0,10	$1,6 \times 10^{-5}$	28	$I_{km}$	12	13	0,0057	-24,78	$6,4 \times 10^{-5}$
5	$V_k$	9	-	0,9295	-0,14	$1,6 \times 10^{-5}$	29	$I_{km}$	13	14	0,0049	-23,96	$6,4 \times 10^{-5}$
6	$V_k$	11	-	0,9234	-0,20	$1,6 \times 10^{-5}$	30	$I_{km}$	14	15	0,0033	-19,54	$6,4 \times 10^{-5}$
7	$V_k$	13	-	0,9231	-0,29	$1,6 \times 10^{-5}$	31	$I_{km}$	15	16	0,0026	-20,56	$6,4 \times 10^{-5}$
8	$V_k$	15	-	0,9159	-0,41	$1,6 \times 10^{-5}$	32	$I_{km}$	16	17	0,0018	-22,38	$6,4 \times 10^{-5}$
9	$V_k$	17	-	0,9087	-0,52	$1,6 \times 10^{-5}$	33	$I_{km}$	17	18	0,0011	-26,57	$6,4 \times 10^{-5}$
10	$V_k$	19	-	1,0015	0,01	$1,6 \times 10^{-5}$	34	$I_{km}$	2	19	0,0042	-24,10	$6,4 \times 10^{-5}$
11	$V_k$	21	-	0,9877	-0,09	$1,6 \times 10^{-5}$	35	$I_{km}$	19	20	0,0032	-24,15	$6,4 \times 10^{-5}$
12	$V_k$	24	-	0,9699	-0,02	$1,6 \times 10^{-5}$	36	$I_{km}$	20	21	0,0021	-25,35	$6,4 \times 10^{-5}$
13	$V_k$	26	-	0,9502	0,18	$1,6 \times 10^{-5}$	37	$I_{km}$	21	22	0,0011	-21,80	$6,4 \times 10^{-5}$
14	$V_k$	28	-	0,9357	0,33	$1,6 \times 10^{-5}$	38	$I_{km}$	3	23	0,0112	-25,88	$6,4 \times 10^{-5}$
15	$V_k$	30	-	0,9203	0,52	$1,6 \times 10^{-5}$	39	$I_{km}$	23	24	0,0102	-25,56	$6,4 \times 10^{-5}$
16	$V_k$	32	-	0,9141	0,41	$1,6 \times 10^{-5}$	40	$I_{km}$	24	25	0,0050	-25,02	$6,4 \times 10^{-5}$
17	$I_{km}$	1	2	0,0484	-31,82	$6,4 \times 10^{-5}$	41	$I_{km}$	6	26	0,0151	-45,27	$6,4 \times 10^{-5}$
18	$I_{km}$	2	3	0,0435	-32,70	$6,4 \times 10^{-5}$	42	$I_{km}$	26	27	0,0144	-46,68	$6,4 \times 10^{-5}$
19	$I_{km}$	3	4	0,0309	-35,39	$6,4 \times 10^{-5}$	43	$I_{km}$	27	28	0,0137	-47,95	$6,4 \times 10^{-5}$
20	$I_{km}$	4	5	0,0297	-35,40	$6,4 \times 10^{-5}$	44	$I_{km}$	28	29	0,0130	-49,35	$6,4 \times 10^{-5}$
21	$I_{km}$	5	6	0,0289	-35,72	$6,4 \times 10^{-5}$	45	$I_{km}$	29	30	0,0118	-52,25	$6,4 \times 10^{-5}$
22	$I_{km}$	6	7	0,0136	-25,63	$6,4 \times 10^{-5}$	46	$I_{km}$	30	31	0,0055	-26,10	$6,4 \times 10^{-5}$
23	$I_{km}$	7	8	0,0110	-25,40	$6,4 \times 10^{-5}$	47	$I_{km}$	31	32	0,0035	-27,30	$6,4 \times 10^{-5}$
24	$I_{km}$	8	9	0,0086	-24,78	$6,4 \times 10^{-5}$	48	$I_{km}$	32	33	0,0009	-35,54	$6,4 \times 10^{-5}$

A Figura 11a compara as magnitudes de tensão obtidas pelo fluxo de potência com aquelas estimadas pelo HESEM, considerando a média das estimativas ao longo das 5.000 simulações deste cenário. Observa-se que o HESEM reproduz de forma satisfatória o estado operativo do sistema, uma vez que as curvas de magnitude de tensão permanecem sobrepostas e os erros absolutos apresentados na Figura 11b são relativamente pequenos.

O mesmo padrão aparece nos ângulos de fase mostrados na Figura 12a. Ao comparar os ângulos calculados pelo fluxo de potência com os ângulos estimados pelo HESEM, nota-se que as curvas ficam sobrepostas ao longo de todas as barras. Isso também se reflete nos erros absolutos indicados na Figura 12b, que permanecem baixos, indicando que o método consegue recuperar de forma satisfatória a componente angular do estado mesmo com a presença de ruído nas medições.

Ainda que em sistemas de distribuição a estimação possa ser mais sensível ao ruído de medição, devido às maiores quedas de tensão ao longo dos alimentadores, o HESEM manteve bom desempenho neste cenário.

Figura 11 – Magnitude das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 1.

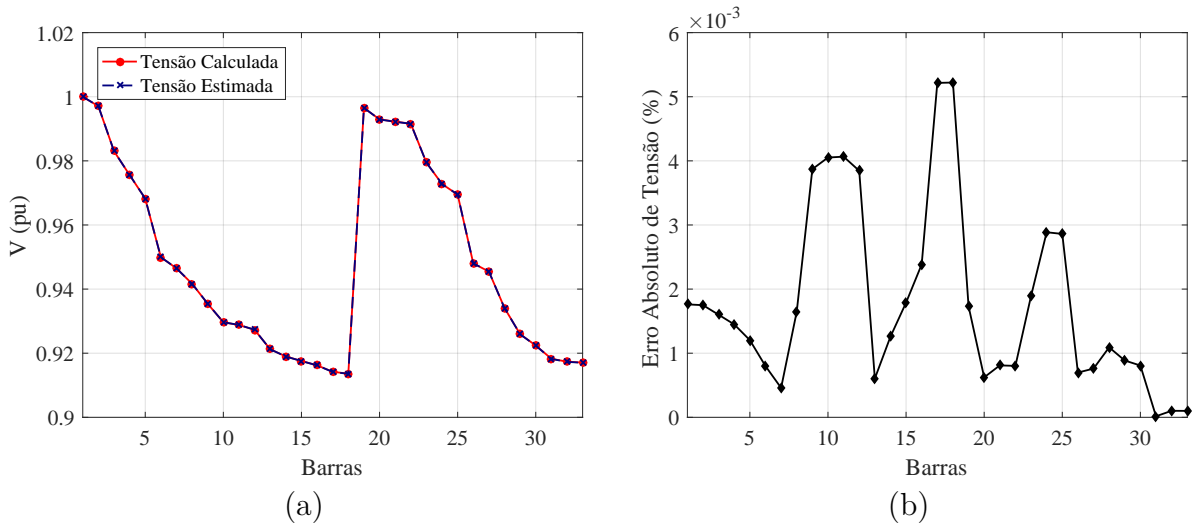
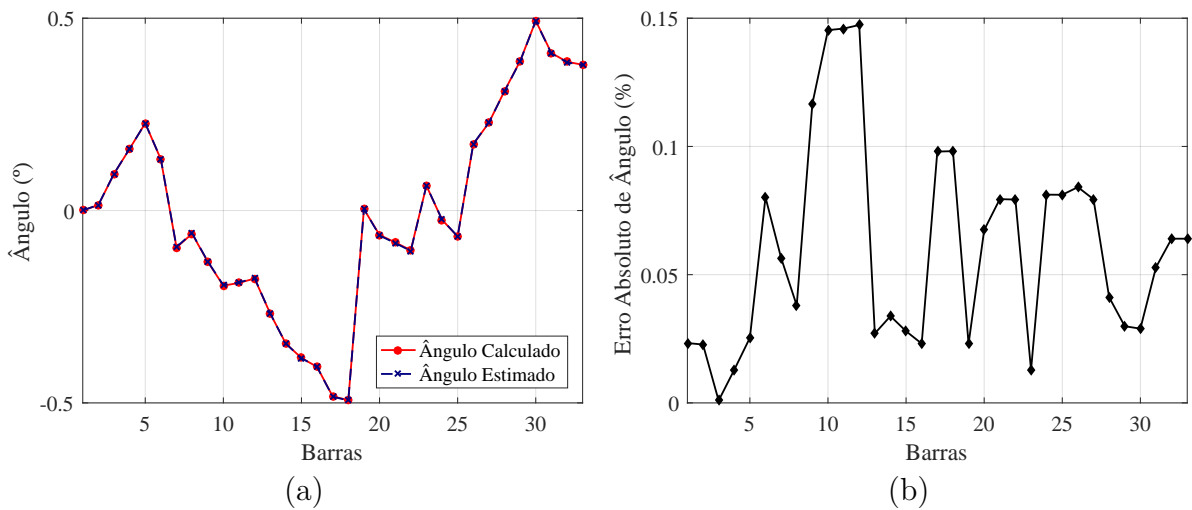


Figura 12 – Ângulo das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 1.



