

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Thiago Trindade Cardoso**

**Controle Robusto Multivariável do Protótipo de Fonte Modular de Corrente  
do Sirius**

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cardoso, Thiago Trindade.

Controle Robusto Multivariável do Protótipo de Fonte Modular de Corrente do Sirius / Thiago Trindade Cardoso. – 2026.

78 f. : il.

Orientador: Pedro Machado de Almeida

Coorientador: André Augusto Ferreira

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2026.

1. Rastreamento de alta precisão. 2. Controle Multivariável. 3. Redução de Modelo. 4. Controle Robusto. 5. Laboratório Nacional de Luz Síncrotron. 6. Fonte de Corrente. I. Almeida, Pedro Machado de, orient. II. Ferreira, André Augusto, coorient. III. Título

**Thiago Trindade Cardoso**

**Controle Robusto Multivariável do Protótipo de Fonte Modular de Corrente  
do Sirius**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas Eletrônicos

Orientador: Prof. Dr. Pedro Machado de Almeida

Coorientador: Prof. Dr. André Augusto Ferreira

Juiz de Fora

2026

**Thiago Trindade Cardoso**

**Controle Robusto Multivariável do Protótipo de Fonte Modular de Corrente do Sirius**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Sistemas Eletrônicos

Aprovada em 11 de fevereiro de 2026.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Pedro Machado de Almeida** - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. André Augusto Ferreira** - Coorientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. José Antenor Pomilio**  
Universidade Estadual de Campinas

**Prof. Dr. Gabriel Azevedo Fogli**  
Universidade Federal de Minas Gerais

**Prof. Dr. Pedro Gomes Barbosa**  
Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Allan Fagner Cupertino**  
Universidade Federal de Juiz de Fora



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Machado de Almeida, Professor(a)**, em 11/02/2026, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **JOSE ANTENOR POMILIO, Usuário Externo**, em 11/02/2026, às 16:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel Azevedo Fogli, Usuário Externo**, em 11/02/2026, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Allan Fagner Cupertino, Professor(a)**, em 11/02/2026, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Gomes Barbosa, Professor(a)**, em 11/02/2026, às 17:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Augusto Ferreira, Professor(a)**, em 28/04/2026, às 08:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2831935** e o código CRC **EE6A1847**.

Dedico este trabalho aos meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Andréa e Eduardo, expresso minha profunda gratidão por todo o apoio, carinho e compreensão ao longo de toda a minha vida. À minha irmã, Thaís, agradeço pela amizade, companheirismo e convivência durante grande parte desta caminhada.

Em especial, ao meu orientador, professor Pedro Machado de Almeida, expresso minha sincera gratidão pelos valiosos ensinamentos, pela constante disponibilidade, pelas orientações precisas e pela motivação permanente ao longo do desenvolvimento deste trabalho, bem como pelo incentivo fundamental para a conclusão desta etapa.

Ao meu coorientador, professor André Augusto Ferreira, agradeço pelo acompanhamento contínuo, pelas contribuições técnicas, e pelo constante apoio durante toda minha jornada acadêmica.

Agradeço ao CNPEM pelo suporte institucional e pela oportunidade de desenvolver pesquisas relevantes nesta área. Aos colegas Gabriel Oehlmeyer Brunheira e Bruno Edson Limeira, registro meu agradecimento por compartilharem seus conhecimentos e por toda a colaboração no esclarecimento das dúvidas relacionadas ao funcionamento do Sirius.

Aos amigos que estiveram ao meu lado ao longo desse percurso, oferecendo apoio e incentivo, deixo meu sincero agradecimento.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, fundamental para a realização deste trabalho

“O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia.”  
(Collier, Robert. *The Secret of the Ages*, 1926).

## RESUMO

Este trabalho apresenta o projeto e a validação experimental de uma estratégia de controle robusto multivariável aplicada à um protótipo da fonte de corrente do acelerador tipo *Booster* do Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS), no Brasil. A fonte, responsável por fornecer uma corrente em forma de onda triangular, exige rastreamento preciso com uma tolerância de erro inferior a 100 ppm, a fim de injetar os elétrons com precisão no anel de armazenamento. Caracterizado por uma estrutura complexa, de alta ordem e com múltiplas entradas e saídas, composta por vários módulos de potência em série e paralelo, o sistema tem sua complexidade tratada por meio de uma técnica de redução de modelo baseada na norma de Hankel. A utilização da planta de ordem reduzida durante o projeto do controlador não apenas simplifica o sistema, mas também resulta em um controlador de ordem inferior. Para garantir estabilidade e desempenho robustos na planta de ordem completa, o erro de aproximação é reintroduzido como incerteza no modelo reduzido. O projeto do controlador utiliza uma abordagem ponderada baseada no controle  $H_\infty$ . A validação experimental, feita com um protótipo em escala reduzida, confirma a eficácia da metodologia proposta em obter rastreamento preciso e desempenho robusto. Por fim, os resultados possibilitam analisar o esforço de controle, o erro das correntes em ppm, o equilíbrio das correntes de saída em cada lado da conexão em paralelo e a comparação com técnicas clássicas de controle.

**Palavras-chave:** Rastreamento de Alta Precisão; Controle Multivariável; Redução de Modelo; Controle Robusto; Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS); Fonte de Corrente.

## ABSTRACT

This paper presents the design and experimental validation of a multivariable robust control strategy applied to a prototype of the Brazilian Synchrotron Light Laboratory booster current source. The source, tasked with delivering a triangular waveform current, necessitates precise tracking with an error tolerance of less than 100 parts per million, in order to precisely inject electrons into the storage ring. Characterized by a complex, high-order multi-input multi-output structure with multiple series and parallel power modules, the system complexity is addressed through a model reduction technique based on the Hankel norm. Leveraging the reduced-order plant during controller design not only simplifies the system but also results in a lower-order controller. To guarantee robust stability and performance for the full-order plant, the approximation error is reintroduced as uncertainty into the reduced-order model. The controller design employs a weighted  $\mathcal{H}_\infty$  approach. Experimental validation using a small-scale prototype confirms the effectiveness of the proposed methodology in achieving precise tracking and robust performance. Finally, the results enable the analysis of the control effort, the current error in ppm, the current-sharing balance between the parallel connection, and the comparison with classical control techniques.

**Keywords:** High-Precision Tracking; Multivariable control; Robust control; Brazilian Synchrotron Light Laboratory (LNLS); Current source.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Estrutura para geração da luz síncrotron. . . . .	16
Figura 2 – Eletroímãs. . . . .	16
Figura 3 – Fonte do <i>Booster</i> para alimentação da carga magnética. . . . .	17
Figura 4 – Estágio de entrada de um módulo. . . . .	18
Figura 5 – Topologia do estágio de saída. . . . .	18
Figura 6 – Corrente de referência dos eletroímãs. A área destacada é a região onde a precisão de rastreamento é alta relevância. . . . .	19
Figura 7 – Topologia modular da fonte de alimentação. . . . .	19
Figura 8 – Topologia do estágio de saída da fonte de corrente dos dipolos do <i>Booster</i> . . . . .	25
Figura 9 – Topologia da associação de dois módulos em série. . . . .	26
Figura 10 – Associação de $N$ módulos em série. . . . .	28
Figura 11 – Associação em paralelo de 2 módulos de saída. . . . .	30
Figura 12 – Representação do acoplamento magnético como fontes de tensão controladas. . . . . .	31
Figura 13 – Associação de dois ramos paralelos, cada um com $N$ módulos em série. . . . .	32
Figura 14 – Topologia do protótipo de menor potência. . . . .	39
Figura 15 – Valores singulares de Hankel e erro de redução. . . . .	40
Figura 16 – Resposta em frequência dos modelos de ordem completa e reduzida. . . . .	43
Figura 17 – Resposta da corrente de saída para uma variação de 0,25 nos sinais de modulação. . . . .	44
Figura 18 – Resposta da tensão de saída para uma variação de 0,25 nos sinais de modulação. . . . .	44
Figura 19 – Resposta em frequência da família de modelos incertos. . . . .	46
Figura 20 – Diagrama de blocos de uma planta com distúrbio. . . . .	49
Figura 21 – Diagrama de blocos de um sistema de controle com um grau de liberdade. . . . .	50
Figura 22 – Configuração padrão do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	53
Figura 23 – Planta aumentada com filtros de ponderação. . . . .	55
Figura 24 – Resposta em frequência. . . . .	58
Figura 25 – Resposta em frequência dos valores singulares em malha fechada. . . . .	58
Figura 26 – Protótipo em escala reduzida. 1) Fonte de alimentação CC, 2) Módulos de potência e controle. . . . .	59
Figura 27 – Carga magnética. . . . .	60
Figura 28 – Resposta em frequência do controlador. . . . .	62
Figura 29 – Comportamento de rastreamento da corrente $i_{o1}$ . . . . .	62
Figura 30 – Comportamento de rastreamento da corrente $i_{o2}$ . . . . .	63
Figura 31 – Sinais de modulação. . . . .	63
Figura 32 – Comportamento do erro de rastreamento. . . . .	64

Figura 33 – Erro de rastreamento de $i_{o2}$ com tempo morto reduzido para 200 ns. . .	64
Figura 34 – Erro de compartilhamento $e_s = i_{o1} - i_{o2}$ entre os conversores conectados em paralelo. . . . .	65
Figura 35 – Comportamento das correntes de saída em resposta a uma mudança em degrau na referência. . . . .	66
Figura 36 – Comparação da resposta de rastreamento para diferentes parâmetros de filtro. . . . .	67
Figura 37 – Erros de rastreamento para os controladores PI e proposto. . . . .	68
Figura 38 – Comportamento da corrente de saída para variação da indutância da carga.	68

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema . . . . .	38
Tabela 2 – Parâmetros do filtro de ponderação . . . . .	56
Tabela 3 – Ganhos do controlador . . . . .	57
Tabela 4 – Principais características do transdutor de corrente ITN 12-P ULTRASTAB. . . . .	60
Tabela 5 – Características da conversão analógico-digital. . . . .	61

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**CNPEM** Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais

**DSC** Controlador Digital de Sinais, (do inglês, *Digital Signal Controller*)

**HNA** Aproximação pela Norma Hankel, (do inglês, *Hankel-Norm Approximation*)

**LINAC** Acelerador Linear de Partículas, (do inglês, *Linear Particle Accelerator*)

**LNLS** Laboratório Nacional de Luz Síncrotron

**MIMO** Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas, (do inglês, *Multiple-Input and Multiple-Output*)

**MOR** Modelo de Ordem Reduzida

**SISO** Única Entrada e Única Saída, (do inglês, *Single-Input and Single-Output*)

**UFJF** Universidade Federal de Juiz de Fora

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1	Contextualização . . . . .	15
1.2	Caracterização do Problema . . . . .	16
1.3	Revisão Bibliográfica . . . . .	20
1.4	Objetivos . . . . .	21
1.5	Produção Bibliográfica . . . . .	22
1.6	Estrutura da tese . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Modelagem . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1	Topologia do estágio de saída . . . . .	24
2.2	Modelo matemático de um módulo . . . . .	24
2.3	Modelo matemático para módulos associados em série . . . . .	26
<b>2.3.1</b>	Modelo matemático para dois módulos associados em série . . . . .	26
<b>2.3.2</b>	Modelo matemático para N módulos em série . . . . .	27
2.4	Topologia para módulos conectados em paralelo . . . . .	30
<b>2.4.1</b>	Modelo matemático de 2 módulos em paralelo . . . . .	30
<b>2.4.2</b>	Modelo matemático para dois ramos paralelos, cada um com N módulos em série . . . . .	32
2.5	Hipóteses e Limitações do Modelo . . . . .	35
2.6	Modelos de ordem reduzida . . . . .	36
<b>2.6.1</b>	Decomposição em valores singulares . . . . .	37
<b>2.6.2</b>	Equações de Lyapunov e Gramianos . . . . .	37
<b>2.6.3</b>	Valores Singulares de Hankel . . . . .	37
<b>2.6.4</b>	Modelo reduzido para associação de módulos em paralelo . . . . .	38
<b>2.6.5</b>	Modelo com incertezas . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Fundamentação Teórica e Estratégia de Controle . . . . .</b>	<b>47</b>
3.1	Introdução ao problema de controle . . . . .	47
3.2	Controle Robusto . . . . .	47
<b>3.2.1</b>	Introdução teórica ao Controle Robusto . . . . .	48
3.3	Controle $H_\infty$ . . . . .	51
<b>3.3.1</b>	Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas . . . . .	51
<b>3.3.2</b>	Problema de Controle $H_\infty$ . . . . .	52
3.4	Projeto de Controlador $H_\infty$ . . . . .	54
<b>4</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS . . . . .</b>	<b>59</b>
4.1	Dados da bancada experimental . . . . .	59
4.2	Verificação Experimental . . . . .	61
4.3	Discussão dos Resultados . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Conclusões e Propostas para Trabalhos Futuros . . . . .</b>	<b>70</b>

5.1	Conclusões . . . . .	70
5.2	Propostas para trabalhos futuros . . . . .	71
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>72</b>
	<b>APÊNDICE A – Construção ótima para a Norma de Hankel .</b>	<b>75</b>

## 1 Introdução

### 1.1 Contextualização

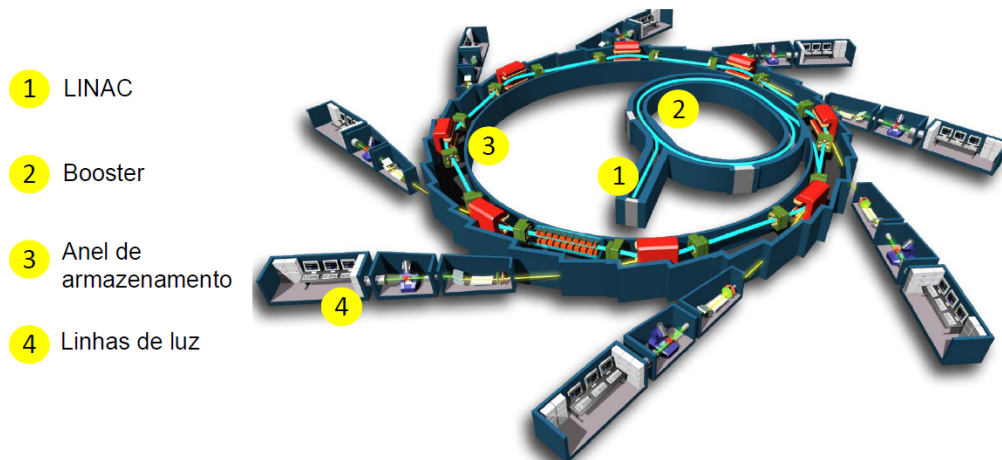
Em Outubro de 2018, na cidade de Campinas, foi inaugurada a primeira etapa do projeto Sirius. Desenvolvido pelo Laboratório Nacional de Luz Síncrotron (LNLS), no campus do Centro Nacional de Pesquisa em Energia e Materiais (CNPEM), o Sirius - uma fonte de luz síncrotron de quarta geração - é o maior empreendimento científico já construído no Brasil e visa garantir avanços em diversas áreas como física de materiais, química, biofísica, medicina, entre outros (WIEDEMANN, 2015; SANTOS et al., 2024).

A estrutura de geração da luz síncrotron é ilustrada na Figura 1. Primeiramente, ocorre a emissão de elétrons em um “canhão de elétrons”. Em seguida, esses elétrons são injetados no Acelerador Linear de Partículas, (do inglês, *Linear Particle Accelerator*) (LINAC), onde são acelerados até velocidades próximas à da luz. Posteriormente, o feixe é transferido para o *Booster*, no qual sua energia é elevada ciclicamente por meio de cavidades ressonantes de radiofrequência. Durante esse processo, os campos magnéticos produzidos pelos ímãs do *Booster* são ajustados de forma sincronizada, de modo a guiar o feixe e mantê-lo na trajetória adequada. Após atingir a energia especificada, os elétrons são injetados no anel de armazenamento, onde são mantidos em órbitas estáveis com o auxílio da rede magnética. A radiação síncrotron é produzida quando a trajetória dos elétrons é desviada por campos magnéticos e, posteriormente, é conduzida às linhas de luz. Nessas linhas, a radiação é condicionada e seus comprimentos de onda de interesse são selecionados para variadas aplicações (CNPEM, 2014).