### 5.2.2 Cenário 2

Para o segundo cenário, utilizando o sistema de 33 barras, as PMUs passam a ser instaladas de acordo com o procedimento de alocação adotado em (Melo; Teixeira; Mingorança, 2023). Nesse caso, as PMUs são posicionadas no início e no final de cada alimentador lateral, sendo instaladas nas barras 1, 2, 3, 6, 17, 21, 24 e 32. As PMUs disponibilizam os fasores de tensão nas barras monitoradas, bem como as correntes nos ramos das linhas conectadas a cada uma dessas barras. Para as demais barras, considera-se que as potências ativa e reativa são obtidas por meio de pseudomedidas as quais são atribuídos erros aleatórios de 10% de amplitude. A Tabela 16 resume o plano de medição contendo as 36 medidas adotadas neste cenário.

Tabela 16 – Plano de medição - sistema IEEE 33 barras - cenário 2.

Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$	Medição	De	Para	Valor		$R_{ii}$		
			Mag. (pu)	Fase (°)					Mag. (pu)	Fase (°)			
1	$V_k$	1	-	1,0026	0,00	$1,6 \times 10^{-5}$	19	$S_k$	29	10	0,0014	-149,72	$1,0 \times 10^{-4}$
2	$V_k$	2	-	0,9934	0,01	$1,6 \times 10^{-5}$	20	$S_k$	30	11	0,0062	-108,41	$1,0 \times 10^{-4}$
3	$V_k$	3	-	0,9843	0,10	$1,6 \times 10^{-5}$	21	$I_{km}$	1	2	0,0458	-31,86	$6,4 \times 10^{-5}$
4	$V_k$	6	-	0,9486	0,13	$1,6 \times 10^{-5}$	22	$I_{km}$	2	3	0,0406	-32,64	$6,4 \times 10^{-5}$
5	$V_k$	17	-	0,9097	-0,48	$1,6 \times 10^{-5}$	23	$I_{km}$	3	4	0,0291	-35,39	$6,4 \times 10^{-5}$
6	$V_k$	21	-	0,9878	-0,08	$1,6 \times 10^{-5}$	24	$I_{km}$	5	6	0,0269	-35,71	$6,4 \times 10^{-5}$
7	$V_k$	24	-	0,9747	-0,02	$1,6 \times 10^{-5}$	25	$I_{km}$	6	7	0,0128	-25,58	$6,4 \times 10^{-5}$
8	$V_k$	32	-	0,9220	0,39	$1,6 \times 10^{-5}$	26	$I_{km}$	16	17	0,0017	-22,25	$6,4 \times 10^{-5}$
9	$S_k$	8	-	0,0023	-153,44	$1,0 \times 10^{-4}$	27	$I_{km}$	17	18	0,0011	-24,41	$6,4 \times 10^{-5}$
10	$S_k$	9	-	0,0006	-161,58	$1,0 \times 10^{-4}$	28	$I_{km}$	2	19	0,0039	-24,02	$6,4 \times 10^{-5}$
11	$S_k$	10	-	0,0006	-161,58	$1,0 \times 10^{-4}$	29	$I_{km}$	20	21	0,0020	-24,05	$6,4 \times 10^{-5}$
12	$S_k$	11	-	0,0005	-146,32	$1,0 \times 10^{-4}$	30	$I_{km}$	21	22	0,0010	-24,06	$6,4 \times 10^{-5}$
13	$S_k$	12	-	0,0007	-149,76	$1,0 \times 10^{-4}$	31	$I_{km}$	3	23	0,0106	-25,85	$6,4 \times 10^{-5}$
14	$S_k$	13	-	0,0007	-149,76	$1,0 \times 10^{-4}$	32	$I_{km}$	23	24	0,0096	-25,51	$6,4 \times 10^{-5}$
15	$S_k$	14	-	0,0014	-146,34	$1,0 \times 10^{-4}$	33	$I_{km}$	24	25	0,0047	-25,53	$6,4 \times 10^{-5}$
16	$S_k$	15	-	0,0006	-170,57	$1,0 \times 10^{-4}$	34	$I_{km}$	6	26	0,0142	-45,57	$6,4 \times 10^{-5}$
17	$S_k$	27	2	0,0007	-157,35	$1,0 \times 10^{-4}$	35	$I_{km}$	31	32	0,0033	-27,04	$6,4 \times 10^{-5}$
18	$S_k$	28	3	0,0006	-161,53	$1,0 \times 10^{-4}$	36	$I_{km}$	32	33	0,0008	-33,33	$6,4 \times 10^{-5}$

Após a realização das 5.000 simulações, as Figuras 13a e 14a apresentam, respectivamente, a comparação entre as magnitudes e os ângulos de fase das tensões estimadas pelo HESEM e aqueles calculados pelo fluxo de potência. Observa-se que as duas curvas permanecem sobrepostas, indicando que o estado operativo foi novamente obtido de forma satisfatória. Entretanto, quando a análise se volta para os erros absolutos de magnitude e ângulo de fase, mostrados nas Figura 13b e 14b respectivamente, é possível observar que os mesmos são ligeiramente maiores que os observados no estudo de caso anterior. Isso se deve principalmente ao fato de que neste plano de medição foram consideradas pseudomedidas cujas incertezas são relativamente grandes, o que acaba por impactar na qualidade da resposta obtida pelo estimador.

Figura 13 – Magnitude das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 2.

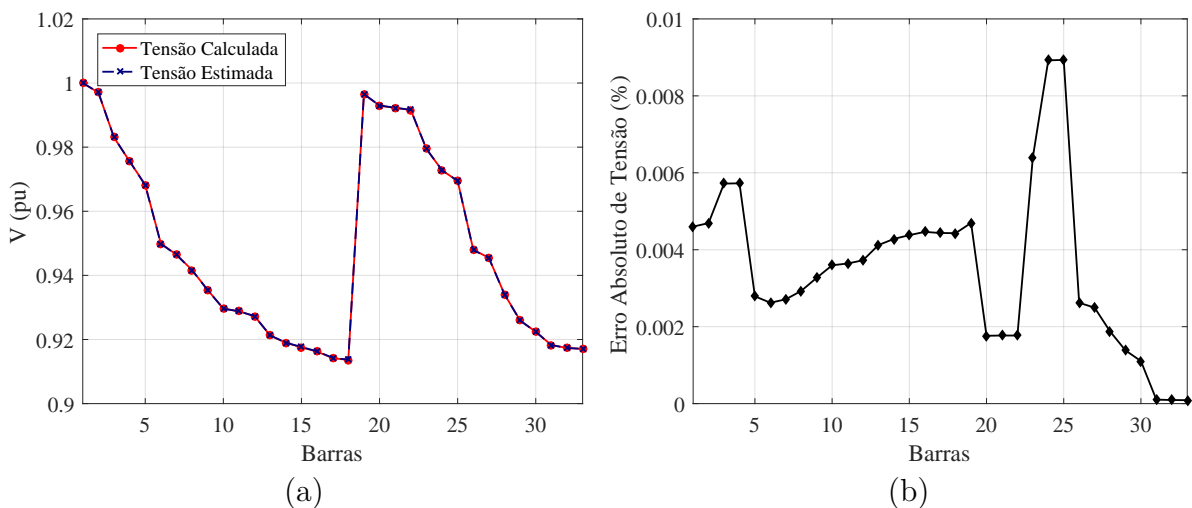
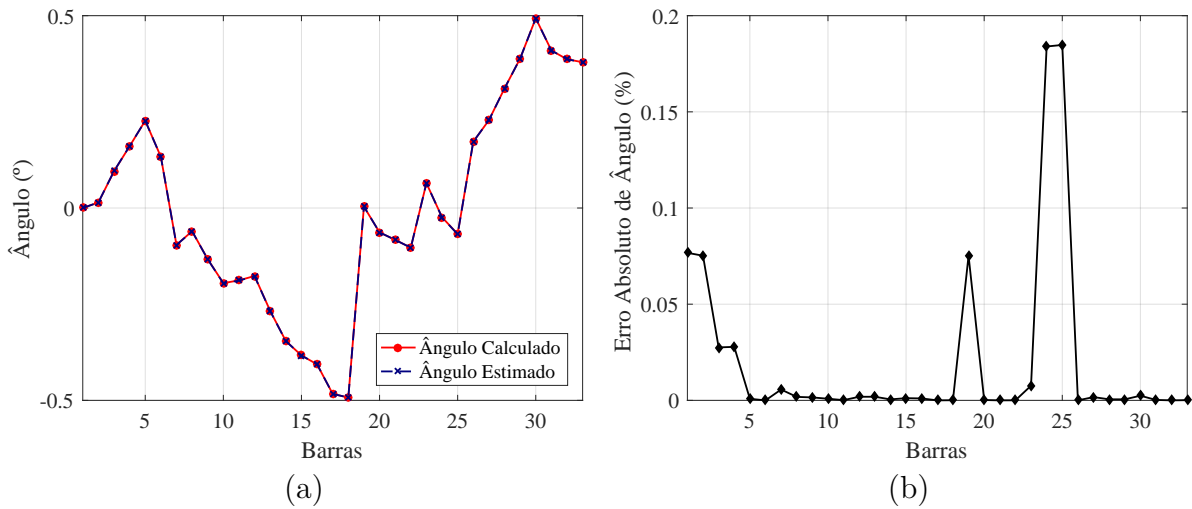