O *Booster* opera de forma cíclica, elevando a energia dos elétrons até o nível requerido para a injeção no anel de armazenamento, com frequência de operação de 2 Hz. Para que esse processo ocorra de forma eficiente, a corrente de referência das fontes que alimentam os dipolos magnéticos do *Booster* deve ser seguida com alta precisão. Erros no rastreamento dessa corrente afetam o campo magnético produzido pelos dipolos e, conseqüentemente, podem alterar a trajetória, a posição e o tamanho do feixe de elétrons. Tais desvios podem provocar perdas de elétrons a cada ciclo, reduzindo a eficiência de injeção no anel de armazenamento. Além disso, a perda de elétrons pode aumentar o nível de radiação no sistema, contribuindo para a deterioração de materiais e componentes (CARDOSO et al., 2021).

Dessa forma, se torna imprescindível para o Sirius a aplicação de uma estratégia de controle que seja capaz de atingir as especificações necessárias para o funcionamento desejado das fontes modulares de corrente do *Booster*.

Figura 1 – Estrutura para geração da luz síncrotron.

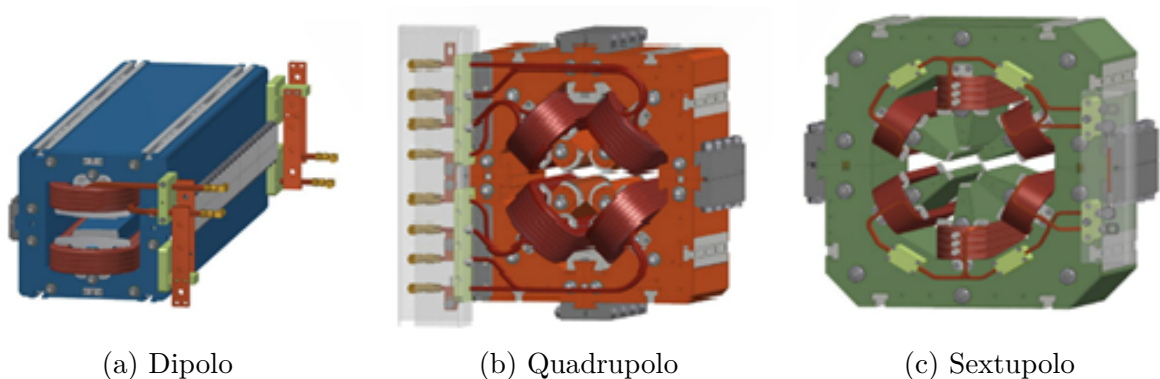


Fonte: adaptado de KAMP et al. (2013).

## 1.2 Caracterização do Problema

Para que o feixe de elétrons permaneça no anel emitindo luz por várias horas é necessário prover condições de estabilidade para o mesmo (OLIVEIRA, 2018). Dentre outros mecanismos, uma rede magnética ao redor do anel é necessária para direcionar, focalizar e corrigir a trajetória do feixe de elétrons. Esta rede magnética é composta principalmente por eletroímãs, tais como dipolos, quadrupolos e sextupolos, ilustrados na Figura 2.

Figura 2 – Eletroímãs.



Fonte: OLIVEIRA (2018).

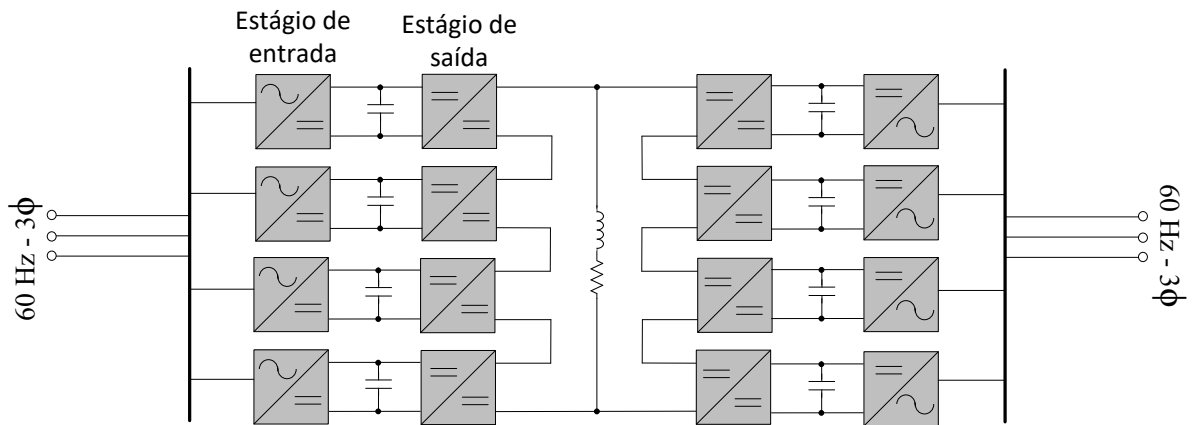
Como as dimensões do feixe de elétrons são muito pequenas, é necessária uma rede magnética estável para que as flutuações na posição e tamanho do feixe de elétrons estejam dentro de determinadas tolerâncias. Como efeito, as fontes de corrente que alimentam os eletroímãs devem apresentar característica similar.

Associada a alta estabilidade, tanto de curto prazo quanto de longo prazo, é desejável

que as fontes de correntes apresentem características como elevada acurácia e eficiência, alto fator de potência, baixo ruído, pequena ondulação de corrente, alta confiabilidade e fácil manutenção. Além disto, utilizar uma topologia modular e padronizada permite que sejam realizadas diferentes combinações de forma a atender às necessidades dos diversos eletroímãs, visando reduzir o custo de produção e o tempo de desenvolvimento.

A topologia, desenvolvida no LNLS e em estudo na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), para a alimentação do *Booster* do acelerador de partículas é mostrada na Figura 3. Ela possui uma configuração série-paralela de oito módulos, cujo objetivo é de fornecer uma elevada potência, em que a tensão de saída da carga é quatro vezes maior que a de um módulo e a corrente da carga o dobro de cada módulo.

Figura 3 – Fonte do *Booster* para alimentação da carga magnética.

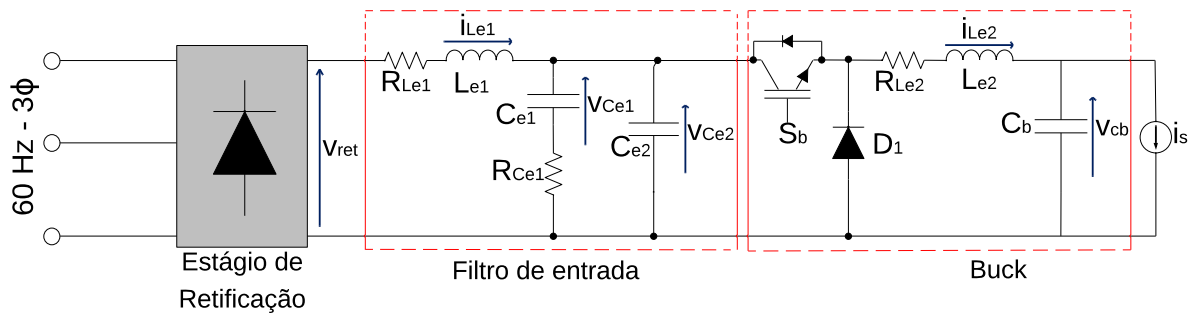


Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada módulo pode ser esquematicamente subdividido em dois estágios: um estágio de entrada e um estágio de saída, conforme ilustrado na Figura 3. O estágio de entrada, mostrado na Figura 4, é responsável pela adequação da tensão proveniente da rede elétrica, fornecendo ao estágio de saída uma tensão contínua regulada,  $v_{cb}$ , além de possibilitar a operação com elevado fator de potência (LOBATO, 2016). Este estágio é composto por um retificador trifásico não controlado seguido de um conversor abaixador. A regulação do estágio de entrada é realizada por meio da comutação do interruptor  $S_b$ . A fonte de corrente  $i_s$  representa o comportamento equivalente do estágio de saída.

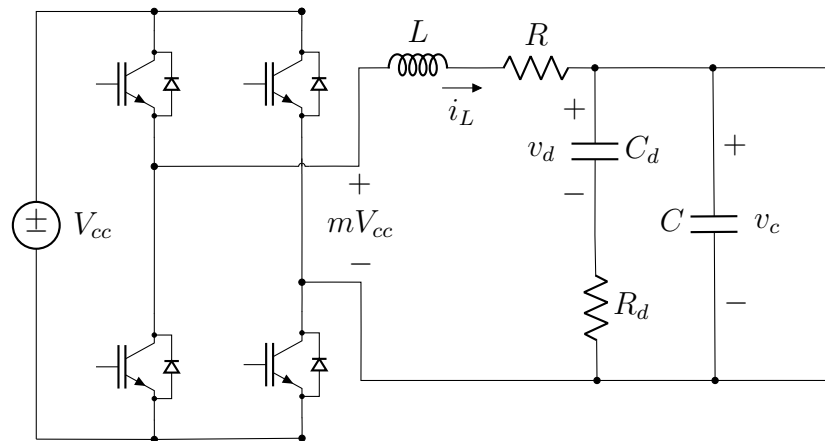
O estágio de saída é bidirecional em corrente, pois possibilita determinadas operações como, por exemplo, apagar a memória (remover o magnetismo residual) do acelerador. Neste caso, a corrente deve ser negativa, ou seja, fluir no sentido oposto. A topologia do conversor é em ponte completa como ilustrado na Figura 5. Um filtro de terceira ordem é adicionado ao circuito para atenuar as componentes de alta frequência provenientes da comutação. A tensão de saída do estágio de entrada ( $v_{cb}$ ) é considerada constante e igual a  $V_{cc}$  no modelo do estágio de saída.

Figura 4 – Estágio de entrada de um módulo.



Fonte: Adaptado de Lobato (2016)

Figura 5 – Topologia do estágio de saída.



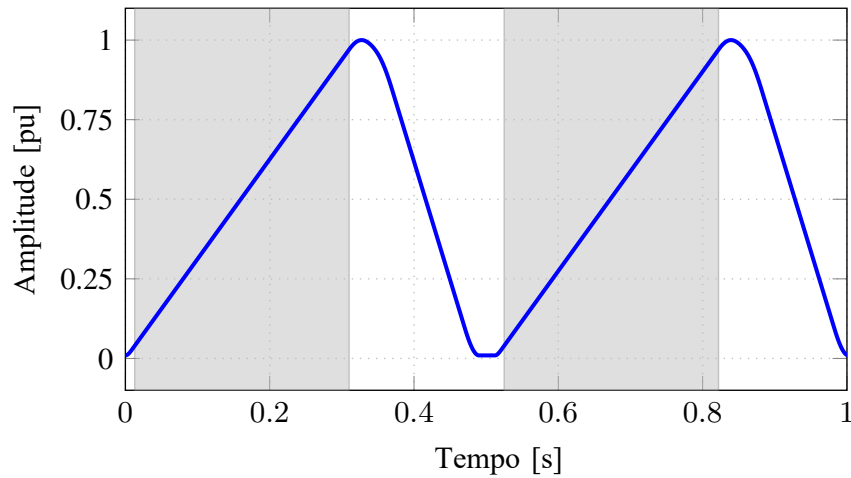
Fonte: Elaborado pelo autor.

O foco principal deste trabalho é o controle do estágio de saída da fonte de alimentação dos dipolos do *Booster*. O *Booster* é o síncrotron injetor responsável por elevar a energia dos elétrons de 120 MeV a 500 MeV, antes de sua injeção no anel de armazenamento principal (CRAIEVICH, 2020). Nesse contexto, o campo magnético dos dipolos deve ser regulado com alta precisão, o que é feito por meio do controle da corrente fornecida aos ímãs. Para a operação cíclica do *Booster*, essa corrente deve seguir uma forma de onda aproximadamente triangular, com frequência de 2 Hz (RODRIGUES & LIMEIRA, 2015), conforme ilustrado na Figura 6.

É essencial garantir um erro de rastreamento de corrente inferior a 100 ppm na região destacada da Figura 6, correspondente à fase de aceleração dos elétrons. Cumprir essas restrições garante um feixe de luz estável e minimiza as perdas de elétrons em cada ciclo.

A fonte de alimentação deve fornecer potência suficiente aos dipolos, exigindo níveis de tensão e corrente de até 900 V e 1 kA, respectivamente. Para atender a esses requisitos e melhorar a confiabilidade e a facilidade de manutenção, a fonte utiliza uma topologia

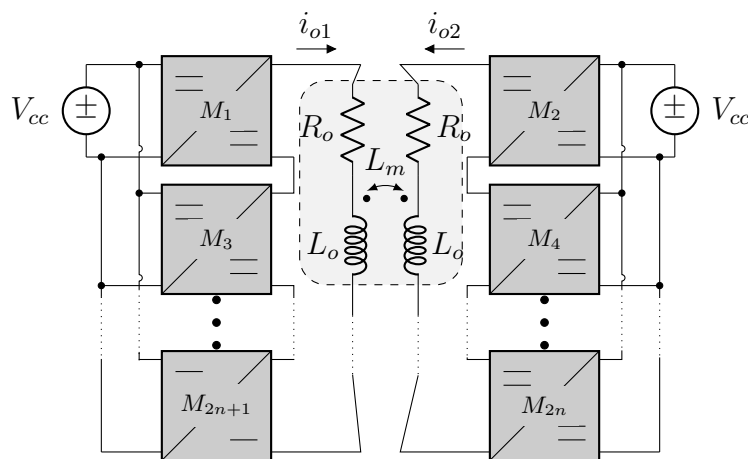
Figura 6 – Corrente de referência dos eletroímãs. A área destacada é a região onde a precisão de rastreamento é alta relevância.



Fonte: Elaborado pelo autor.

composta por conexões em série e paralelo de submódulos, conforme ilustrado na Figura 7. Atualmente, durante a operação, são utilizados oito submódulos, com quatro de cada lado (RODRIGUES & LIMEIRA, 2015). As cargas consistem em dipolos representados pelo circuito acoplado magneticamente mostrado na Figura 7, em que as correntes  $i_{o1}$  e  $i_{o2}$  devem rastrear com precisão a referência apresentada na Figura 6.

Figura 7 – Topologia modular da fonte de alimentação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dentre as exigências para o projeto e implementação do controle das fontes, tem-se que a potência fornecida em cada módulo deve ser equilibrada, para que não haja sobrecarga e sobreaquecimento dos componentes. Além disso, o sistema deve ter uma alta acurácia na corrente de saída da fonte.

Ressalta-se que o estudo e o projeto da topologia não fazem parte do escopo deste

trabalho. O objetivo principal é o desenvolvimento da lei de controle, visando atender aos requisitos de desempenho e aprimorar a performance do sistema de conversão já empregado no LNLS.

### 1.3 Revisão Bibliográfica

O Brasil possui uma fonte de luz síncrotron operando no LNLS desde 1997. Em 2009, iniciou-se a construção de uma fonte de luz síncrotron de quarta geração chamada Sirius (LIU et al., 2014). Esta fonte moderna tem energia 3 GeV e é mais brilhante que as gerações anteriores (LIU et al., 2011; LIU et al., 2013). O Sirius possui câmaras de vácuo menores que as do LNLS, o que reduz a região de órbita estável dos elétrons e exige uma injeção mais precisa no anel de armazenamento (BRUNHEIRA et al., 2013). Projetar um controlador que atenda a especificações mais rígidas do que as anteriormente utilizadas no LNLS torna-se essencial para uma injeção eficaz e estável, especialmente porque as fontes de alimentação do Sirius exigem regulação precisa da corrente de carga (LIRA et al., 2001).

Para atingir essas características, são utilizadas fontes chaveadas operando em altas frequências de comutação (LIRA et al., 2001). Devido à alta potência exigida pelos dipolos magnéticos do *Booster* do Sirius, sua fonte de alimentação é composta por módulos conectados em série e paralelo. Esta abordagem reduz a tensão e a corrente em cada módulo e permite comutação em frequências mais elevadas (RODRIGUES et al., 2018).