Figura 14 – Ângulo das tensões no sistema IEEE 33 barras: Cenário 2.



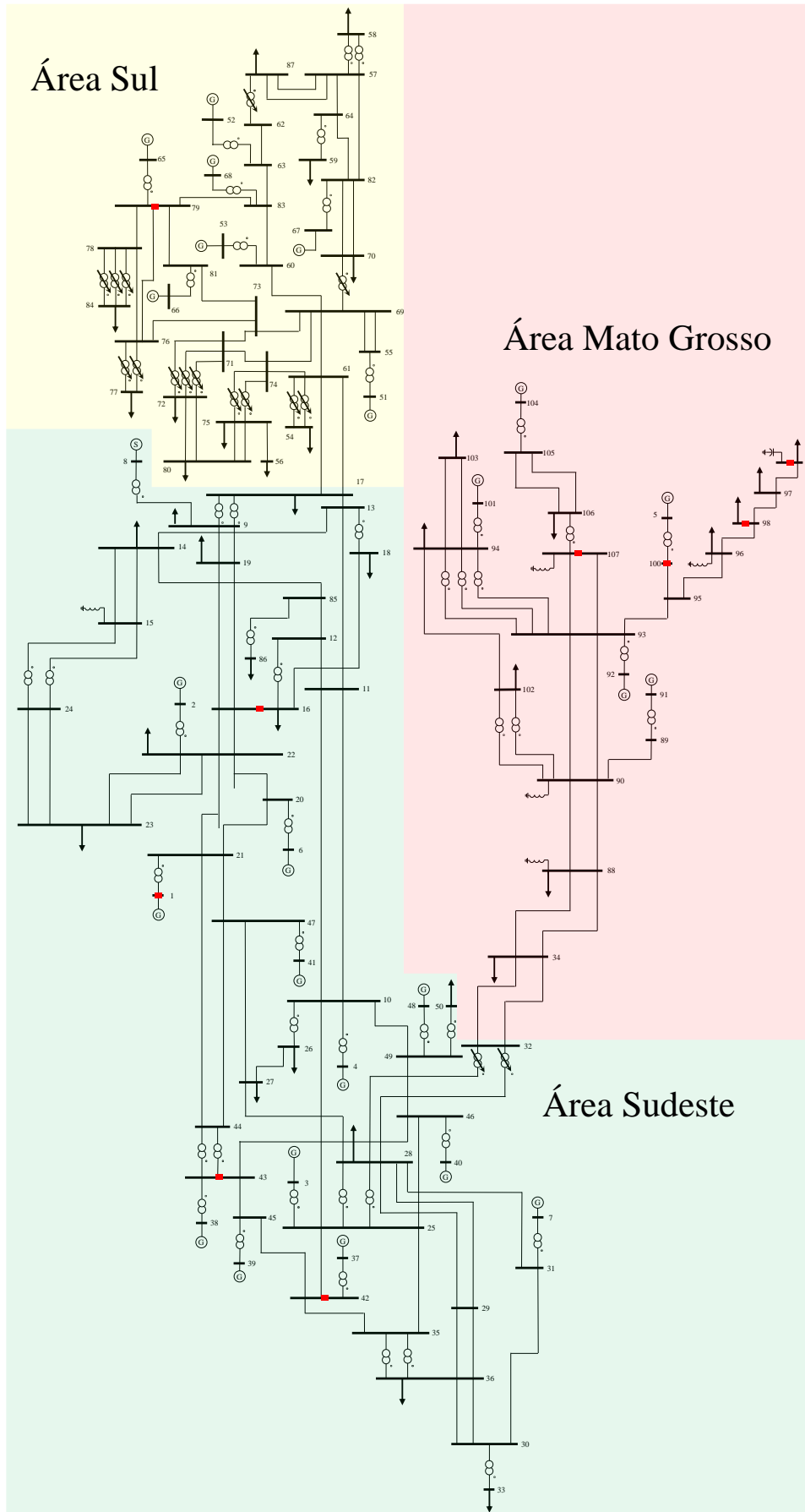
### 5.3 SISTEMA TESTE BRASILEIRO DE 107 BARRAS

Para finalizar a validação do HESEM em sistemas de transmissão, propõe-se a simulação em um sistema de maior porte. Para isso, foi adotado o sistema-teste brasileiro de 107 barras, que emula a interconexão de três subsistemas, denominados Sul, Sudeste e Mato Grosso, sendo escolhido também pela fragilidade do subsistema Mato Grosso, interligado ao Sudeste e com trechos radiais em circuito simples.

A topologia deste sistema é apresentada na Figura 15 e seus dados de barras e de linhas encontram-se em Alves (2007).

Para garantir a observabilidade do sistema, propõe-se a alocação de PMUs nas barras 1, 16, 42, 43, 79, 98, 99, 100 e 107 (destacadas na Figura 15 por ■). Esses medidores fornecem, em tempo real, os fasores de tensão das barras onde estão instalados. Para representar a estocasticidade do processo de estimação, são adicionados erros aleatórios gaussianos às medições de tensão proporcionais a 0,4%. Complementado o plano de medições, consideram-se disponíveis diversas medições de potências ativa e reativa líquidas espalhadas pelo sistema, às quais é atribuído erro aleatório proporcional a 1%. Esse plano de medições é apresentado mais adiante na Tabela 17.

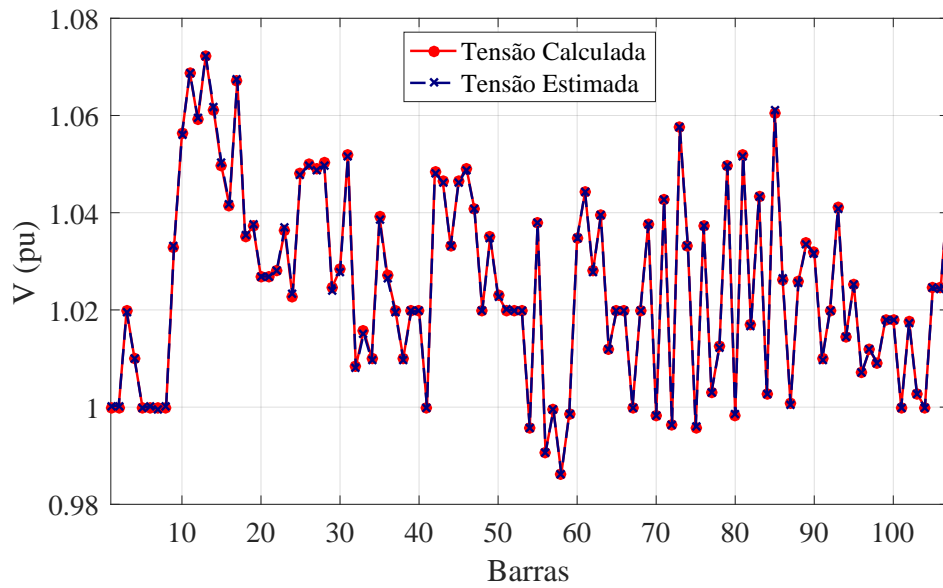
Figura 15 – Diagrama unifilar do sistema teste brasileiro de 107 barras.