Para atender às exigências de corrente das cargas magnéticas, diversas técnicas de controle têm sido propostas e testadas. Em Fukuda e Nakaoka (1993), o sistema é representado em espaço de estados, e o controle é obtido por meio de um integrador combinado com realimentação de estados. Os ganhos são calculados por alocação de polos, visando uma resposta rápida com amortecimento razoável. No estudo de Wassinger et al. (2010), uma malha interna de controle com realimentação de estados é introduzida para posicionar os polos do sistema em malha fechada, proporcionando uma resposta criticamente amortecida. No entanto, o sistema resultante é do tipo 0, o que leva a erro em regime permanente. Para mitigar esse problema, uma malha externa com integrador é incorporada.

A estratégia de controle apresentada em Ke, Jenni e Künzi (2010) envolve uma malha interna de tensão e uma malha externa de corrente. A malha interna apresenta uma resposta dinâmica mais rápida e utiliza um controlador baseado em observador. A malha externa é fundamentalmente um controlador Proporcional-Integral (PI) projetado para eliminar o erro em regime permanente. Os ganhos de realimentação são determinados por otimização usando regulador quadrático linear, com os termos integral e proporcional ajustados com base na carga e nos parâmetros do filtro de saída, respectivamente.

Uma abordagem alternativa utilizando funções de transferência com saturação dinâmica é proposta em Brunheira et al. (2013). Em Long (2014) e Wang et al. (2020),

emprega-se um controlador preditivo do tipo RST, onde as funções de transferência R e S são utilizadas para rejeição de perturbações, e a função T é ajustada para rastrear o sinal de referência (LANDAU, 1998). Adotando uma estratégia de controle por aprendizado, Kurimoto et al. (2014) obtém os valores da impedância da carga por meio de medições em todo o sistema. Conseqüentemente, a malha de controle de corrente incorpora um controlador PI combinado com a impedância da carga no domínio da frequência como *feedforward*.

Em Kondo et al. (2023), é apresentada uma fonte de alimentação digital de alta precisão para magnetos de fontes de luz de próxima geração. A corrente de saída é medida por meio de um transdutor de corrente de fluxo zero e digitalizada por um conversor A/D de 24 bits. O sinal medido é processado em um FPGA, no qual são implementados o controlador PI e a modulação por largura de pulso. Para fontes de maior potência, múltiplas unidades chaveadas são conectadas em paralelo, com defasamento entre os instantes de comutação, de modo a elevar a frequência efetiva de chaveamento e reduzir a ondulação de corrente. Para fontes de menor corrente, os autores propõem uma estratégia de chaveamento bipolar alternado, capaz de melhorar a estabilidade em regiões próximas de zero ampere.

Um esquema de controle híbrido, que combina um controlador PI com uma estratégia de histerese, é descrito em Tsolaridis e Biela (2018). Nesse arranjo, o sistema é dividido em módulos, cada qual operando em modo de corrente média (PI associado a um controlador de avanço de fase) ou em modo adaptativo de histerese, conforme definido por um supervisor responsável por selecionar o regime de controle mais adequado em cada módulo. Mais recentemente, em Cardoso et al. (2021), foi proposto um controle ótimo digital, baseado em observador de estados e projetado diretamente no espaço de estados. A elevada ordem da planta, em conjunto com a necessidade de estimar múltiplos estados, impõe um tempo de processamento significativo para o cálculo da lei de controle, tornando sua implementação no Sirius inviável.

Embora diversas estratégias de controle tenham sido propostas na literatura, muitas delas não atendem às rigorosas exigências de erro de rastreamento impostas pela fonte de corrente do Sirius. Nesse contexto, este trabalho propõe a aplicação de técnicas de controle robusto, baseadas na metodologia  $H_\infty$ , visando garantir um desempenho mais estável e eficiente. Tal abordagem permite o projeto de controladores capazes de manter o erro das correntes de carga em níveis reduzidos, ao mesmo tempo em que assegura tempos de processamento das leis de controle compatíveis com as exigências operacionais do Sirius.

#### 1.4 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma estratégia de controle capaz de reduzir o erro das correntes dos magnetos do Sirius para 100 ppm na região de interesse.

Para atingir essa meta, a estratégia proposta deve atender a requisitos essenciais, como evitar desbalanceamentos significativos entre as correntes de cada lado da conexão em paralelo e garantir um tempo de processamento compatível com as múltiplas rotinas externas executadas no microcontrolador do Sirius.

Além disso, relacionado ao objetivo principal do trabalho, pode-se citar os seguintes objetivos específicos:

1. Realizar a modelagem matemática do sistema para dois ramos paralelos, cada um com N módulos em série;
2. Reduzir a elevada ordem da planta por meio da aplicação de uma técnica apropriada;
3. Reintroduzir o erro de redução de ordem como incerteza no sistema de ordem reduzida para facilitar o projeto de um controlador robusto capaz de lidar com as dinâmicas negligenciadas;
4. Utilizar uma estratégia de controle multivariável de baixa ordem baseada em otimização  $\mathcal{H}_\infty$  (ZHOU & DOYLE, 1998).

## 1.5 Produção Bibliográfica

Como resultado das pesquisas realizadas durante o período de doutoramento, foram publicados em periódicos especializados e artigos em conferências. Dentre as publicações, no tema da tese, se destacam:

### Artigos em periódicos:

1. **Cardoso, T. T.** Cardoso, T. T., de Almeida, P. M., Ferreira, A. A., Brunheira, G. O., Limeira, B. E., Barbosa, P. G., & Montagner, V. F. (2025). Multivariable robust control of sirius modular current source prototype. *Control Engineering Practice*, 157, 106244.
2. **Cardoso, T. T.**, de Oliveira, F. H., Rodrigues, C., de Assis Ferreira, D., de Almeida, P. M., & Ferreira, A. A. (2021). Optimal Digital State-Space Control of a Sirius Modular Current Source Prototype. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 1-10.

### Artigos em conferências:

1. Benedicto, F. D. P. A., da Silva Lima, G., **Cardoso, T. T.**, Rodrigues, C., Brunheira, G. O., de Almeida, P. M., & Ferreira, A. A. (2020, December). Modelagem de fontes modulares de corrente do Sirius em Sistemas Descritores. In *Congresso Brasileiro de Automática-CBA* (Vol. 2, No. 1).

## 1.6 Estrutura da tese

Além deste Capítulo de Introdução, o Capítulo 2 apresenta a metodologia de modelagem do sistema, composto por  $N$  módulos em série conectados em paralelo a  $N$  módulos em série, alimentando uma carga acoplada magneticamente. Ademais, demonstra-se a aplicação da aproximação pela normal Hankel como estratégia para a redução da ordem do sistema, preservando suas características dinâmicas mais relevantes. No Apêndice A, é apresentada como é realizada esta construção ótima do modelo reduzido pela norma Hankel.

O Capítulo 3 aborda a metodologia empregada para o projeto do controlador dos conversores. A estratégia proposta baseia-se no controle robusto  $H_\infty$ , utilizando exclusivamente a medição das correntes da carga como realimentação. O processo de projeto do controlador é descrito por meio das funções de ponderação, bem como pela análise da função de sensibilidade do sistema. Também são discutidas as incertezas não estruturadas, e demonstra-se como o erro entre o modelo de ordem reduzida e o modelo de ordem completa pode ser incorporado ao projeto do controlador.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados experimentais, considerando o controle de quatro módulos de um protótipo de testes do Sirius, organizados em dois módulos em série acoplados magneticamente, por meio da carga, a outros dois módulos em série. Avaliam-se a precisão das correntes da carga, o esforço de controle, o equilíbrio entre as correntes de saída dos módulos, comparação com métodos de controle tradicionais e também foi avaliada a variação paramétrica da indutância da carga magnética.

Por fim, o Capítulo 5 reúne as considerações finais do trabalho, além das propostas para trabalhos futuros, indicando possíveis extensões e aprimoramentos da pesquisa desenvolvida.

## 2 Modelagem

Neste capítulo, é apresentada a modelagem matemática dos conversores utilizados na aceleração de elétrons no *Booster* do Sirius. O objetivo é estabelecer um modelo em espaço de estados para a associação de dois ramos em paralelo, cada um com  $N$  conversores em série, permitindo a representação adequada da dinâmica do sistema completo e adicionando esta nova contribuição em relação aos trabalhos de Oliveira (2018) e Cardoso (2019). A validação do modelo é realizada por meio da comparação com resultados de simulação em nível de circuito.

Além disso, em razão da elevada ordem da planta, propõe-se a obtenção de um modelo de ordem reduzida por meio de uma aproximação baseada na norma de Hankel. Realiza-se uma comparação entre o modelo de ordem completa e o modelo reduzido, avaliando-se a preservação das características dinâmicas relevantes. Para assegurar que o modelo reduzido mantenha o desempenho e a estabilidade desejados durante o projeto do controlador, o erro entre os modelos de ordem completa e ordem reduzida é reintroduzido no modelo reduzido sob a forma de uma incerteza, sendo considerado, no capítulo seguinte, no projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 2.1 Topologia do estágio de saída

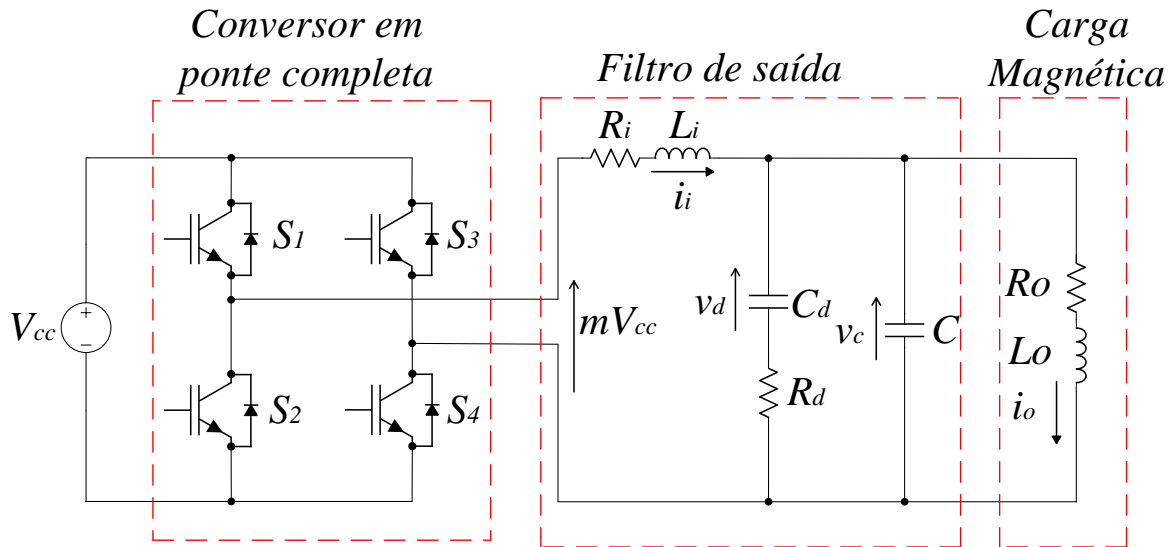
O sistema estudado é composto por um conversor ponte completa associado a um filtro de terceira ordem como mostra a Figura 8. O filtro é constituído por um indutor  $L_i$  e dois capacitores,  $C$  e  $C_d$ , cuja função é atenuar as componentes de alta frequência decorrentes da comutação (LOBATO, 2016; KUNZI, 2015). A carga magnética é representada por um indutor  $L_o$  em série com um resistor  $R_o$ , que modelam o comportamento dos eletroímãs, os quais apresentam elevada constante de tempo na aplicação ao *Booster*.

Para a comutação dos interruptores, adotou-se a modulação por largura de pulso unipolar. Em comparação com a modulação bipolar, a técnica unipolar desloca as principais componentes harmônicas da tensão de saída para frequências mais elevadas, resultando em uma frequência efetiva de ondulação aproximadamente igual ao dobro da frequência da portadora triangular. Dessa forma, para a mesma frequência de chaveamento, a modulação unipolar reduz a ondulação da corrente de saída.

### 2.2 Modelo matemático de um módulo

O modelo matemático para um módulo é demonstrado em (OLIVEIRA, 2018). Por meio de equações diferenciais de primeira ordem, o circuito ilustrado na Figura 8 pode ser representado no espaço de estados da seguinte forma:

Figura 8 – Topologia do estágio de saída da fonte de corrente dos dipolos do Booster.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}\tag{2.1}$$

em que:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T &= [i_i \quad v_d \quad v_C \quad i_o], \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_i}{L_i} & 0 & -\frac{1}{L_i} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_d C_d} & \frac{1}{R_d C_d} & 0 \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{R_d C} & -\frac{1}{R_d C} & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_o} & -\frac{R_o}{L_o} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{V_{CC}}{L_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1], \quad \mathbf{D} = [0], \\ u &= m.\end{aligned}\tag{2.2}$$

No modelo, o vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  representa os estados do sistema, enquanto  $u \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  correspondem, respectivamente, à entrada de controle e à saída do sistema. As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  definem a dinâmica do sistema, sendo denominadas matrizes de estados, de entrada, de saída e de transmissão direta. O parâmetro  $m$  corresponde ao índice de modulação do conversor em ponte completa e pode ser expresso em função do ciclo de trabalho  $d$  como  $m = 1 - 2d$  (OLIVEIRA et al., 2017; MOHAN; UNDELAND & ROBBINS, 2003).

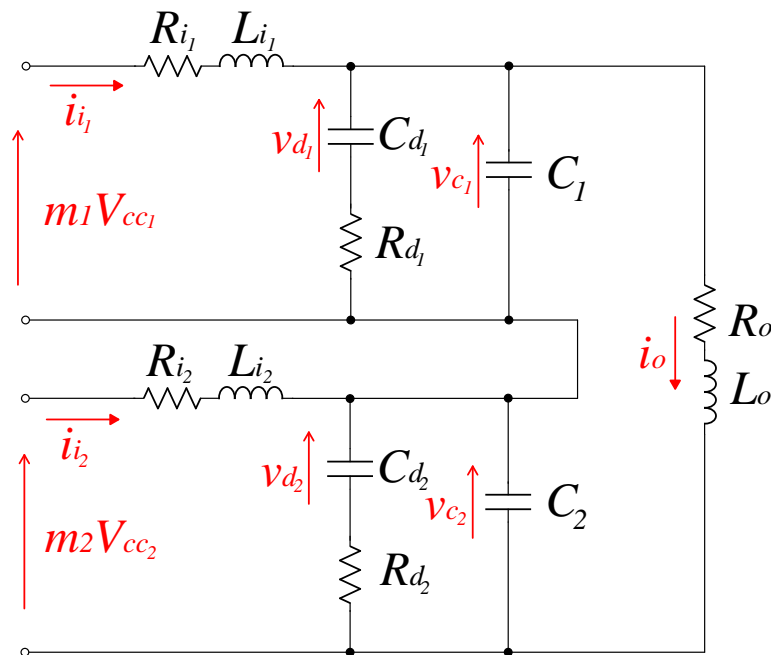
### 2.3 Modelo matemático para módulos associados em série

A associação de módulos apresenta como principal vantagem a divisão potência demandada pela carga entre os diferentes módulos. A conexão em série, por sua vez, permite a divisão da tensão de saída entre os módulos. A modelagem matemática para a associação de  $N$  módulos em série é apresentada em (OLIVEIRA, 2018). Visando uma abordagem mais didática, será inicialmente desenvolvido o modelo para dois módulos conectados em série e, posteriormente, será apresentada a formulação generalizada.

#### 2.3.1 Modelo matemático para dois módulos associados em série

A topologia correspondente à conexão entre dois módulos em série é ilustrada na Figura 9.

Figura 9 – Topologia da associação de dois módulos em série.