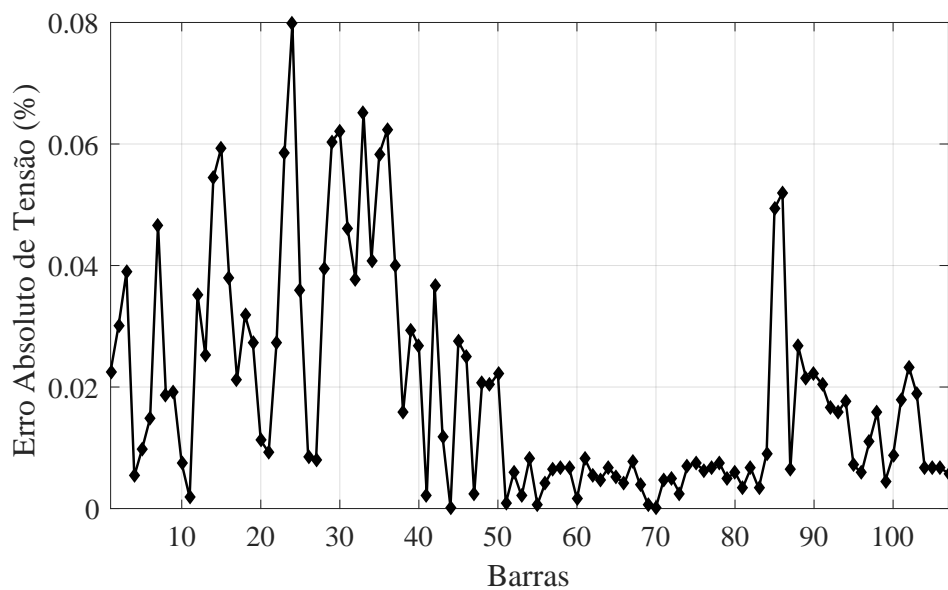
Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

Concluídas 5.000 simulações, as Figuras 16a e 17a apresentam uma comparação do estado do sistema calculado através do fluxo de potência e o estimado via HESEM. Nelas é possível notar que o estimador, mesmo aplicado a um sistema com fragilidades de interconexão, com baixo número de medidores instalados e sob forte influência de medidas carregadas de erros, foi capaz de restaurar o estado do sistema. Os erros absolutos observados para as tensões nodais, presentes na Figura 16b, se mostram bem reduzidos, com valores abaixo de 0,1%. O erro detectado nos ângulos de fase, Figura 17b, seguem o mesmo padrão, onde a maioria dos erros calculados não ultrapassa valores acima de 0,5%.

Figura 16 – Magnitude das tensões no sistema teste brasileiro de 107 barras.

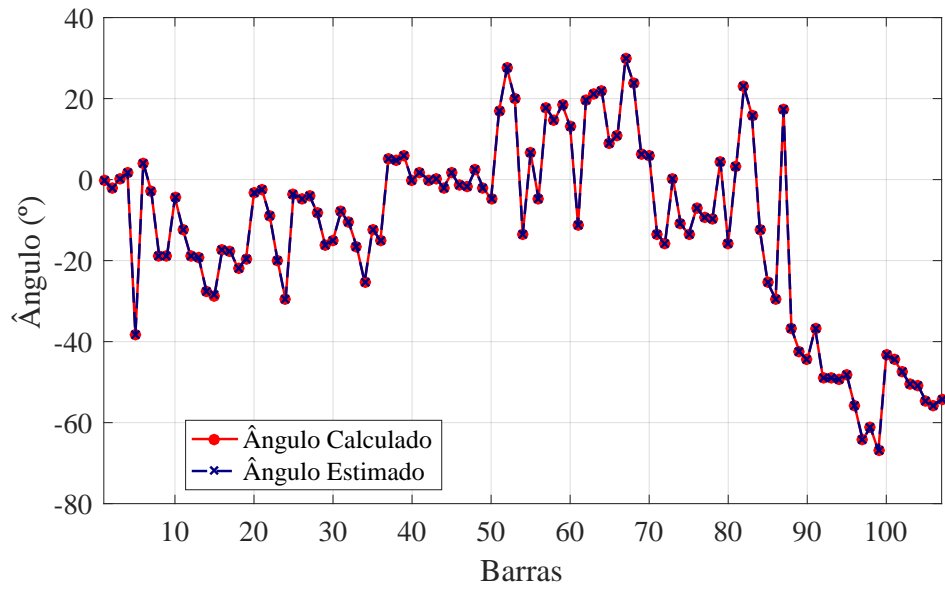


(a)

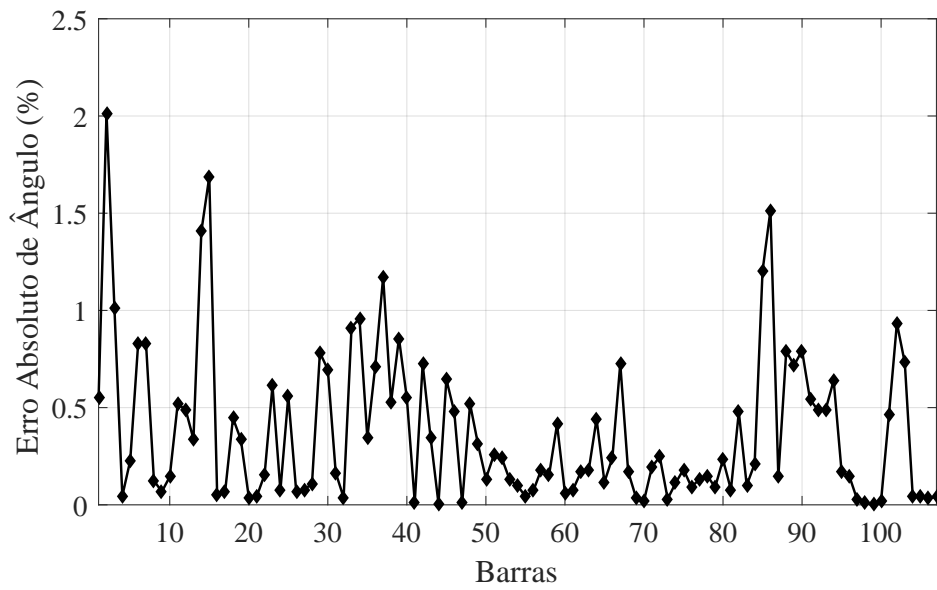


(b)

Figura 17 –  $\hat{\text{Ângulo}}$  das tensões no sistema teste brasileiro de 107 barras.



(a)



(b)

Tabela 17 – Plano de medição - sistema teste brasileiro de 107 barras.