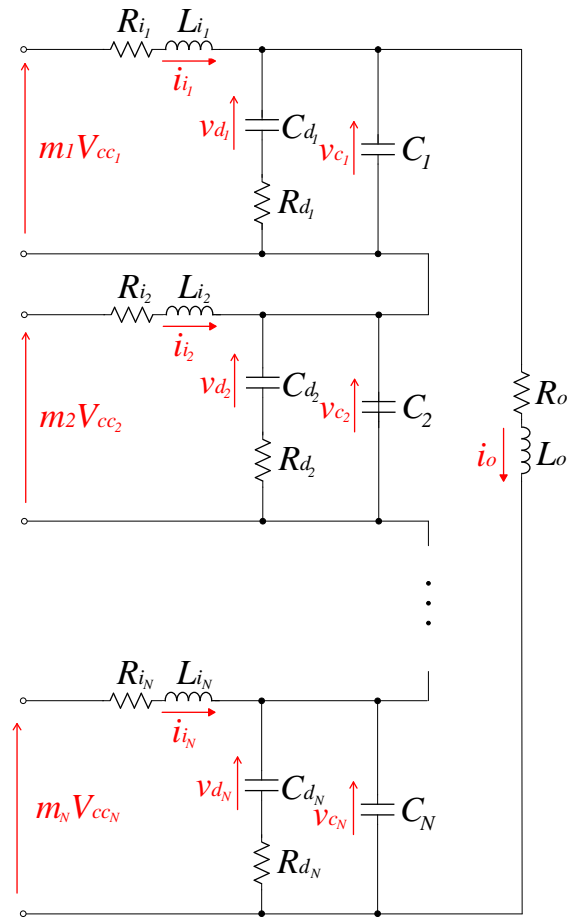
Fonte: Elaborado pelo autor.

O vetor de variáveis de estado  $\mathbf{x}$ , correspondente à associação de dois módulos em série, é definido por:

$$\mathbf{x} = \left[ i_{i1} \quad v_{d1} \quad v_{c1} \quad ; \quad i_{i2} \quad v_{d2} \quad v_{c2} \quad ; \quad i_o \right]^T. \quad (2.3)$$

Observa-se que o vetor de estados pode ser particionado em três subconjuntos: (i) as variáveis internas do Módulo 1; (ii) as variáveis internas do Módulo 2; e (iii) a corrente de saída  $i_o$ , comum a ambos os módulos. O sistema apresenta duas entradas de controle,



Figura 10 – Associação de  $N$  módulos em série.

Fonte: Elaborado pelo autor.

As submatrizes que compõem a matriz de estados  $\mathbf{A}$  são descritas em (2.7). A matriz  $\mathbf{A}_{I_j}$  representa a dinâmica interna de cada módulo, relacionando o vetor de estados  $\mathbf{x}_j$  às suas derivadas. A matriz  $\mathbf{A}_{II_j}$  modela o acoplamento entre  $\dot{\mathbf{x}}_j$  e  $x_o$ . A dinâmica do estado  $x_o$  é, por sua vez, estabelecida pela matriz  $\mathbf{A}_{III_j}$  em relação a  $\mathbf{x}_j$  e pela matriz  $\mathbf{A}_o$  em relação ao próprio estado  $x_o$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{I_j} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_{i_j}}{L_{i_j}} & 0 & -\frac{1}{L_{i_j}} \\ 0 & -\frac{1}{R_{d_j}C_{d_j}} & \frac{1}{R_{d_j}C_{d_j}} \\ \frac{1}{C_j} & \frac{1}{R_{d_j}C_j} & -\frac{1}{R_{d_j}C_j} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_{II_j} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_j} \end{bmatrix}^T \\
 \mathbf{A}_{III_j} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_o} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_o &= \begin{bmatrix} -\frac{R_o}{L_o} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

A matriz de entradas,  $\mathbf{B}$ , é dividida entre as matrizes  $\mathbf{B}I_j$  e  $\mathbf{B}\emptyset_j$ , conforme

apresentado em (2.8), que relacionam as entradas às variáveis  $\mathbf{x}_j$  e  $x_o$ , respectivamente.

$$\mathbf{B}_{I_j} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{V_{CC_j}}{L_{i_j}} & 0 & 0 \end{array} \right]^T; \quad \mathbf{B}_{\emptyset_j} = 0 \quad (2.8)$$

A matriz de saída é dividida como mostrado em (2.9), onde  $\mathbf{C}_{\emptyset_j}$  representa a ligação da saída à  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{C}_o$  à  $x_o$ . A matriz de transmissão direta,  $\mathbf{D}$ , apresenta como submatriz  $\mathbf{D}_{\emptyset_j}$ , conforme descrito em (2.10).

$$\mathbf{C}_{\emptyset_j} = \mathbf{0}_{1 \times 3}; \quad \mathbf{C}_o = 1 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{D}_{\emptyset_j} = 0 \quad (2.10)$$

De acordo com (2.2) e (2.4), define-se a submatriz de entrada vinculada a cada módulo,  $u_j$ , dada em (2.11).

$$u_j = m_j \quad (2.11)$$

A partir das equações apresentadas anteriormente, a modelagem dinâmica da topologia mostrada na Figura 10, para  $N$  conversores conectados em série, é descrita em (2.12).

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[ \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_N \mid x_o \right]^T \\ \mathbf{A} &= \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{A}_{I_1} & & & & \mathbf{A}_{II_1} \\ \hline & \mathbf{A}_{I_2} & & & \mathbf{A}_{II_2} \\ \hline & & \ddots & & \vdots \\ \hline & & & \mathbf{A}_{I_N} & \mathbf{A}_{II_N} \\ \hline \mathbf{A}_{III_1} & \mathbf{A}_{III_2} & \cdots & \mathbf{A}_{III_N} & \mathbf{A}_o \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{B}_{I_1} & & & & \\ \hline & \mathbf{B}_{I_2} & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & \mathbf{B}_{I_N} & \\ \hline \mathbf{B}_{\emptyset_1} & \mathbf{B}_{\emptyset_2} & \cdots & \mathbf{B}_{\emptyset_N} & \end{array} \right] \\ \mathbf{C} &= \left[ \mathbf{C}_{\emptyset_1} \mid \mathbf{C}_{\emptyset_2} \mid \cdots \mid \mathbf{C}_{\emptyset_N} \mid 1 \right] \quad \mathbf{D} = \left[ \mathbf{D}_{\emptyset_1} \mid \mathbf{D}_{\emptyset_2} \mid \cdots \mid \mathbf{D}_{\emptyset_N} \right] \\ \mathbf{u} &= \left[ \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

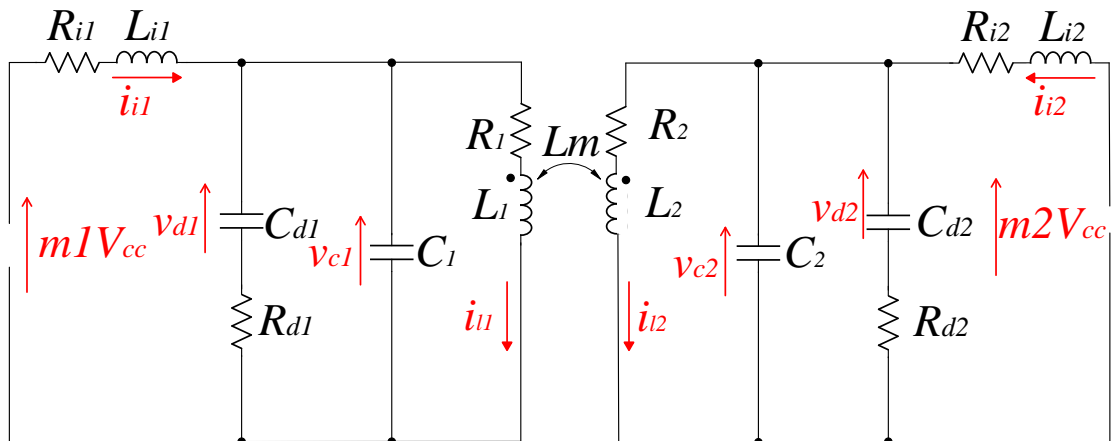
Desta forma, de acordo com o número de módulos  $N$  conectados em série têm-se:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N+1}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(3N+1) \times (3N+1)}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(3N+1) \times N}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times (3N+1)}$  e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ .

#### 2.4 Topologia para módulos conectados em paralelo

A associação em paralelo dos módulos de saída para a alimentação da carga magnética do *Booster* permite a divisão da corrente fornecida à carga entre os módulos. Essa estratégia visa reduzir os valores nominais de operação dos componentes, principalmente em relação à potência nominal, o que resulta em menores custos de fabricação da planta e na redução de seu volume.

O sistema utilizado nos dipolos do *Booster* do Sirius é composto por módulos de corrente conectados em série e associados em paralelo por meio do acoplamento magnético da carga indutiva. Na Figura 11 é representado o circuito da associação em paralelo considerando o acoplamento magnético das cargas.

Figura 11 – Associação em paralelo de 2 módulos de saída.



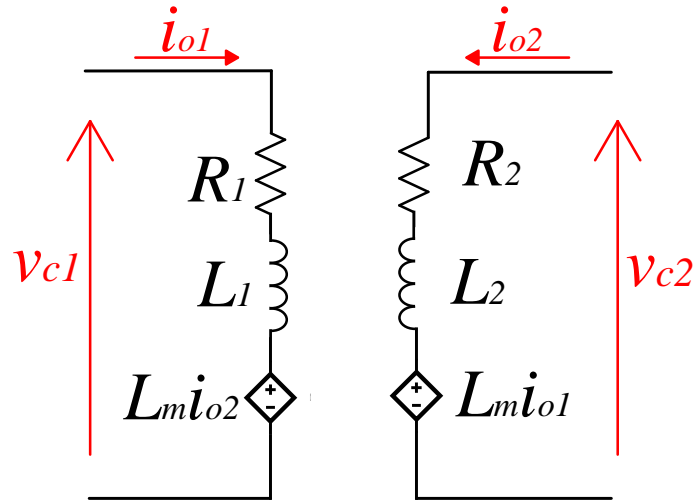
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 12 tem o objetivo de demonstrar esse efeito para cargas acopladas magneticamente. O acoplamento magnético é representado por fontes de tensão controladas e observa-se que uma corrente no módulo à esquerda gera uma tensão em sentido oposto no módulo à direita, e vice-versa.

##### 2.4.1 Modelo matemático de 2 módulos em paralelo

O modelo em espaço de estados referente à topologia mostrada na Figura 11 é descrito a seguir. O vetor de variáveis de estado  $\mathbf{x}$ , para a associação de dois módulos em paralelo, é dado por:

Figura 12 – Representação do acoplamento magnético como fontes de tensão controladas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\mathbf{x} = \left[ i_{i1} \quad v_{d1} \quad v_{C1} \quad \vdots \quad i_{i2} \quad v_{d2} \quad v_{C2} \quad \vdots \quad i_{o1} \quad i_{o2} \right]^T. \quad (2.13)$$

Observa-se a divisão do vetor (2.13) em três partes. Nas duas primeiras, têm-se as variáveis internas dos módulos e, por último, as correntes de saída,  $i_{o1}$  e  $i_{o2}$ , que, neste caso, podem assumir valores distintos. Com a associação, tem-se a presença de duas entradas de controle,  $m_1$  e  $m_2$ . A estrutura do vetor de entradas é descrita em (2.14).

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Com base na forma geral da modelagem em espaço de estados apresentada em (2.1), o modelo do sistema com dois módulos de saída conectados em paralelo é expresso em (2.15)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{i1}}{L_{i1}} & 0 & -\frac{1}{L_{i1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{d1}C_{d1}} & \frac{1}{R_{d1}C_{d1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & \frac{1}{R_{d1}C_1} & -\frac{1}{R_{d1}C_1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{i2}}{L_{i2}} & 0 & -\frac{1}{L_{i2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{d2}C_{d2}} & \frac{1}{R_{d2}C_{d2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{R_{d2}C_{d2}} & -\frac{1}{R_{d2}C_{d2}} & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{L_2}{L_m L_{eq}} & 0 & 0 & \frac{1}{L_{eq}} & \frac{R_1 L_2}{L_m L_{eq}} & -\frac{R_2}{L_{eq}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{eq}} & 0 & 0 & -\frac{L_2}{L_m L_{eq}} & -\frac{R_1 L_2}{L_{eq}} & \frac{R_2 L_1}{L_m L_{eq}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{V_{CC1}}{L_{i1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{V_{CC2}}{L_{i2}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad \mathbf{D} = [0]. \quad (2.16)$$

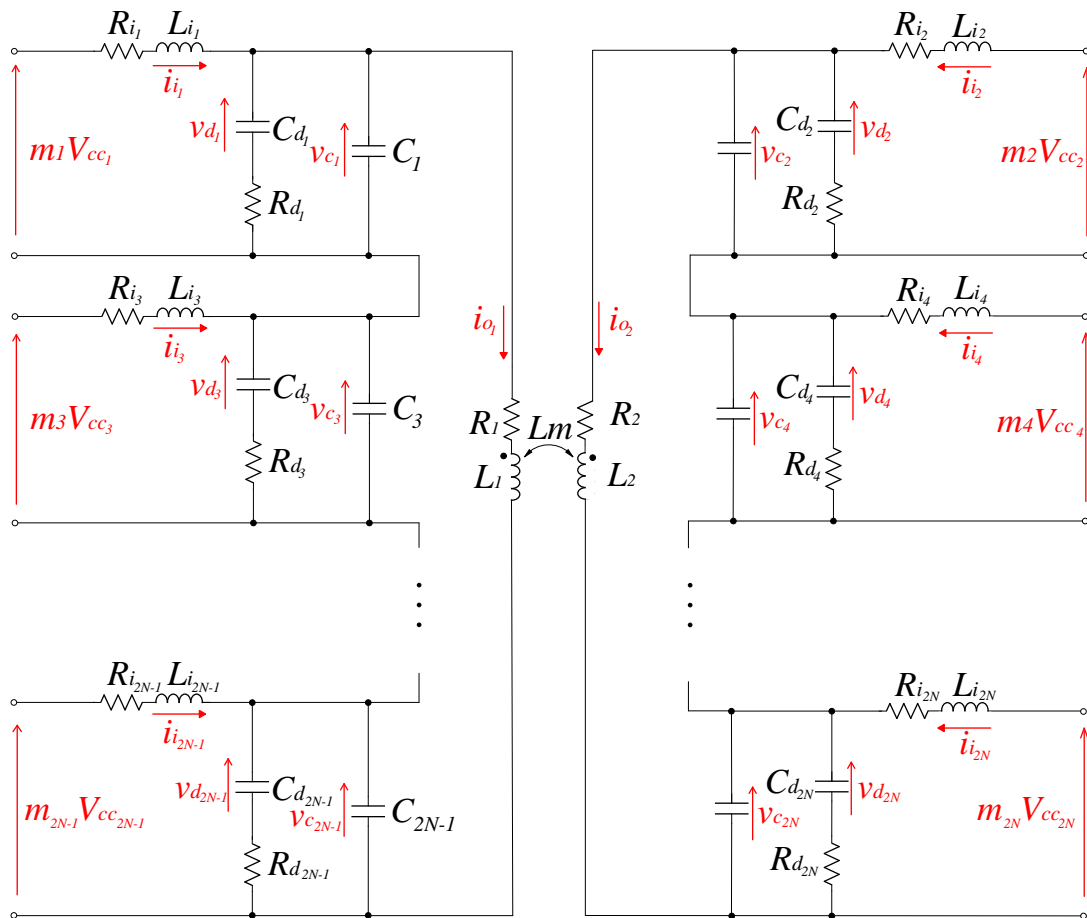
em que

$$L_{eq} = L_m - \frac{L_1 L_2}{L_m} \quad (2.17)$$

#### 2.4.2 Modelo matemático para dois ramos paralelos, cada um com N módulos em série

A associação de módulos apresenta como vantagem a divisão da potência requerida pela carga entre os módulos. Uma das contribuições deste trabalho é a modelagem matemática da associação de dois ramos paralelos, cada um com  $N$  módulos em série, a qual permite tanto a divisão da tensão de saída entre os módulos quanto da corrente entre os braços em paralelo, conforme ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Associação de dois ramos paralelos, cada um com  $N$  módulos em série.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicialmente, com base em (2.13), são definidas as variáveis de estado auxiliares,  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{x}_o$ , divididas entre as internas, provenientes de cada módulo, e a externa, comum a todos os módulos, respectivamente, conforme ilustrado em (2.18). Onde  $j$  é um índice auxiliar, referente a cada par de módulos devido ao paralelismo, cujo domínio é definido no intervalo  $1 \leq j \leq N$ .

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} i_{i_{2j-1}} & v_{d_{2j-1}} & v_{C_{2j-1}} & i_{i_{2j}} & v_{d_{2j}} & v_{C_{2j}} \end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{x}_o = [i_{o1} \ i_{o2}]^T \quad (2.18)$$

De acordo com (2.15), observa-se que, mesmo nas matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$ , tem-se um padrão que permite descrevê-las em um modelo genérico organizado em submatrizes.

A matriz de estados,  $\mathbf{A}$ , caracteriza-se pelo vínculo entre  $\dot{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{x}$ , como estabelecido em (2.1). As submatrizes estão descritas em (2.19). A matriz  $\mathbf{A}_{I_j}$  relaciona as variáveis internas de cada módulo,  $\mathbf{x}_j$ , com suas derivadas. Já  $\mathbf{A}_{II_j}$  estabelece uma ligação entre  $\dot{\mathbf{x}}_j$  e  $\mathbf{x}_o$ . A derivada de  $\mathbf{x}_o$  é vinculada à  $\mathbf{x}_j$  por  $\mathbf{A}_{III_j}$  e à  $\mathbf{x}_o$  por  $\mathbf{A}_o$ .

$$\mathbf{A}_{I_j} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{i_{2j-1}}}{L_{i_{2j-1}}} & 0 & -\frac{1}{L_{i_{2j-1}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{d_{2j-1}}C_{d_{2j-1}}} & \frac{1}{R_{d_{2j-1}}C_{d_{2j-1}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{2j-1}} & \frac{1}{R_{d_{2j-1}}C_{2j-1}} & -\frac{1}{R_{d_{2j-1}}C_{2j-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_{i_{2j}}}{L_{i_{2j}}} & 0 & -\frac{1}{L_{i_{2j}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R_{d_{2j}}C_{d_{2j}}} & \frac{1}{R_{d_{2j}}C_{d_{2j}}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{2j}} & \frac{1}{R_{d_{2j}}C_{2j}} & -\frac{1}{R_{d_{2j}}C_{2j}} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}_{II_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_{2j-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{2j}} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_{III_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-L_{o2}}{L_{eq}L_m} & 0 & 0 & \frac{1}{L_{eq}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{eq}} & 0 & 0 & \frac{-L_{o1}}{L_{eq}L_m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} \frac{R_{o1}L_2}{L_mL_{eq}} & -\frac{R_{o2}}{L_{eq}} \\ -\frac{R_{o1}}{L_{eq}} & \frac{R_{o2}L_1}{L_mL_{eq}} \end{bmatrix}$$

A matriz de entradas,  $\mathbf{B}$ , é dividida entre as matrizes  $\mathbf{B}_{I_j}$  e  $\mathbf{B}_{\emptyset_j}$ , conforme descrito em (2.20), que relacionam as entradas às variáveis  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{x}_o$ , respectivamente.

$$\mathbf{B}_{I_j} = \begin{bmatrix} \frac{V_{CC_{2j-1}}}{L_{i_{2j-1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{V_{CC_{2j}}}{L_{i_{2j}}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{B}_{\emptyset_j} = [0 \ 0] \quad (2.20)$$

A matriz de saída é dividida como apresentado em (2.21), onde  $\mathbf{C}_{\emptyset_j}$  representa o vínculo da saída à  $\mathbf{x}_j$  e  $\mathbf{C}_o$  à  $\mathbf{x}_o$ . A matriz de transmissão direta,  $\mathbf{D}$ , apresenta como submatriz  $\mathbf{D}_{\emptyset_j}$ , conforme descrito em (2.22).

$$\mathbf{C}_{\emptyset_j} = \mathbf{0}_{2 \times 6}; \quad \mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{D}_{\emptyset_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

De acordo com (2.14) e (2.15), define-se a submatriz de entrada vinculada a cada módulo,  $\mathbf{u}_j$ , dada em (2.23).

$$\mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} m_{2j-1} \\ m_{2j} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A partir das equações obtidas anteriormente, a modelagem dinâmica da topologia mostrada na Figura 13, para  $N$  conversores conectados em série, é descrita em (2.24).

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left[ \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{x}_N \mid \mathbf{x}_o \right]^T \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{I_1} & & & & \mathbf{A}_{II_1} \\ & \mathbf{A}_{I_2} & & & \mathbf{A}_{II_2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \mathbf{A}_{I_N} & \mathbf{A}_{II_N} \\ \mathbf{A}_{III_1} & \mathbf{A}_{III_2} & \cdots & \mathbf{A}_{III_N} & \mathbf{A}_o \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I_1} & & & & \\ & \mathbf{B}_{I_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{B}_{I_N} & \\ \mathbf{B}_{\emptyset_1} & \mathbf{B}_{\emptyset_2} & \cdots & \mathbf{B}_{\emptyset_N} & \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \left[ \mathbf{C}_{\emptyset_1} \mid \mathbf{C}_{\emptyset_2} \mid \cdots \mid \mathbf{C}_{\emptyset_N} \mid 1 \right] & \mathbf{D} &= \left[ \mathbf{D}_{\emptyset_1} \mid \mathbf{D}_{\emptyset_2} \mid \cdots \mid \mathbf{D}_{\emptyset_N} \right] \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Desta forma, de acordo com o número de módulos dos dois ramos paralelo, cada um com  $N$  módulos conectados série, tem-se:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6N+2}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2N}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(6N+2) \times (6N+2)}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(6N+2) \times 2N}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times (6N+1)}$  e  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2 \times 2N}$ .

Atualmente, a fonte de alimentação em operação no Sirius consiste em quatro pares, isto é,  $N = 4$ . Conseqüentemente, o sistema envolve 26 variáveis de estado, 2 saídas medidas ( $i_{o1}$  e  $i_{o2}$ ) e 8 entradas de controle, caracterizando um sistema Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas, (do inglês, *Multiple-Input and Multiple-Output*) (MIMO). Para reduzir a complexidade do modelo e facilitar o projeto de um controlador de baixa ordem, emprega-se uma abordagem de redução da planta, conforme detalhado na seção seguinte.

## 2.5 Hipóteses e Limitações do Modelo

O modelo matemático desenvolvido neste trabalho tem como objetivo capturar as dinâmicas dominantes relevantes para o projeto do controlador de corrente da fonte modular do *Booster* do Sirius. Para viabilizar a análise e o projeto de controle, algumas hipóteses e simplificações foram adotadas, as quais são explicitadas nesta seção.

Inicialmente, considera-se que os conversores operam em regime linear médio, obtido por meio da modelagem média no período de comutação. Essa abordagem é amplamente empregada em aplicações de eletrônica de potência quando o foco está no comportamento dinâmico em baixas frequências, especialmente em sistemas cujo controle atua muito abaixo da frequência de comutação. Os efeitos associados à comutação discreta, como ondulações de alta frequência e harmônicos de comutação, são mitigados fisicamente pelos filtros de saída e, portanto, não são explicitamente considerados no modelo linearizado.

Além disso, assume-se que os dispositivos semicondutores operam de forma ideal, desprezando-se perdas de condução, tempos de recuperação reversa, capacitâncias parasitas e variações térmicas. Embora esses efeitos estejam presentes no sistema real, sua influência é predominantemente localizada em frequências elevadas e pode ser tratada de forma indireta por meio da modelagem de incertezas no projeto do controlador robusto.

No que diz respeito à carga magnética, o modelo considera indutâncias lineares e resistências constantes. Efeitos de saturação magnética, histerese e dependência não linear do fluxo magnético não são explicitamente incluídos. Essa simplificação é justificada pelo fato de o sistema operar predominantemente dentro da região linear dos materiais magnéticos durante o regime normal de aceleração.

Por fim, assume-se disponibilidade perfeita das medições das correntes de saída, desconsiderando atrasos de amostragem, quantização e ruído de sensores. Tais efeitos, inevitáveis na implementação prática, são tratados implicitamente como perturbações e incertezas, sendo absorvidos pelo caráter robusto da estratégia de controle  $\mathcal{H}_\infty$  adotada.

Essas hipóteses definem claramente o escopo de validade do modelo proposto e reforçam a necessidade da abordagem robusta empregada, uma vez que o controlador é projetado para garantir estabilidade e desempenho mesmo na presença das dinâmicas e

não idealidades não explicitamente modeladas.

## 2.6 Modelos de ordem reduzida

A redução de ordem de sistemas dinâmicos visa obter modelos de menor complexidade que preservem, com boa fidelidade, a dinâmica essencial do sistema original. Em aplicações práticas, como no controle de múltiplos conversores de potência ligados em série e/ou paralelo, modelos completos geralmente apresentam alta ordem, tornando a análise de estabilidade, o projeto de controladores e a implementação computacional tarefas complexas. Nesse contexto, é fundamental dispor de técnicas sistemáticas que permitam identificar e eliminar estados que exercem pouca influência sobre o comportamento entrada-saída do sistema.

A fundamentação teórica da técnica de redução adotada neste trabalho baseia-se em quatro conceitos interligados: a decomposição em valores singulares, a teoria de estabilidade de Lyapunov, os Gramianos de controlabilidade e observabilidade e os valores singulares de Hankel. A decomposição em valores singulares fornece uma interpretação geométrica e energética da transferência de ganho em sistemas lineares, possibilitando a identificação das direções dominantes de excitação e resposta. A teoria de Lyapunov, por sua vez, oferece a base analítica para a caracterização da estabilidade e da energia dos sistemas dinâmicos, sendo essencial para a obtenção dos Gramianos. Esses Gramianos quantificam, respectivamente, o grau de influência das entradas sobre cada estado e o impacto de cada estado nas saídas do sistema. A combinação dessas propriedades é sintetizada pelos valores singulares de Hankel, que expressam, de forma objetiva, a importância dinâmica individual de cada estado.

O objetivo da redução do modelo é diminuir a ordem do controlador projetado, ao mesmo tempo em que se mantém uma boa precisão no rastreamento da corrente de referência. Idealmente, deseja-se que

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{s}) - \mathbf{G}_{\text{red}}(\mathbf{s})\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad (2.25)$$

em que  $\mathbf{G}(\mathbf{s})$  representa o modelo de ordem completa e  $\mathbf{G}_{\text{red}}(\mathbf{s})$  o modelo reduzido.

Os métodos mais difundidos na literatura baseiam-se em princípios de balanceamento energético, como o Truncamento Balanceado e a Aproximação pela Norma Hankel, (do inglês, *Hankel-Norm Approximation*) (HNA) (BAUR; BENNER & FENG, 2014). Neste trabalho, será empregada a HNA, por apresentar propriedades de aproximação ótimas em termos da energia transmitida entre entradas e saídas. A formulação da técnica será apresentada na seção seguinte.



em que  $\lambda_i(\cdot)$  denota os autovalores. Estados associados a HSV elevados são altamente relevantes para a dinâmica entrada-saída; estados com HSV pequenos têm pouca influência e podem ser descartados em uma redução de ordem.

Com os conceitos teóricos definidos, a construção matemática para redução da ordem de sistemas pela Norma de Hankel através do método de Glover é demonstrada no Apêndice A .

#### 2.6.4 Modelo reduzido para associação de módulos em paralelo

Embora o objetivo principal deste trabalho seja implementar a lei de controle proposta na fonte de alimentação atualmente em operação no Sirius, restrições de cronograma e de disponibilidade da infraestrutura experimental impossibilitaram sua aplicação imediata no sistema real. Como etapa preliminar do processo de introdução das novas estratégias de controle na fonte do Sirius, testes experimentais foram conduzidos em um protótipo em escala reduzida, desenvolvido especificamente para reproduzir a dinâmica dominante da planta original.

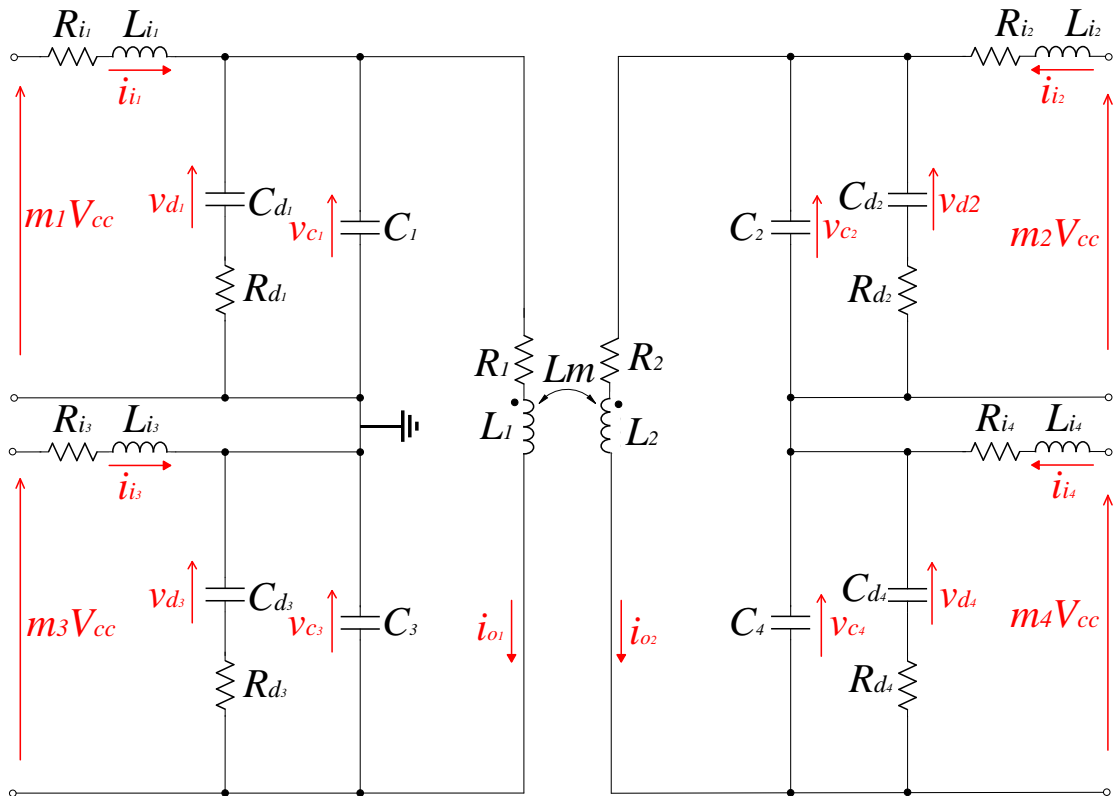
Os resultados apresentados a seguir foram obtidos a partir desse protótipo, o qual é composto por dois pares de submódulos esquerdo e direito, resultando em  $N = 2$ , e em um sistema dinâmico de 14 variáveis de estado, duas saídas e quatro variáveis de controle, conforme ilustrado na Figura 14. Os parâmetros da planta e da carga magnética são descritos na Tabela 1. Esses valores podem ser diretamente substituídos nas Equações (2.18) a (2.24), com  $N = 2$ , para obtenção do modelo completo em espaço de estados do sistema.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema

Parâmetro	Valor
$V_{dc}$	6,6 V
$R_i$	26 m $\Omega$
$L_i$	94 $\mu$ H
$C_d$	23,5 $\mu$ F
$R_d$	3,6 $\Omega$
$C$	2,8 $\mu$ F
$R_o$	0,5490 $\Omega$
$L_1, L_2$	1 mH
$L_m$	256 $\mu$ H
Frequência de comutação	48 kHz

Na Figura 15 são ilustrados os valores singulares de Hankel e o erro de redução em função da ordem do sistema reduzido. A maior parte das dinâmicas está concentrada em dois estados, considerando os valores singulares de Hankel como uma medida da energia dos estados (SANCHEZ-PENA & SZNAIER, 1998). Além disso, pela análise do comportamento do erro, é evidente que a ordem mais adequada para a planta reduzida é dois, pois não

Figura 14 – Topologia do protótipo de menor potência.