Medição	De	Valor		$R_{ii}$	Medição	De	Valor		$R_{ii}$		
		Mag. (pu)	Fase ( $^{\circ}$ )				Mag. (pu)	Fase ( $^{\circ}$ )			
1	$V_k$	1	1,0001	-0,15	$1,6 \times 10^{-5}$	56	$S_k$	50	7,1907	-167,91	$1,0 \times 10^{-4}$
2	$V_k$	16	1,0361	-17,22	$1,6 \times 10^{-5}$	57	$S_k$	51	11,1582	7,17	$1,0 \times 10^{-4}$
3	$V_k$	42	1,0451	-0,05	$1,6 \times 10^{-5}$	58	$S_k$	52	11,5874	5,68	$1,0 \times 10^{-4}$
4	$V_k$	43	1,0404	0,31	$1,6 \times 10^{-5}$	59	$S_k$	53	12,0629	-3,44	$1,0 \times 10^{-4}$
5	$V_k$	79	1,0537	4,56	$1,6 \times 10^{-5}$	60	$S_k$	54	7,5228	-165,44	$1,0 \times 10^{-4}$
6	$V_k$	98	1,0035	-61,22	$1,6 \times 10^{-5}$	61	$S_k$	55	0,0000	5,81	$1,0 \times 10^{-5}$
7	$V_k$	99	1,0130	-67,00	$1,6 \times 10^{-5}$	62	$S_k$	56	0,1407	-162,60	$1,0 \times 10^{-4}$
8	$V_k$	100	1,0212	-43,37	$1,6 \times 10^{-5}$	63	$S_k$	57	0,0000	-83,53	$1,0 \times 10^{-5}$
9	$V_k$	107	1,0487	-54,13	$1,6 \times 10^{-5}$	64	$S_k$	58	1,6283	-167,24	$1,0 \times 10^{-4}$
10	$S_k$	2	8,1055	-9,50	$1,0 \times 10^{-4}$	65	$S_k$	59	0,9502	-169,16	$1,0 \times 10^{-4}$
11	$S_k$	3	10,8698	-21,87	$1,0 \times 10^{-4}$	66	$S_k$	60	0,0000	4,29	$1,0 \times 10^{-5}$
12	$S_k$	4	9,5307	-19,63	$1,0 \times 10^{-4}$	67	$S_k$	61	0,0000	-127,06	$1,0 \times 10^{-5}$
13	$S_k$	5	1,4161	-8,97	$1,0 \times 10^{-4}$	68	$S_k$	62	0,0000	-118,76	$1,0 \times 10^{-5}$
14	$S_k$	6	1,5113	-7,81	$1,0 \times 10^{-4}$	69	$S_k$	63	0,0000	127,89	$1,0 \times 10^{-5}$
15	$S_k$	7	2,0615	-13,94	$1,0 \times 10^{-4}$	70	$S_k$	64	0,0000	-146,14	$1,0 \times 10^{-5}$
16	$S_k$	8	4,5378	-90,00	$1,0 \times 10^{-4}$	71	$S_k$	65	7,3175	-18,66	$1,0 \times 10^{-4}$
17	$S_k$	9	0,6687	-178,92	$1,0 \times 10^{-4}$	72	$S_k$	66	7,0407	-8,89	$1,0 \times 10^{-4}$
18	$S_k$	10	0,0000	178,07	$1,0 \times 10^{-5}$	73	$S_k$	67	7,1005	7,25	$1,0 \times 10^{-4}$
19	$S_k$	11	0,0000	90,50	$1,0 \times 10^{-5}$	74	$S_k$	68	9,4032	4,40	$1,0 \times 10^{-4}$
20	$S_k$	12	0,0000	-39,84	$1,0 \times 10^{-5}$	75	$S_k$	69	0,0000	139,23	$1,0 \times 10^{-5}$
21	$S_k$	13	0,0000	-87,42	$1,0 \times 10^{-5}$	76	$S_k$	70	2,4036	-166,02	$1,0 \times 10^{-4}$
22	$S_k$	14	9,3971	-165,52	$1,0 \times 10^{-4}$	77	$S_k$	71	0,0000	-37,03	$1,0 \times 10^{-5}$
23	$S_k$	16	1,9975	-153,44	$1,0 \times 10^{-4}$	78	$S_k$	72	11,6313	-177,36	$1,0 \times 10^{-4}$
24	$S_k$	18	4,8543	-158,75	$1,0 \times 10^{-4}$	79	$S_k$	73	0,0000	-121,60	$1,0 \times 10^{-5}$
25	$S_k$	19	3,0377	-161,85	$1,0 \times 10^{-4}$	80	$S_k$	74	0,0000	-92,98	$1,0 \times 10^{-5}$
26	$S_k$	20	0,0000	-154,72	$1,0 \times 10^{-5}$	81	$S_k$	75	9,6156	-150,96	$1,0 \times 10^{-4}$
27	$S_k$	21	0,0000	-150,78	$1,0 \times 10^{-5}$	82	$S_k$	76	0,0000	-47,32	$1,0 \times 10^{-5}$
28	$S_k$	22	0,5923	-156,96	$1,0 \times 10^{-4}$	83	$S_k$	77	7,6240	-175,74	$1,0 \times 10^{-4}$
29	$S_k$	23	0,7974	-154,71	$1,0 \times 10^{-4}$	84	$S_k$	78	0,0000	-161,75	$1,0 \times 10^{-5}$
30	$S_k$	24	7,4178	-160,35	$1,0 \times 10^{-4}$	85	$S_k$	79	0,0000	69,45	$1,0 \times 10^{-5}$
31	$S_k$	25	0,0000	70,46	$1,0 \times 10^{-5}$	86	$S_k$	80	0,7100	-178,36	$1,0 \times 10^{-4}$
32	$S_k$	26	1,0021	-157,25	$1,0 \times 10^{-4}$	87	$S_k$	81	0,0000	175,87	$1,0 \times 10^{-5}$
33	$S_k$	27	0,5910	-154,75	$1,0 \times 10^{-4}$	88	$S_k$	82	0,0000	-132,85	$1,0 \times 10^{-5}$
34	$S_k$	28	3,6491	-170,95	$1,0 \times 10^{-4}$	89	$S_k$	83	0,0000	-100,00	$1,0 \times 10^{-5}$
35	$S_k$	29	6,4636	-161,57	$1,0 \times 10^{-4}$	90	$S_k$	84	13,0235	-160,91	$1,0 \times 10^{-4}$
36	$S_k$	30	0,0000	-164,19	$1,0 \times 10^{-5}$	91	$S_k$	85	0,0000	-137,23	$1,0 \times 10^{-5}$
37	$S_k$	31	0,0000	-89,46	$1,0 \times 10^{-5}$	92	$S_k$	86	1,6130	-156,52	$1,0 \times 10^{-4}$
38	$S_k$	32	0,0000	3,55	$1,0 \times 10^{-5}$	93	$S_k$	87	4,2154	-162,64	$1,0 \times 10^{-4}$
39	$S_k$	33	0,9195	-158,43	$1,0 \times 10^{-4}$	94	$S_k$	88	0,3196	-167,26	$1,0 \times 10^{-4}$
40	$S_k$	34	0,9532	-160,42	$1,0 \times 10^{-4}$	95	$S_k$	89	0,0000	-126,21	$1,0 \times 10^{-5}$
41	$S_k$	35	0,0000	-71,47	$1,0 \times 10^{-5}$	96	$S_k$	90	0,0000	-98,98	$1,0 \times 10^{-5}$
42	$S_k$	36	10,4608	-160,71	$1,0 \times 10^{-4}$	97	$S_k$	91	0,5029	-10,29	$1,0 \times 10^{-4}$
43	$S_k$	37	7,2720	-14,70	$1,0 \times 10^{-4}$	98	$S_k$	92	0,1498	-90,00	$1,0 \times 10^{-4}$
44	$S_k$	38	3,2654	-23,18	$1,0 \times 10^{-4}$	99	$S_k$	93	0,0000	-98,79	$1,0 \times 10^{-5}$
45	$S_k$	39	4,1887	-17,35	$1,0 \times 10^{-4}$	100	$S_k$	94	0,7774	-167,95	$1,0 \times 10^{-4}$
46	$S_k$	40	3,4658	-54,38	$1,0 \times 10^{-4}$	101	$S_k$	95	0,0000	-109,32	$1,0 \times 10^{-5}$
47	$S_k$	41	3,0159	-11,38	$1,0 \times 10^{-4}$	102	$S_k$	96	0,1272	-174,56	$1,0 \times 10^{-4}$
48	$S_k$	42	0,0000	83,02	$1,0 \times 10^{-5}$	103	$S_k$	97	0,2496	-162,73	$1,0 \times 10^{-4}$
49	$S_k$	43	0,0000	-72,14	$1,0 \times 10^{-5}$	104	$S_k$	101	2,3560	-7,10	$1,0 \times 10^{-4}$
50	$S_k$	44	2,9267	-159,22	$1,0 \times 10^{-4}$	105	$S_k$	102	1,3538	-162,36	$1,0 \times 10^{-4}$
51	$S_k$	45	0,0000	63,58	$1,0 \times 10^{-5}$	106	$S_k$	103	1,8814	-170,72	$1,0 \times 10^{-4}$
52	$S_k$	46	0,0000	-157,21	$1,0 \times 10^{-5}$	107	$S_k$	104	0,5286	-18,54	$1,0 \times 10^{-4}$
53	$S_k$	47	0,0000	-120,94	$1,0 \times 10^{-5}$	108	$S_k$	105	0,0000	-154,17	$1,0 \times 10^{-5}$
54	$S_k$	48	8,0921	-8,40	$1,0 \times 10^{-4}$	109	$S_k$	106	1,3523	-164,27	$1,0 \times 10^{-4}$
55	$S_k$	49	0,0000	-131,19	$1,0 \times 10^{-5}$						

#### 5.4 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O HESEM E O MQP

Embora os resultados obtidos com o HESEM indiquem boa capacidade de restauração do estado do sistema, é importante comparar seu desempenho com um estimador clássico amplamente utilizado na literatura, como é o caso do MQP. As Tabelas 18–20 trazem essa comparação para os sistemas de 14, 33, considerando o primeiro cenário de cada, e o sistema de 107 barras, considerando carregamento leve (L), nominal (N) e pesado (P). Para cada condição, são reportados o tempo computacional, o número de recursões do HESEM e de iterações do MQP, além do maior Erro Percentual Absoluto Médio (EPAM) observado entre as barras, tanto para as magnitudes de tensão quanto para os ângulos.