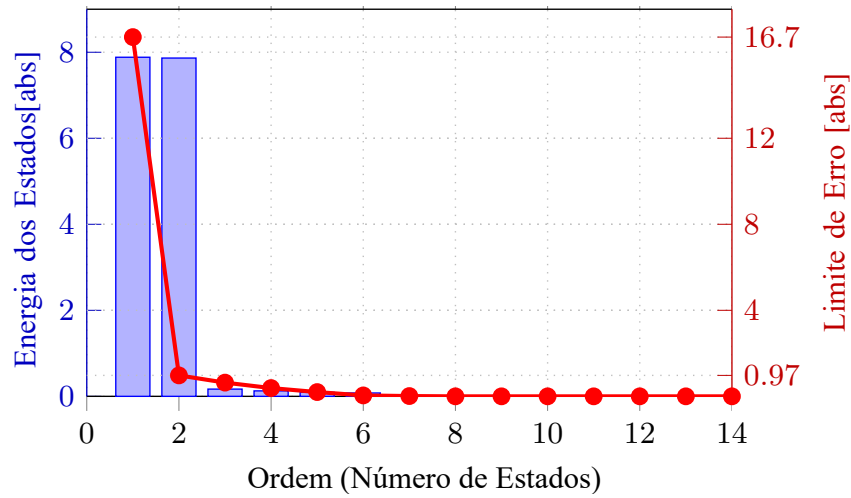
Fonte: Elaborado pelo autor.

há redução significativa no erro com aproximações de ordem superior. Por outro lado, usar apenas um estado resultaria em um erro aproximadamente 17,2 vezes maior que a aproximação de segunda ordem, cujo erro é cerca de 0,97.

Uma explicação mais prática para a escolha dos estados no modelo reduzido pode ser fornecida examinando-se os gramianos de controlabilidade e observabilidade. A Gramiana de controlabilidade é dada pela Equação 2.31. A partir dessa matriz, observa-se que os estados mais controláveis são as tensões nos capacitores de saída ( $v_c$ ) de cada submódulo. Esses estados apresentam forte acoplamento com os sinais de modulação de seus respectivos submódulos, o que é consistente com a operação do conversor como uma fonte de tensão.

Por outro lado, a Gramiana de observabilidade é dada pela Equação 2.32. Sob a perspectiva da observabilidade, os valores destacados na Gramiana de observabilidade indicam que as correntes de saída  $i_{o1}$  e  $i_{o2}$  são os estados mais observáveis. Isso é consistente com o fato de que essas variáveis são medidas diretamente. Além disso, devido ao acoplamento existente na carga magnética, a corrente de um lado pode ser estimada a partir da corrente do outro, como evidenciado pelo termo de acoplamento de 0,2096 presente na Gramiana de observabilidade.

Figura 15 – Valores singulares de Hankel e erro de redução.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base nessa análise, é evidente que os estados  $i_{o1}$  e  $i_{o2}$  não podem ser desprezados, pois são os mais críticos do ponto de vista da observabilidade. Estimá-los a partir de outras variáveis seria desafiador, conforme indicado pela análise da Gramiana de observabilidade. Embora o modelo pudesse, em princípio, ser reduzido a apenas um estado (isto é,  $i_{o1}$  ou  $i_{o2}$ ), ainda seria necessário estimar o outro estado. Entretanto, conforme indicado pelos valores singulares de Hankel, o erro associado ao modelo reduzido seria significativo.

No que diz respeito à controlabilidade, o controle de  $i_{o1}$  e  $i_{o2}$  está diretamente relacionado à tensão aplicada à carga. Essa tensão é a soma das tensões dos submódulos ( $v_c$ ), que estão fortemente acopladas aos sinais de modulação. Portanto, não é necessário incluir as tensões  $v_c$  no modelo reduzido. Em outras palavras, as correntes de saída são controladas indiretamente pelos sinais de modulação, como esperado.

Essa análise preliminar fornece subsídios para a escolha da técnica de redução de modelo. Entretanto, o método efetivamente empregado utiliza ferramentas matemáticas adicionais, como a matriz de Hankel e a decomposição em valores singulares (SVD), de modo a obter um modelo reduzido preciso que incorpora as conclusões dessa análise

$$\mathbf{X}_b = 1 \times 10^5 \times$$

1,4960	0,0889	2,2781	-0,1051	-0,0684	0,0027	0,4518	0,3617	-0,0117	-0,1051	-0,0684	0,0027	0,5886	-0,1318
0,0889	2,4302	2,4302	-0,0684	0,0809	0,0809	0,3617	-0,4243	-0,4243	-0,0684	0,0809	0,0809	0,3390	-0,0635
2,2781	2,4302	<b>9,9885</b>	0,0027	0,0809	0,2310	-0,0117	-0,4243	-1,1096	0,0027	0,0809	0,2310	0,1786	-0,0390
-0,1051	-0,0684	0,0027	1,4960	0,0889	2,2781	-0,1051	-0,0684	0,0027	0,4518	0,3617	-0,0117	-0,1318	0,5886
-0,0684	0,0809	0,0809	0,0889	2,4302	2,4302	-0,0684	0,0809	0,0809	0,3617	-0,4243	-0,4243	-0,0635	0,3390
0,0027	0,0809	0,2310	2,2781	2,4302	<b>9,9885</b>	0,0027	0,0809	0,2310	-0,0117	-0,4243	-1,1096	-0,0390	0,1786
0,4518	0,3617	-0,0117	-0,1051	-0,0684	0,0027	1,4960	0,0889	2,2781	-0,1051	-0,0684	0,0027	0,5886	-0,1318
0,3617	-0,4243	-0,4243	-0,0684	0,0809	0,0809	0,0889	2,4302	2,4302	-0,0684	0,0809	0,0809	0,3390	-0,0635
-0,0117	-0,4243	-1,1096	0,0027	0,0809	0,2310	2,2781	2,4302	<b>9,9885</b>	0,0027	0,0809	0,2310	0,1786	-0,0390
-0,1051	-0,0684	0,0027	0,4518	0,3617	-0,0117	-0,1051	-0,0684	0,0027	1,4960	0,0889	2,2781	-0,1318	0,5886
-0,0684	0,0809	0,0809	0,3617	-0,4243	-0,4243	-0,0684	0,0809	0,0809	0,0889	2,4302	2,4302	-0,0635	0,3390
0,0027	0,0809	0,2310	-0,0117	-0,4243	-1,1096	0,0027	0,0809	0,2310	2,2781	2,4302	<b>9,9885</b>	-0,0390	0,1786
0,5886	0,3390	0,1786	-0,1318	-0,0635	-0,0390	0,5886	0,3390	0,1786	-0,1318	-0,0635	-0,0390	0,6591	-0,1439
-0,1318	-0,0635	-0,0390	0,5886	0,3390	0,1786	-0,1318	-0,0635	-0,0390	0,5886	0,3390	0,1786	-0,1439	0,6591

(2.31)



A matriz de função de transferência da planta reduzida é dada por

$$\mathbf{G}_r(s) = \begin{bmatrix} G_{r11}(s) & G_{r12}(s) & G_{r13}(s) & G_{r14}(s) \\ G_{r21}(s) & G_{r22}(s) & G_{r23}(s) & G_{r24}(s) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

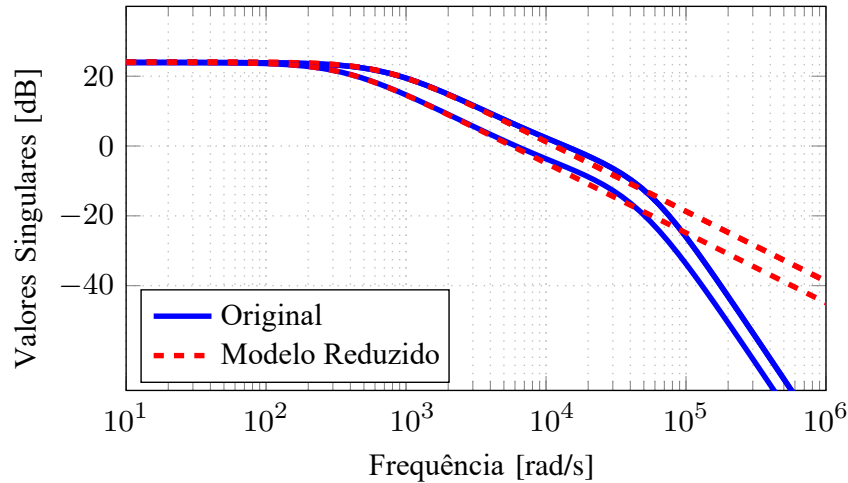
em que  $G_{r11} = G_{r13} = G_{r22} = G_{r24}$ ,  $G_{r12} = G_{r14} = G_{r21} = G_{r23}$ , e

$$G_{r11}(s) = \frac{6114s + 2.949 \times 10^6}{s^2 + 1089s + 2.632 \times 10^5}, \quad (2.34)$$

$$G_{r12}(s) = \frac{-2082s - 2.198 \times 10^4}{s^2 + 1089s + 2.632 \times 10^5}. \quad (2.35)$$

A resposta em frequência dos valores singulares máximo e mínimo do sistema de ordem completa e do sistema reduzido de segunda ordem está representada na Figura 16.

Figura 16 – Resposta em frequência dos modelos de ordem completa e reduzida.



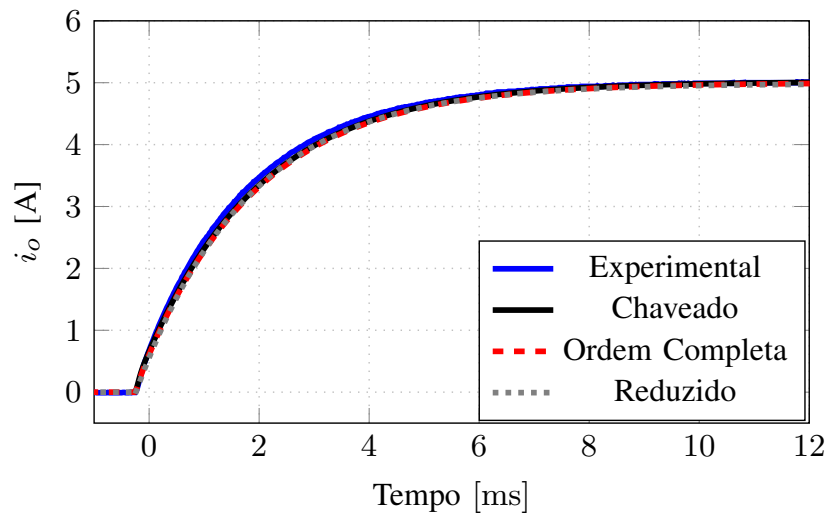
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se na Figura 16 que os modelos apresentam comportamento semelhante em baixas frequências, até cerca de 3000 rad/s. No entanto, verifica-se uma divergência notável em frequências mais elevadas.

Para validar os modelos, foi aplicada uma variação de 0,25 no ciclo de trabalho, com a resposta no tempo ilustrada nas Figuras 17 e 18. As formas de onda experimentais são comparadas com aquelas obtidas do modelo chaveado, do modelo linear médio de ordem completa e do modelo linear de ordem reduzida. O modelo chaveado utiliza interruptores ideais, permitindo uma representação mais precisa do comportamento em altas frequências.

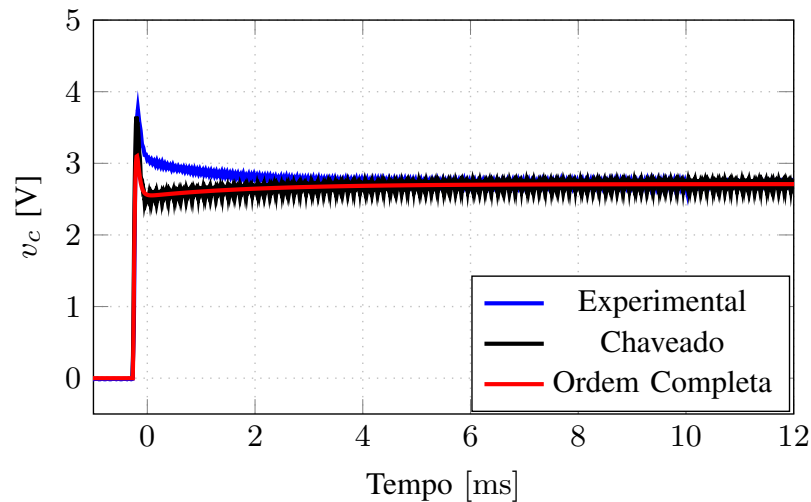
Como mostrado na Figura 17, as diferenças na corrente de saída entre todos os modelos são mínimas e podem ser consideradas desprezíveis para os propósitos de projeto de controle com base no modelo reduzido. Nota-se que não há diferença significativa nas respostas temporais entre os modelos chaveado, de ordem completa e reduzida. Por outro lado, observa-se uma discrepância mais acentuada na tensão de saída entre a forma

Figura 17 – Resposta da corrente de saída para uma variação de 0,25 nos sinais de modulação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 – Resposta da tensão de saída para uma variação de 0,25 nos sinais de modulação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

de onda experimental e os modelos, conforme ilustrado na Figura 18. Essa diferença é esperada, pois os interruptores experimentais não são ideais e apresentam transientes durante a comutação, resultado da superposição de efeitos como resistência de condução, capacitâncias parasitas, circuito snubber e outros comportamentos não ideais. Além disso, o fato do nível de tensão no barramento ser baixo, faz com que a queda de tensão nos dispositivos seja ainda mais relevante.

Vale destacar que o modelo reduzido não inclui a variável de estado associada à tensão de saída, motivo pelo qual ela não é apresentada na Figura 18. Ademais, a resposta do modelo de ordem completa corresponde precisamente ao valor médio do modelo

chaveado.

### 2.6.5 Modelo com incertezas

A redução de modelo oferece a dupla vantagem de simplificar a análise e reduzir a ordem do controlador projetado. Isso ocorre porque o método empregado nesta tese, baseado na otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , frequentemente resulta em um controlador com ordem superior ou, no mínimo, igual à da planta (KHALIL; DOYLE & GLOVER, 1996). Contudo, confiar exclusivamente no modelo reduzido para o projeto do controlador pode não garantir o desempenho e a estabilidade desejados quando este é implementado na planta de ordem completa. Para contornar essa limitação, as dinâmicas negligenciadas durante o processo de redução podem ser reintroduzidas no modelo da planta sob a forma de uma incerteza (SANCHEZ-PENA & SZNAIER, 1998). Dessa forma, o modelo incerto é definido como

$$\hat{G}(s) = G_r(s) + \Delta(s), \quad (2.36)$$

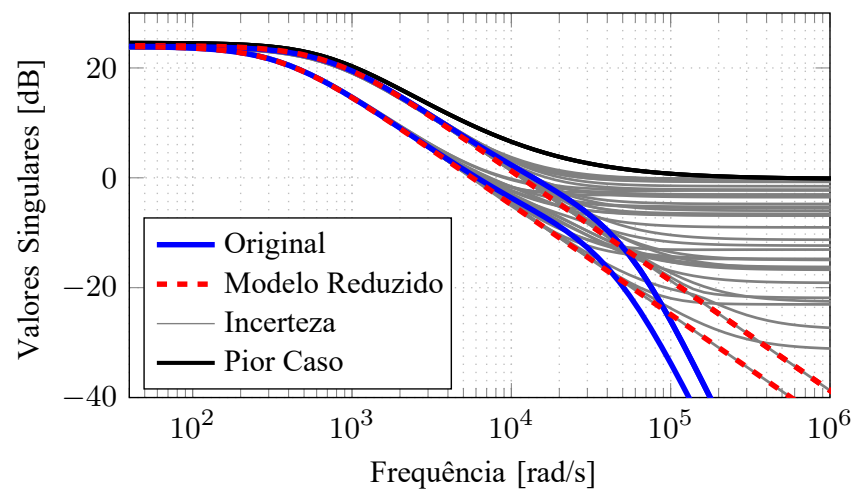
em que  $\Delta(s)$  representa uma incerteza aditiva não estruturada. Neste trabalho, impõe-se o limite

$$\|\Delta(s)\|_\infty = E_\infty = 0,97, \quad (2.37)$$

este valor corresponde à norma  $\mathcal{H}_\infty$  da diferença entre o modelo completo e o modelo reduzido de segunda ordem. Portanto, o valor 0,97 representa uma estimativa do maior erro de aproximação entre os dois modelos, no domínio da frequência, e não deve ser interpretado como erro de rastreamento da corrente.

A introdução dessa incerteza gera uma família de plantas, cujas respostas em frequência são ilustradas na Figura 19. Essa abordagem adota uma postura conservadora no tratamento das incertezas, porém apresenta a vantagem de incorporar, de maneira indireta, pequenas variações paramétricas existentes entre os submódulos. Como consequência, o sistema em malha fechada torna-se mais robusto, visto que o controlador é projetado para garantir estabilidade e desempenho robustos frente a todas as combinações admissíveis de incertezas, incluindo o pior caso ilustrado na Figura 19.

Figura 19 – Resposta em frequência da família de modelos incertos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3 Fundamentação Teórica e Estratégia de Controle

#### 3.1 Introdução ao problema de controle

Conforme apresentado anteriormente, a topologia do estágio de saída utilizado no Sirius é composta por oito módulos. Entretanto, os testes experimentais serão realizados em um protótipo de menor potência, constituído por quatro módulos de saída conectados a uma carga magnética, conforme ilustrado na Figura 14.

O sistema apresenta quatro entradas, correspondentes aos índices de modulação de cada módulo, e duas saídas, referentes às correntes nos magnetos em cada ramo do paralelo. Dessa forma, trata-se de um sistema MIMO de ordem 14.

A teoria de controle clássico apresenta limitações para essa aplicação, uma vez que é tradicionalmente voltada a sistemas Unica Entrada e Única Saída, (do inglês, *Single-Input and Single-Output*) (SISO). Assim, o acoplamento entre as correntes da carga precisaria ser desprezado ou compensado por estratégias adicionais de desacoplamento. Em contrapartida, a teoria de controle multivariável é capaz de tratar sistemas MIMO de forma sistemática, considerando explicitamente as interações entre as malhas de controle (SKOGESTAD SIGURD & POSTLETHWAITE, 2005).

O controle de módulos conectados em série por meio de realimentação de estados foi abordado em (CARDOSO, 2019), considerando exclusivamente as variáveis de saída da planta (tensões  $v_{c_n}$  e correntes  $i_{o_1}$  e  $i_{o_2}$ ). Nesse caso, os estados não medidos foram estimados e realimentados na malha de controle. Embora os resultados de simulação sejam promissores, a estratégia adotada apresenta elevado custo computacional, o que inviabiliza sua implementação no Sirius, uma vez que o microcontrolador já executa diversas rotinas simultâneas. Ademais, a topologia do protótipo em paralelo exigiria um esforço computacional ainda maior, tornando essa abordagem impraticável.

Dessa forma, com o objetivo de tratar a planta como um sistema MIMO e, simultaneamente, assegurar elevada precisão na regulação de corrente, propõe-se o estudo de um controlador robusto baseado na teoria  $\mathcal{H}_\infty$ . Por meio dessa abordagem, o modelo de ordem reduzida da planta, bem como o erro em relação ao modelo de ordem completa, podem ser representados como incertezas e incorporados diretamente no projeto do controlador. Além disso, controladores  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser projetados com ordem reduzida, resultando em menor custo computacional e tornando sua implementação viável em sistemas embarcados, como no Sirius.

#### 3.2 Controle Robusto

No contexto da planta em estudo, as incertezas de modelagem tornam-se particularmente relevantes devido à elevada ordem do modelo completo, às simplificações

necessárias durante a modelagem e às variações paramétricas inerentes à operação do sistema. A topologia modular do estágio de potência, associada à dinâmica da carga magnética e aos acoplamentos entre os ramos, introduz comportamentos dinâmicos complexos e dificilmente mensuráveis com exatidão por um modelo de ordem elevada. Além disso, a disponibilidade restrita de medições na implementação prática no Sirius impõe limitações adicionais à identificação precisa dos estados internos da planta.

Com o objetivo de viabilizar a implementação do controlador em tempo real, uma etapa de redução de ordem da planta é adotada, resultando em um modelo de menor complexidade e custo computacional. No entanto, a redução de ordem implica na negligência de dinâmicas de alta frequência e modos pouco dominantes, o que introduz discrepâncias inevitáveis entre o modelo reduzido e a planta real. Essas discrepâncias podem ser interpretadas como incertezas de modelagem e, se não forem adequadamente tratadas, podem comprometer a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada.

Nesse cenário, a abordagem de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  se mostra particularmente adequada, pois permite incorporar explicitamente os erros decorrentes da redução de ordem e as incertezas paramétricas no modelo da planta por meio de representações de incerteza, como incertezas aditivas ou multiplicativas. Dessa forma, o controlador é projetado não apenas para o modelo nominal reduzido, mas para toda uma família de plantas compatíveis com as incertezas especificadas.

Além disso, o emprego da síntese  $\mathcal{H}_\infty$  possibilita impor requisitos de desempenho, como rejeição a perturbações e limitação do erro de rastreamento, ao mesmo tempo em que se assegura robustez contra variações não modeladas. Assim, a estratégia adotada neste trabalho consiste em utilizar o modelo de ordem reduzida como base para o projeto do controlador, tratando as dinâmicas negligenciadas como incertezas, garantindo que o desempenho desejado seja mantido mesmo quando o controlador é aplicado à planta de ordem completa.

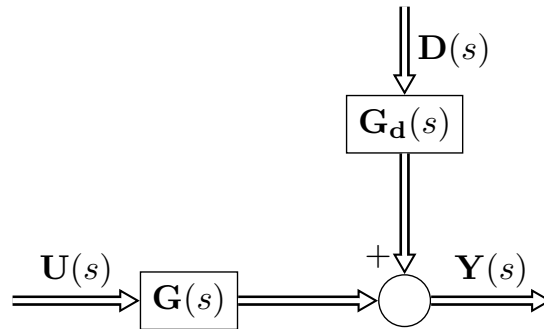
A teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  possui ampla aplicabilidade prática e tem sido empregada em diversas áreas da engenharia. Os trabalhos seminais de Doyle (1978) e Zames George & Francis (1983) foram fundamentais para o desenvolvimento dessa abordagem e estabeleceram as bases teóricas que orientaram a evolução da teoria de controle robusto nas décadas subsequentes.

### 3.2.1 Introdução teórica ao Controle Robusto

Um sistema a ser controlado é composto por sinais de entrada e de saída. As saídas são medidas por sensores, enquanto as entradas podem ser classificadas em duas categorias: (i) entradas de controle, as quais podem ser manipuladas livremente pelo controlador, e (ii) distúrbios, que representam perturbações externas ou variações internas não controláveis que afetam o comportamento da planta.

Um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) pode ser representada pelo diagrama de blocos apresentado na Figura 20, em que se destacam os sinais de entrada, distúrbio e saída.

Figura 20 – Diagrama de blocos de uma planta com distúrbio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

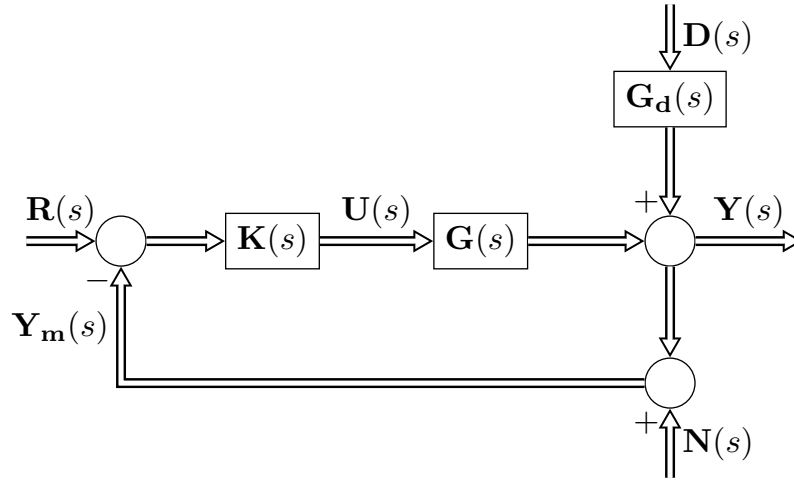
em que:

- $\mathbf{y}(t)$  é o vetor de saídas (variáveis controladas);
- $\mathbf{u}(t)$  é o vetor de entradas de controle;
- $\mathbf{d}(t)$  representa os distúrbios.

As respectivas transformadas de Laplace são denotadas por  $\mathbf{Y}(s)$ ,  $\mathbf{U}(s)$  e  $\mathbf{D}(s)$ . A matriz de funções de transferência  $\mathbf{G}(s)$  relaciona as entradas de controle às saídas do sistema, enquanto  $\mathbf{G}_d(s)$  representa o modelo que relaciona os distúrbios às saídas.

Um sistema em malha fechada com um grau de liberdade pode ser representado pelo diagrama da Figura 21, em que  $\mathbf{R}(s)$  é o vetor de referência,  $\mathbf{N}(s)$  representa ruídos e erros de medição, e  $\mathbf{K}(s)$  denota o controlador.

Figura 21 – Diagrama de blocos de um sistema de controle com um grau de liberdade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Algumas técnicas de projeto em controle robusto generalizam o projeto clássico por resposta em frequência, estendendo conceitos como diagramas de Bode e Nyquist para sistemas multivariáveis por meio de ferramentas como valores singulares e normas matriciais. Nesse contexto, além dos métodos baseados na função de transferência de malha aberta

$$\mathbf{L}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{K}(j\omega),$$

conhecidos como métodos de *loop-shaping*, outras funções de interesse em malha fechada desempenham papel central na análise e no projeto, em especial as funções sensibilidade  $\mathbf{S}$  e sensibilidade complementar  $\mathbf{T}$ . A dependência da variável de Laplace nas equações a seguir será suprimida para facilitar a visualização.

A relação entre as variáveis no domínio da frequência pode ser escrita como:

$$\mathbf{Y} = \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{GK}]}_{\mathbf{T}} \mathbf{R} + \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}]}_{\mathbf{S}} \mathbf{G}_d \mathbf{D} - \underbrace{[(\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{GK}]}_{\mathbf{T}} \mathbf{N}, \quad (3.1)$$

que pode ser simplificada reescrita como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{TR} + \mathbf{SG}_d \mathbf{D} - \mathbf{TN}. \quad (3.2)$$

As matrizes

$$\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}, \quad \mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{GK})^{-1}\mathbf{GK}, \quad (3.3)$$

são denominadas, respectivamente, função sensibilidade e função sensibilidade complementar, e satisfazem a relação fundamental:

$$\mathbf{S} + \mathbf{T} = \mathbf{I}. \quad (3.4)$$

A relação entre o erro de rastreamento  $\mathbf{E} = \mathbf{R} - \mathbf{Y}$  e as entradas do sistema é dada por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{G}_d\mathbf{D} + \mathbf{T}\mathbf{N}. \quad (3.5)$$

Deseja-se, em geral, minimizar esse erro em toda a faixa de frequências relevantes. Como os sinais de referência  $\mathbf{R}$  e os distúrbios  $\mathbf{D}$  normalmente possuem maior conteúdo espectral em baixas frequências, é desejável que a função  $\mathbf{S}$  apresente pequeno ganho nessa região, garantindo bom rastreamento e rejeição de perturbações. Por outro lado, o ruído de medição  $\mathbf{N}$  apresenta predominantemente componentes de alta frequência, o que exige que a função  $\mathbf{T}$  atue como um filtro passa-baixas, atenuando essas componentes indesejadas.

Outra relação fundamental consiste na expressão do sinal de controle  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{S}(\mathbf{R} - \mathbf{G}_d\mathbf{D} - \mathbf{N}), \quad (3.6)$$

evidenciando o papel da função  $\mathbf{K}\mathbf{S}$  na determinação do esforço de controle. Assim, as três funções de transferência em malha fechada  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{K}\mathbf{S}$  são fundamentais para a análise de desempenho, robustez e esforço de controle do sistema.

O comportamento em frequência dessas funções, seja no caso SISO por meio do diagrama de Bode, seja no caso MIMO por meio de valores singulares, é usado para estabelecer especificações de desempenho e robustez. Em particular, uma métrica amplamente utilizada para quantificar esses requisitos é a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , denotada por  $\|\cdot\|_\infty$ , cujo significado e uso serão apresentados na próxima seção.

### 3.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$

A teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  fundamenta-se em conceitos de álgebra linear, análise funcional e teoria de sistemas, permitindo o tratamento sistemático de incertezas e requisitos de desempenho por meio de ferramentas matemáticas bem estabelecidas. Como uma descrição formal completa desses conceitos exigiria uma abordagem matemática extensa, esta seção apresenta apenas as principais definições relacionadas às normas utilizadas e suas interpretações físicas no contexto de sistemas de controle. Informações adicionais podem ser encontradas em Zhou e Doyle (1998); Khalil, Doyle e Glover (1996) e Skogestad Sigurd & Postlethwaite (2005).

#### 3.3.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas

Para um sistema SISO representado pela função de transferência  $G(s)$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida no domínio da frequência como:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|. \quad (3.7)$$

Essa definição corresponde ao maior valor absoluto da resposta em frequência do sistema, sendo equivalente ao pico do diagrama de Bode de magnitude.

No caso de sistemas MIMO, representados por uma matriz de funções de transferência  $\mathbf{G}(s)$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega)), \quad (3.8)$$

em que  $\sigma_{\max}(\cdot)$  representa o maior valor singular da matriz e o operador sup denota o valor supremo. Conforme apresentado em (SKOGESTAD SIGURD & POSTLETHWAITE, 2005), o maior valor singular pode ser calculado por:

$$\sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega)) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{G}^*(j\omega))}, \quad (3.9)$$

onde  $(\cdot)^*$  denota a transposta conjugada e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  representa o maior autovalor.

Assim, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema multivariável é dada pelo maior valor singular ao longo de todas as frequências, sendo uma extensão natural da definição para o caso SISO.

Para um sistema MIMO com entrada  $\mathbf{u}(t)$  e saída  $\mathbf{y}(t)$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  também admite uma interpretação no domínio do tempo como o ganho máximo entre a energia do sinal de entrada e a energia do sinal de saída:

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_{0 < \|\mathbf{u}\|_2 < \infty} \frac{\|\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{u}\|_2}, \quad (3.10)$$

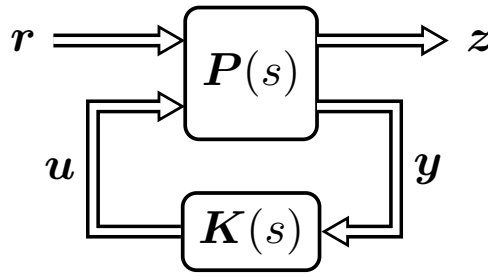
onde  $\|\cdot\|_2$  denota a norma  $\mathcal{L}_2$ . Assim, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  representa o maior ganho energético possível do sistema para qualquer direção do espaço de entrada, caracterizando um pior caso em termos de amplificação de sinais.

### 3.3.2 Problema de Controle $\mathcal{H}_\infty$

A formulação padrão do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  é apresentada por meio do diagrama de blocos da Figura 22. Neste arranjo,  $\mathbf{P}(s)$  representa a planta generalizada do sistema e  $\mathbf{K}(s)$  o controlador a ser projetado. Para sistemas MIMO,  $\mathbf{P}(s)$  é uma matriz de funções de transferência. Os sinais  $\mathbf{w}$  representam entradas exógenas, agrupando distúrbios e ruídos de medição, enquanto  $\mathbf{u}$  corresponde ao sinal de atuação. As saídas  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  representam, respectivamente, os sinais medidos e as saídas de desempenho utilizadas na formulação dos requisitos de projeto.

O sinal  $\mathbf{w}$  engloba entradas indesejadas no sistema, tais como perturbações e ruídos, sobre as quais o controlador não atua diretamente. Entretanto, por meio da realimentação, o controlador influencia a dinâmica da planta de modo a mitigar o impacto desses sinais

Figura 22 – Configuração padrão do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

sobre a saída do sistema. O vetor  $\mathbf{y}$  corresponde às grandezas medidas disponíveis para realimentação, enquanto  $\mathbf{z}$  consiste em um vetor de variáveis utilizadas para quantificar o desempenho do sistema, podendo ou não corresponder a grandezas físicas mensuráveis (BOYD & BARRATT, 1991).