Tabela 18 – Comparação entre o HESEM e o MQP - sistema IEEE 14 barras.

Fator de carga	HESEM			MQP		
	L	N	P	L	N	P
Recursões/iterações	7	8	8	2	3	3
Tempo (ms)	10	14	21	18	21	22
EPAM V	0,005%	0,007%	0,007%	0,004%	0,008%	0,008%
EPAM $\theta$	0,071%	0,072%	0,071%	0,081%	0,080%	0,091%

Tabela 19 – Comparação entre o HESEM e o MQP - sistema IEEE 33 barras.

Fator de carga	HESEM			MQP		
	L	N	P	L	N	P
Recursões/iterações	14	15	17	4	6	7
Tempo (ms)	55	59	58	98	102	103
EPAM em V	0,011%	0,013%	0,021%	0,151%	0,161%	0,201%
EPAM em $\theta$	0,090%	0,091%	0,112%	0,121%	0,142%	0,196%

Tabela 20 – Comparação entre o HESEM e o MQP - sistema de 107 barras.

Fator de carga	HESEM			MQP		
	L	N	P	L	N	P
Recursões/iterações	35	36	42	6	6	8
Tempo (ms)	178	194	255	205	210	292
EPAM em V	0,059%	0,082%	0,067%	0,091%	0,124%	0,134%
EPAM em $\theta$	2,177%	2,344%	2,571%	2,503%	3,550%	4,527%

De modo geral, os dois estimadores conseguem estimar com precisão o estado operativo dos sistemas, porém o HESEM tende a entregar o resultado com menor custo computacional e, na maior parte dos casos, com erros de estimação inferiores. Esse comportamento fica particularmente evidente no sistema de 33 barras, no qual o MQP

apresenta piora significativa no EPAM de tensão quando comparado ao HESEM. No sistema de 107 barras observa-se novamente a mesma tendência, onde a solução via MQP apresenta uma piora mais evidente à medida que o fator de carregamento aumenta.

Uma justificativa importante para esse comportamento está no fato de que o MQP depende da atualização iterativa de uma matriz Jacobiana. Conforme o carregamento cresce, a Jacobiana pode se tornar mal condicionada, o que amplia a sensibilidade numérica e pode impactar a qualidade da solução obtida (Melo; Oliveira; Antunes, 2022). Por outro lado, o HESEM dispensa a Jacobiana, uma vez que sua atualização recursiva é baseada em uma solução matricial direta. Assim, a comparação com o MQP tradicional é mantida aqui justamente para evidenciar a diferença entre um procedimento clássico iterativo e uma estratégia recursiva, destacando limitações e vantagens em termos de robustez e desempenho.

## 5.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste penúltimo capítulo foram apresentados e discutidos os desempenhos do método proposto a partir de simulações computacionais nos sistemas IEEE de 14 e 33 barras e no sistema-teste brasileiro de 107 barras. Diferentes planos de medição e condições de carregamento foram avaliados, e as estimativas do HESEM foram comparadas com os valores de referência do fluxo de potência. Por fim, a comparação com o MQP serviu para contextualizar o desempenho do HESEM frente a um estimador clássico.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este ultimo capítulo é reservado para apresentar as conclusões tiradas a partir das simulações computacionais que aplicam o HESEM de forma direta para estimar os estados em SEPs, destacando as vantagens e desvantagens observadas, e possíveis linhas de pesquisa que possam dar continuidade aos estudos de estimação de estados a partir de técnicas recursivas.

### 6.1 CONCLUSÕES

Esta dissertação apresentou uma nova metodologia e um trabalho pioneiro no tema para a estimação do estado operativo de SEPs, baseada em técnicas de incorporação holomórfica. Conforme evidenciado no exemplo tutorial, resolvido passo a passo, o HESEM demonstrou ser capaz de solucionar, de forma não iterativa, o sistema de equações não lineares associado ao problema de estimação de estados, fornecendo uma resposta única e estável.

Os resultados satisfatórios observados nas simulações com o sistema IEEE de 14 barras e com o sistema brasileiro equivalente de 107 barras reforçam a aplicabilidade do método proposto a sistemas de transmissão. Os dois cenários simulados para o sistema IEEE 14 barras mostraram que o HESEM consegue lidar com diferentes tipos de medições, com classes de exatidão distintas, sejam elas provenientes de PMUs ou de pseudomedidas. Ressalta-se também que, mesmo diante do maior porte e das conhecidas fragilidades de interconexão entre regiões presentes no sistema de 107 barras, o HESEM foi capaz de estimar com êxito o seu estado operativo.

Os resultados obtidos nas simulações com o sistema IEEE de 33 barras, em ambos os cenários avaliados, indicam que o HESEM também é aplicável a sistemas de distribuição. Mesmo em um contexto em que as redes tendem a ser mais extensas e radiais, com maiores variações de tensão ao longo dos alimentadores e forte dependência de pseudomedidas, em geral menos precisas e sujeitas a incertezas, o método foi capaz de estimar o estado operativo do sistema de forma estável.

A comparação entre o HESEM e o MQP permitiu validar o método proposto frente a um estimador clássico amplamente adotado na literatura. De modo geral, ambos apresentaram bom desempenho na obtenção do estado operativo. Contudo, os resultados indicaram vantagem do HESEM em termos de tempo computacional e, na maioria dos casos, de qualidade das estimativas, sobretudo em condições operativas de carga pesada e em sistemas de maior porte. Ao evitar a atualização iterativa da Jacobiana e utilizar uma solução recursiva, o HESEM se consolida como uma alternativa robusta, reforçando a contribuição central desta dissertação.

## 6.2 TRABALHOS FUTUROS

A fim de dar continuidade as pesquisas que aplicam técnicas de incorporação holomórfica ao problema de estimação de estados, os seguintes linhas de pesquisa são sugeridas:

- Estender o HESEM para redes de distribuição trifásicas, contemplando o desbalanceamento e acoplamento entre as fases;
- Investigar uma formulação que integre medições híbridas, combinando dados fasoriais de PMUs com medições convencionais de SCADA, ampliando a aplicabilidade do estimador em diferentes níveis de instrumentação;
- Estender os mecanismos de robustez já investigados para o HESEM, contemplando cenários mais desafiadores, como múltiplos *bad data* correlacionados, erros de topologia e medições híbridas SCADA/PMUs, com validação em sistemas de maior porte;
- Explorar a estimação conjunta de estado e parâmetros, visando reduzir impactos de modelos imperfeitos e melhorar a consistência das estimativas em condições operativas diversas.

## REFERÊNCIAS

- ABBASY, N. H.; ISMAIL, H. M. A unified approach for the optimal pmu location for power system state estimation. **IEEE Transactions on power systems**, IEEE, v. 24, n. 2, p. 806–813, 2009.
- ABUR, A.; EXPÓSITO, A. G. Detecting multiple solutions in state estimation in the presence of current magnitude measurements. **IEEE transactions on power systems**, IEEE, v. 12, n. 1, p. 370–375, 1997.
- ABUR, A.; EXPOSITO, A. G. **Power system state estimation: theory and implementation**. [S.l.]: CRC press, 2004.
- AL-ROOMI, A. Power flow test systems repository, 2015. URL <https://al-roomi.org/power-flow>, 2022.
- ALIMARDANI, A.; THERRIEN, F.; ATANACKOVIC, D.; JATSKEVICH, J.; VAAHEDI, E. Distribution system state estimation based on nonsynchronized smart meters. **IEEE Transactions on Smart Grid**, IEEE, v. 6, n. 6, p. 2919–2928, 2015.
- ALVES, W. Proposition of test-systems to power systems analysis. **Master’s thesis, Fluminense Federal University., Rio de Janeiro, Brazil**, 2007.
- BABU, R.; BHATTACHARYYA, B. Optimal allocation of phasor measurement unit for full observability of the connected power network. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, v. 79, p. 89–97, 2016.
- BARAN, M. E.; KELLEY, A. W. State estimation for real-time monitoring of distribution systems. **IEEE Transactions on Power systems**, IEEE, v. 9, n. 3, p. 1601–1609, 1994.
- BARAN, M. E.; KELLEY, A. W. A branch-current-based state estimation method for distribution systems. **IEEE transactions on power systems**, IEEE, v. 10, n. 1, p. 483–491, 1995.
- BARAN, M. E.; KELLEY, A. W. State estimation for real-time monitoring of distribution systems. **IEEE Transactions on Power systems**, IEEE, v. 9, n. 3, p. 1601–1609, 2002.
- BARAN, M. E.; WU, F. F. Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing. **IEEE Transactions on Power delivery**, IEEE, v. 4, n. 2, p. 1401–1407, 1989.
- BASIRI-KEJANI, M.; GHOLIPOUR, E. Holomorphic embedding load-flow modeling of thyristor-based facts controllers. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 32, n. 6, p. 4871–4879, 2017.
- CASTILLO, E.; CONEJO, A. J.; PRUNEDA, R. E.; SOLARES, C. Observability analysis in state estimation: A unified numerical approach. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 21, n. 2, p. 877–886, 2006.
- CHEN, W.; WANG, K.; XU, J. The holomorphic embedding method to calculate continuation power flow. In: IEEE. **2020 5th Asia Conference on Power and Electrical Engineering (ACPEE)**. [S.l.], 2020. p. 1950–1954.

- CHENG, G.; LIN, Y.; ABUR, A.; GÓMEZ-EXPÓSITO, A.; WU, W. A survey of power system state estimation using multiple data sources: Pmus, scada, ami, and beyond. **IEEE Transactions on Smart Grid**, IEEE, v. 15, n. 1, p. 1129–1151, 2023.
- CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W.; FREY, K. D. Treatment of inequality constraints in power system state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 10, n. 2, p. 567–574, 2002.
- DARMIS, O.; KORRES, G. N. A hybrid power system state estimator under limited pmu availability. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, 2024.
- DEHGHANPOUR, K.; WANG, Z.; WANG, J.; YUAN, Y.; BU, F. A survey on state estimation techniques and challenges in smart distribution systems. **IEEE Transactions on Smart Grid**, IEEE, v. 10, n. 2, p. 2312–2322, 2018.
- DENG, J. J.; CHIANG, H. D. Convergence region of newton iterative power flow method: Numerical studies. **Journal of Applied Mathematics**, Hindawi, v. 2013, 2013.
- DIOGO, V. M.; MELO, I. D.; WILLIAM, R.; OLIVEIRA, B. C. de. Four-wire three-phase state estimation for multi-grounded distribution systems. In: **Congresso Brasileiro de Automática-CBA**. [S.l.: s.n.], 2024. v. 4, n. 1.
- DOMÍNGUEZ, Á. B.; ECHAVARREN, F. M.; ROUCO, L. A convergence control scheme for multi-stage holomorphic embedding load-flow method. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, 2024.
- DUAN, Z.; LI, X. R. The role of pseudo measurements in equality-constrained state estimation. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, v. 49, n. 3, p. 1654–1666, 2013.
- FARDANESH, B.; ZELINGHER, S.; MELIOPOULOS, A. S.; COKKINIDES, G. J. Harmonic monitoring system via synchronized measurements. In: IEEE. **8th International Conference on Harmonics and Quality of Power. Proceedings (Cat. No. 98EX227)**. [S.l.], 1998. v. 1, p. 482–488.
- FENG, Y. **Solving for the low-voltage/large-angle power-flow solutions by using the**. Tese (Doutorado), 2015.
- FREITAS, F. D.; JR, A. C. S.; FERNANDES, L. F. J.; ACLE, Y. G. Restarted holomorphic embedding load-flow model based on low-order padé approximant and estimated bus power injection. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, v. 112, p. 326–338, 2019.
- GU, J.; CLEMENTS, K.; KRUMPHOLZ, G.; DAVIS, P. The solution of ill-conditioned power system state estimation problems via the method of peters and wilkinson. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, IEEE, n. 10, p. 3473–3480, 2007.
- HANDSCHIN, E.; LANGER, M.; KLIOKYS, E. An interior point method for state estimation with current magnitude measurements and inequality constraints. In: IEEE. **Proceedings of Power Industry Computer Applications Conference**. [S.l.], 1995. p. 385–391.

HEIDARIFAR, M.; ANDRIANESIS, P.; CARAMANIS, M. Holomorphic embedding load flow method in three-phase distribution networks with zip loads. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 38, n. 5, p. 4605–4616, 2022.

KARIMIPOUR, H.; DINAHAHI, V. Extended kalman filter-based parallel dynamic state estimation. **IEEE transactions on smart grid**, IEEE, v. 6, n. 3, p. 1539–1549, 2015.

KHAN, M. A.; HAYES, B. Ptp-based time synchronisation of smart meter data for state estimation in power distribution networks. **IET Smart Grid**, Wiley Online Library, v. 3, n. 5, p. 705–712, 2020.

KHAN, M. A.; HAYES, B. P. Ieee 1588 time synchronization in power distribution system applications: Timestamping and accuracy requirements. **IEEE Systems Journal**, IEEE, v. 17, n. 2, p. 2007–2017, 2023.

KORRES, G. N. A robust method for equality constrained state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 17, n. 2, p. 305–314, 2002.

LI, S.; LI, Q.; TYLAVSKY, D.; SHI, D. Robust pade approximation applied to the holomorphic embedded power flow algorithm. In: IEEE. **2018 North American Power Symposium (NAPS)**. [S.l.], 2018. p. 1–6.

LI, Y. **Effect of various holomorphic embeddings on convergence rate and condition number as applied to the power flow problem**. [S.l.]: Arizona State University, 2015.

LIMA, G. R.; MELO, I. D. de; FILHO, J. A. P. Interval holomorphic embedding load flow method: A novel approach for interval analysis considering load and generation uncertainties. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 226, p. 109921, 2024.

LIMA, G. R.; OLIVEIRA, E. J.; OLIVEIRA, L. W. Voltage control via tap-changing transformer using the holomorphic embedding load flow method based on total multiplication of polynomials. **IEEE Access**, IEEE, 2025.

LIU, C.; QIN, N.; SUN, K.; BAK, C. L. Remote voltage control using the holomorphic embedding load flow method. **IEEE Transactions on Smart Grid**, IEEE, v. 10, n. 6, p. 6308–6319, 2019.

LIU, C.; WANG, B.; HU, F.; SUN, K.; BAK, C. L. Online voltage stability assessment for load areas based on the holomorphic embedding method. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 33, n. 4, p. 3720–3734, 2017.

LIU, C.; WANG, B.; XU, X.; SUN, K.; SHI, D.; BAK, C. L. A multi-dimensional holomorphic embedding method to solve ac power flows. **Ieee Access**, IEEE, v. 5, p. 25270–25285, 2017.

MELIOPOULOS, A. S.; COKKINIDES, G. J.; GALVAN, F.; FARDANESH, B. Distributed state estimator advances and demonstration. In: IEEE. **Proceedings of the 41st Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS 2008)**. [S.l.], 2008. p. 163–163.

MELO, I. **Estimação de estados: uma abordagem sistêmica sobre qualidade de energia**. [S.l.: s.n.], 2022.

- MELO, I. D.; ANTUNES, M. P. Microgrid state and frequency estimation using kalman filter: an approach considering an augmented measurement jacobian matrix. **Electrical Engineering**, Springer, v. 104, n. 5, p. 3523–3534, 2022.
- MELO, I. D.; OLIVEIRA, B. C.; ANTUNES, M. P. Voltage stability assessment using modal analysis based on power systems state estimation. **Electrical Engineering**, Springer, v. 104, n. 2, p. 577–586, 2022.
- MELO, I. D.; PEREIRA, J. L.; RIBEIRO, P. F.; VARIZ, A. M.; OLIVEIRA, B. C. Harmonic state estimation for distribution systems based on optimization models considering daily load profiles. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 170, p. 303–316, 2019.
- MELO, I. D.; TEIXEIRA, M. O.; MINGORANÇA, J. S. Neutral-to-earth voltage (nev) and state estimation for unbalanced multiphase distribution systems based on an optimization model. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 217, p. 109123, 2023.
- MELO, I. D. de; RODRIGUES, F. M. e S.; LIMA, G. R. S. Análise fractal das múltiplas soluções do fluxo de potência em sistemas elétricos. p. 1–8, 2023.
- MILI, L.; CHENIAE, M.; VICHARE, N.; ROUSSEEUW, P. J. Robust state estimation based on projection statistics [of power systems]. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 11, n. 2, p. 1118–1127, 2002.
- MILI, L.; CUTSEM, T. V. Implementation of the hypothesis testing identification in power system state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 3, n. 3, p. 887–893, 1988.
- MILI, L.; PHANIRAJ, V.; ROUSSEEUW, P. Robust estimation theory for bad data diagnostics in electric power systems. In: **Control and Dynamic Systems**. [S.l.]: Elsevier, 1990. v. 37, p. 271–325.
- MINGORANÇA, J. S.; MELO, I. D.; SANTOS, A. B. d. Critical buses identification for voltage stability assessment considering the application of modal analysis and a robust state estimation with bad data suppression. **Electrical Engineering**, Springer, v. 105, n. 1, p. 335–348, 2023.
- MIRANDA, V.; SANTOS, A.; PEREIRA, J. State estimation based on correntropy: a proof of concept. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 24, n. 4, p. 1888–1889, 2009.
- MOLINA, T.; ORTEGA, J.; MUÑOZ, J. Helmpy, open source package of power flow solvers, including the holomorphic embedding load flow method (helm), developed on python 3. **Journal of Open Research Software**, v. 9, n. 1, 2021.
- MONTICELLI, A.; GARCIA, A. Fast decoupled state estimators. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 5, n. 2, p. 556–564, 2002.
- MONTICELLI, A.; MURARI, C.; WU, F. F. A hybrid state estimator: Solving normal equations by orthogonal transformations. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, IEEE, n. 12, p. 3460–3468, 1985.

MONTICELLI, A.; WU, F. F. Observability analysis for orthogonal transformation based state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 1, n. 1, p. 201–206, 1986.

MORELLO, R.; FULCO, G.; MUKHOPADHYAY, S.; FABBIANO, L.; CAPUA, C. D. Time synchronised power meters for advanced smart distribution of energy in smart grids. **IEEE Sensors Journal**, IEEE, 2024.

NOGUEIRA, P. F.; PERES, W.; RABELO, L. M.; POUBEL, R. P. B. Estimador baseado no critério de máxima correntropia para microrredes ilhadas. In: **Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI**. [S.l.: s.n.], 2023. v. 1, n. 2.

OLIVEIRA, B. C. de; MELO, I. D.; SOUZA, M. A. Bad data detection, identification and correction in distribution system state estimation based on pmus. **Electrical Engineering**, Springer, p. 1–17, 2021.

OLIVEIRA, B. C. de; PEREIRA, J. L.; ALVES, G. d. O.; MELO, I. D.; SOUZA, M. A. de; GARCIA, P. A. Decentralized three-phase distribution system static state estimation based on phasor measurement units. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 160, p. 327–336, 2018.

PHADKE, A. G.; THORP, J. S. **Synchronized phasor measurements and their applications**. [S.l.]: Springer, 2008. v. 1.

PRIMADIANTO, A.; LU, C.-N. A review on distribution system state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 32, n. 5, p. 3875–3883, 2016.

RAO, S.; TYLAVSKY, D. Nonlinear network reduction for distribution networks using the holomorphic embedding method. In: IEEE. **2016 North American Power Symposium (NAPS)**. [S.l.], 2016. p. 1–6.

RAO, S. D.; TYLAVSKY, D. J.; FENG, Y. Estimating the saddle-node bifurcation point of static power systems using the holomorphic embedding method. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, v. 84, p. 1–12, 2017.

RODRIGUES, F. M.; MELO, I. D.; OLIVEIRA, B. C. de; FALCÃO, D. M. Holomorphic embedding state estimation method using phasor measurement units. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, 2025.

SCHWEPPE, F. C.; WILDES, J. Power system static-state estimation, part i, ii and iii. **Power Apparatus and Systems, Ieee Transactions on**, IEEE, n. 1, p. 120–135, 1970.

SHAMSELDEIN, M. A fast holomorphic embedding power flow approach for meshed distribution networks. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, Wiley Online Library, v. 2022, n. 1, p. 9561385, 2022.

SINGH, H.; ALVARADO, F. L. Weighted least absolute value state estimation using interior point methods. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 9, n. 3, p. 1478–1484, 1994.

SINGH, R.; PAL, B.; JABR, R. Distribution system state estimation through gaussian mixture model of the load as pseudo-measurement. **IET generation, transmission & distribution**, IET, v. 4, n. 1, p. 50–59, 2010.

- SOUZA, M. A. de; PEREIRA, J. L.; ALVES, G. d. O.; OLIVEIRA, B. C. de; MELO, I. D.; GARCIA, P. A. Detection and identification of energy theft in advanced metering infrastructures. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 182, p. 106258, 2020.
- SU, H.-Y.; LIU, C.-W. Estimating the voltage stability margin using pmu measurements. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 31, n. 4, p. 3221–3229, 2015.
- SUBRAMANIAN, M. K. **Application of holomorphic embedding to the power-flow problem**. Tese (Doutorado) — Arizona State University, 2014.
- SUBRAMANIAN, M. K.; FENG, Y.; TYLAVSKY, D. Pv bus modeling in a holomorphically embedded power-flow formulation. Manhattan, KS, 2013.
- SUN, Y.; DING, T.; HAN, O.; LIU, C.; LI, F. Static voltage stability analysis based on multi-dimensional holomorphic embedding method. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 38, n. 4, p. 3748–3759, 2023.
- TAMURA, Y.; MORI, H.; IWAMOTO, S. Relationship between voltage instability and multiple load flow solutions in electric power systems. **IEEE Transactions on power apparatus and systems**, IEEE, n. 5, p. 1115–1125, 1983.
- THORP, J. S.; NAQAVI, S. A. Load-flow fractals draw clues to erratic behaviour. **IEEE Computer Applications in Power**, IEEE, v. 10, n. 1, p. 59–62, 1997.
- TRIAS, A. The holomorphic embedding load flow method. p. 1–8, 2012.
- TRIAS, A. **The Holomorphic Embedding Load-Flow Method: Foundations and Implementations**. 1. ed. Boston: Now Publishers, 2018. ISBN 978-1680835168.
- TRIAS, A.; MARÍN, J. L. The holomorphic embedding loadflow method for dc power systems and nonlinear dc circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, IEEE, v. 63, n. 2, p. 322–333, 2016.
- TRIAS, A.; MARIN, J. L. A padé-weierstrass technique for the rigorous enforcement of control limits in power flow studies. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, v. 99, p. 404–418, 2018.
- TRIAS, A. *et al.* Helm: The holomorphic embedding load-flow method. foundations and implementations. **Foundations and Trends® in Electric Energy Systems**, Now Publishers Inc, v. 3, n. 3-4, p. 140–370, 2018.
- WANG, B.; LIU, C.; SUN, K. Multi-stage holomorphic embedding method for calculating the power-voltage curve. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 33, n. 1, p. 1127–1129, 2018.
- YADAV, P. K.; BISWAL, M.; VEMUGANTI, H. Smart meter data management challenges. In: **Smart Metering**. [S.l.]: Elsevier, 2024. p. 221–256.
- YAO, R.; SUN, K.; SHI, D.; ZHANG, X. Voltage stability analysis of power systems with induction motors based on holomorphic embedding. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 34, n. 2, p. 1278–1288, 2018.
- YILMAZ, U. C.; ABUR, A. Ensuring solution uniqueness in three-phase power system state estimation. p. 1–6, 2024.

YORINO, N.; HARADA, S.; CHENG, H. A method to approximate a closest loadability limit using multiple load flow solutions. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 12, n. 1, p. 424–429, 1997.

ZHAO, J. Dynamic state estimation with model uncertainties using *h<sub>∞</sub> extended kalman filter*. **IEEE Transactions on power systems**, *IEEE*, v. 33, n. 1, p. 1099–1100, 2017.

ZHAO, J.; GÓMEZ-EXPÓSITO, A.; NETTO, M.; MILI, L.; ABUR, A.; TERZIJA, V.; KAMWA, I.; PAL, B.; SINGH, A. K.; QI, J. *et al.* Power system dynamic state estimation: Motivations, definitions, methodologies, and future work. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 34, n. 4, p. 3188–3198, 2019.

ZHAO, J.; NETTO, M.; MILI, L. A robust iterated extended kalman filter for power system dynamic state estimation. **IEEE transactions on power systems**, IEEE, v. 32, n. 4, p. 3205–3216, 2016.