Considere uma planta de ordem  $n$ , com  $n_w$  entradas exógenas,  $n_u$  entradas de controle,  $n_z$  saídas de desempenho e  $n_y$  saídas medidas, descrita no espaço de estados por:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_z\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{zw}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{zu}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{yw}\mathbf{w}(t), \end{cases} \quad (3.11)$$

em que  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  (CABELLO, 2014). A matriz de funções de transferência que relaciona  $\mathbf{w}$  a  $\mathbf{z}$  é dada por:

$$\mathbf{P}_{zw}(s) = \mathbf{C}_z(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_w + \mathbf{D}_{zw}. \quad (3.12)$$

Um controlador linear genérico de ordem  $n_c$  é descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{y}(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

cuja função de transferência é:

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c. \quad (3.14)$$

O sinal de controle no domínio da frequência é dado por:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s). \quad (3.15)$$

Acoplando-se o controlador à planta descrita em (3.11), obtém-se o sistema em malha fechada entre  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{z}$ , conforme ilustrado na Figura 22, representado por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{cl}(t) &= \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}_{cl}(t) + \mathbf{B}_{cl}\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl}(t) + \mathbf{D}_{cl}\mathbf{w}(t),\end{aligned}\tag{3.16}$$

em que o vetor de estados ampliado é definido como:

$$\mathbf{x}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{x}_c^T \end{bmatrix}^T,$$

e as matrizes do sistema em malha fechada são dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{cl} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_u\mathbf{D}_c\mathbf{C}_y & \mathbf{B}_u\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_y & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_{cl} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w + \mathbf{B}_u\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{yw} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{yw} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_{cl} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z + \mathbf{D}_{zu}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_y & \mathbf{D}_{zu}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_{cl} &= \mathbf{D}_{zw} + \mathbf{D}_{zu}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{yw}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

A matriz de transferência em malha fechada que relaciona as entradas exógenas às saídas de desempenho é dada por:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}.\tag{3.18}$$

O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  consiste em encontrar um controlador  $\mathbf{K}(s)$  que estabilize o sistema e minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência em malha fechada, isto é:

$$\min_{\mathbf{K}(s)} \|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty,\tag{3.19}$$

garantindo que o efeito das perturbações e dos ruídos de medição, representados por  $\mathbf{w}$ , seja minimizado nas saídas de desempenho  $\mathbf{z}$  (ZHOU & DOYLE, 1998).

### 3.4 Projeto de Controlador $H_\infty$

Para atingir os objetivos de desempenho, filtros de ponderação dependentes da frequência podem ser incorporados aos problemas de otimização. Esses filtros refletem os requisitos relacionados às características de funções de transferência específicas em malha fechada (KHALIL; DOYLE & GLOVER, 1996).

A planta aumentada, que inclui os filtros de ponderação, é representada na Figura 23. Nessa figura,  $\mathbf{K}(s)$  representa o controlador a ser projetado, enquanto  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$  denotam



Dado que o sinal de referência é uma rampa, é fundamental incluir um duplo integrador na função de transferência do controlador para garantir o rastreamento assintótico. No entanto, os algoritmos empregados para resolver o problema  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo enfrentam dificuldades ao lidar com funções de ponderação que possuem polos no eixo imaginário (ZHOU & DOYLE, 1998). Para contornar isso, os polos na origem podem ser levemente deslocados para a esquerda do eixo imaginário. A função de transferência genérica do filtro de ponderação utilizada para esse fim é:

$$W_1(s) = \left( \frac{s/\sqrt{M} + \omega_B^*}{s + \omega_B^*\sqrt{A}} \right)^2 \quad (3.23)$$

Aqui,  $\omega_B^*$  representa aproximadamente a largura de banda desejada, e  $M$  está relacionado ao valor máximo da função de sensibilidade. Os parâmetros para o filtro de ponderação  $W_1(s)$  estão resumidos na Tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros do filtro de ponderação

Parâmetro	Valor
$M$	5,3
$A$	$2 \times 10^{-12}$
$\omega_B$	$2\pi \cdot 430/\sqrt{2}$

Vale destacar que utilizar um valor extremamente pequeno de  $A$  resulta em erros de regime praticamente nulos, fazendo com que o controlador se comporte como um duplo integrador. A função de ponderação do controle é  $\mathbf{W}_2(s) = \mathbb{I}_4$ , que representa uma matriz identidade  $4 \times 4$ . Optar por uma  $\mathbf{W}_2$  independente da frequência não aumenta a ordem do controlador, simplificando assim sua implementação.

Resolvendo o problema de otimização, o controlador resultante é representado por:

$$\mathbf{K}^\top(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{21}(s) & K_{31}(s) & K_{41}(s) \\ K_{12}(s) & K_{22}(s) & K_{32}(s) & K_{42}(s) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde  $K_{11} = K_{22} = K_{31} = K_{42}$  e  $K_{12} = K_{21} = K_{32} = K_{41}$ , com:

$$K_{11}(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.25)$$

$$K_{12}(s) = \frac{c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3.26)$$

Os ganhos do controlador, definidos nas Equações (3.25) e (3.26), estão resumidos na Tabela 3.

Tabela 3 – Ganhos do controlador

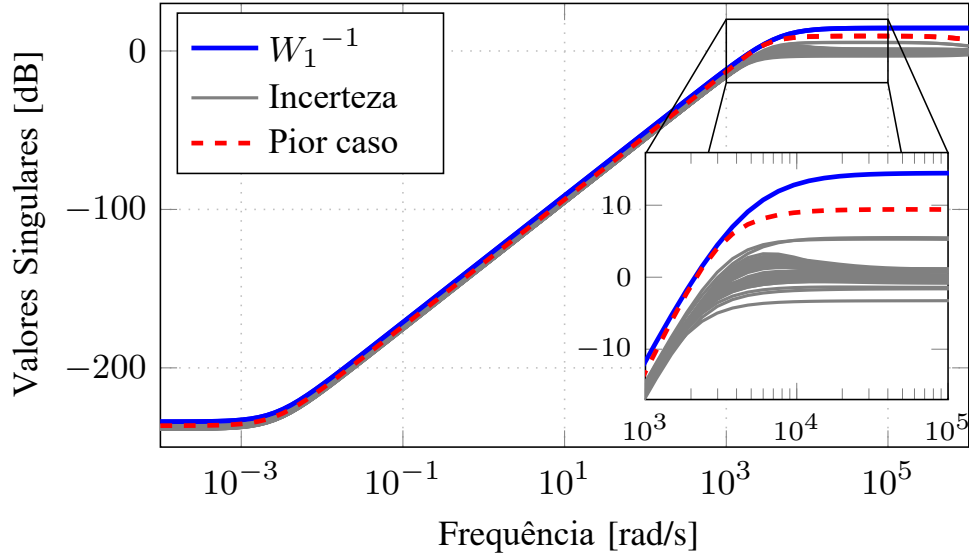
Ganho	Valor
$a_0$	$1,400 \times 10^5$
$a_1$	$1,037 \times 10^8$
$a_2$	$1,918 \times 10^{10}$
$a_3$	$1,513 \times 10^6$
$b_0$	$4,855 \times 10^{15}$
$b_1$	$1,337 \times 10^{13}$
$b_2$	$7,621 \times 10^9$
$b_3$	$3,612 \times 10^5$
$c_0$	$-3,762 \times 10^{14}$
$c_1$	$2,668 \times 10^{12}$
$c_2$	$2,802 \times 10^9$
$c_3$	$3,580 \times 10^5$

É importante observar que a ordem do controlador é 4, visto que o modelo reduzido tem ordem 2 e o filtro de ponderação também possui ordem 2. Em contraste, se a planta de ordem completa fosse utilizada no projeto do controlador, a ordem resultante deste seria 16.

Na Figura 24 é mostrada a resposta em frequência da função de sensibilidade em malha fechada para o sistema com incerteza, seu pior caso, e a função de ponderação inversa ( $\mathbf{W}_1^{-1}$ ). Mesmo no pior cenário, a magnitude dos valores singulares em todo o espectro de frequência permanece abaixo da função de ponderação inversa, assegurando estabilidade robusta.

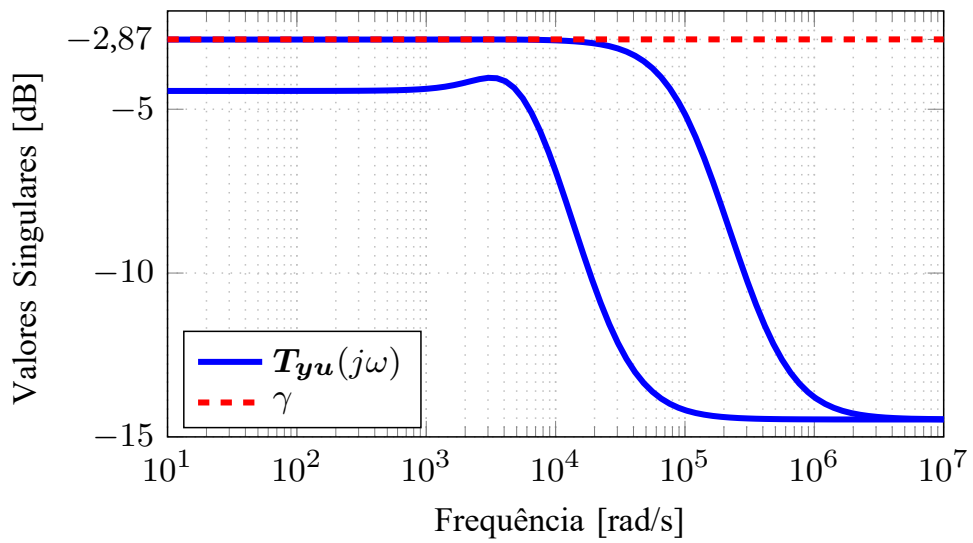
Ademais, a função de custo  $\mathcal{H}_\infty$  de malha fechada  $\mathbf{T}_{yu}$  é  $\gamma = 0,7188$  ( $-2,8683$  dB), conforme ilustrado na Figura 25, indicando bom desempenho e robustez.

Figura 24 – Resposta em frequência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Resposta em frequência dos valores singulares em malha fechada.



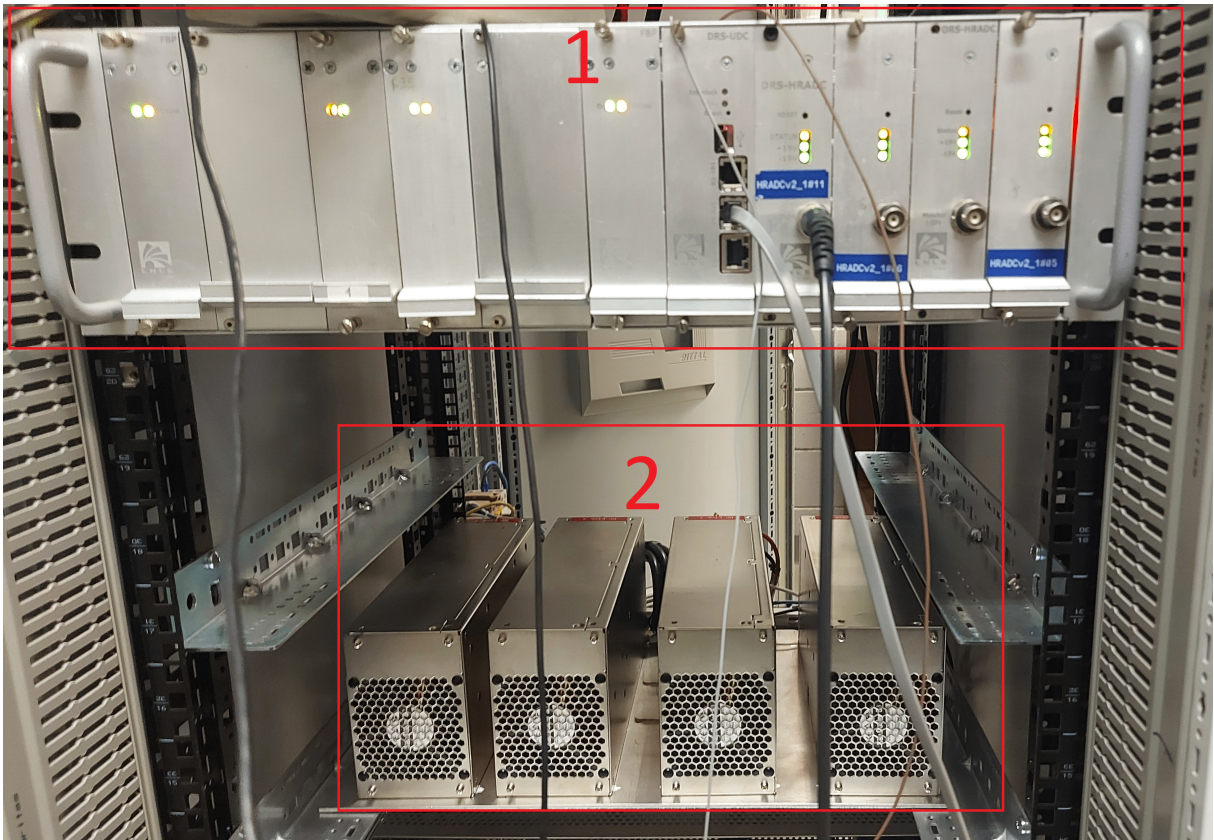
Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

### 4.1 Dados da bancada experimental

Nas Figuras 26 e 27 são mostrados o protótipo em escala reduzida e a carga magnética utilizadas para testar a lei de controle proposta.

Figura 26 – Protótipo em escala reduzida. 1) Fonte de alimentação CC, 2) Módulos de potência e controle.

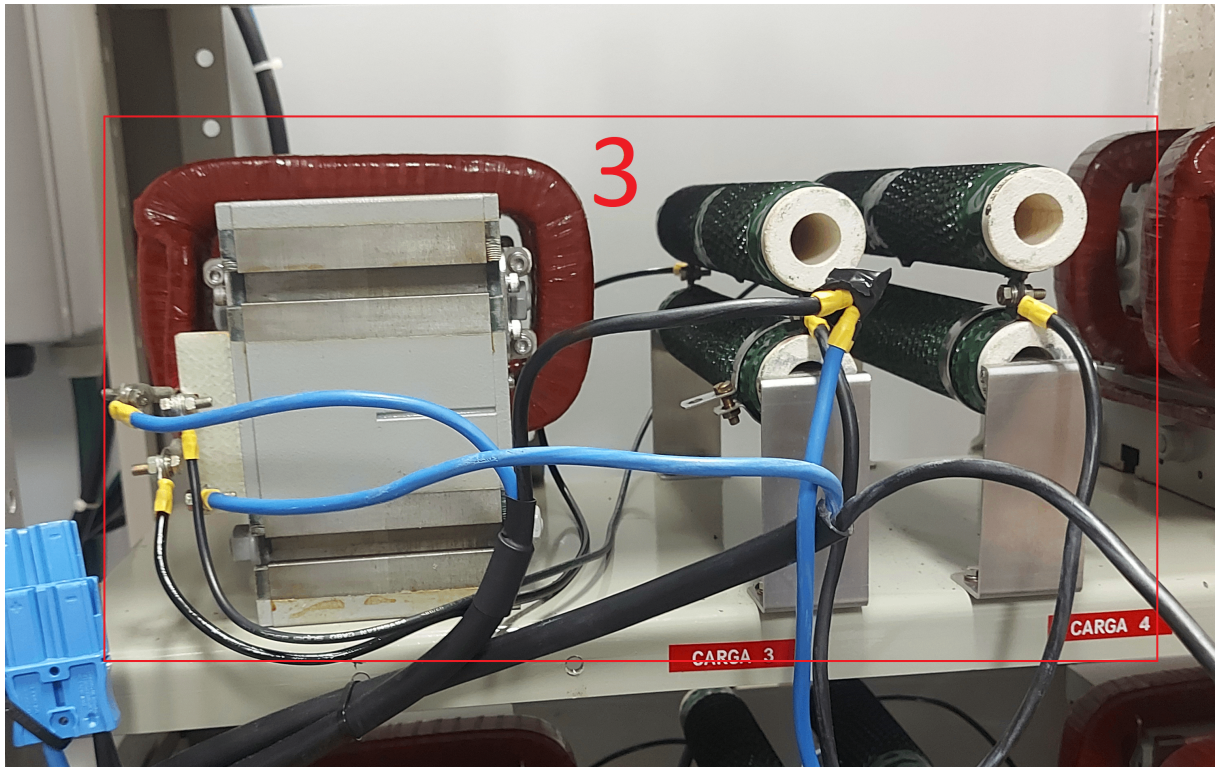


Fonte: Elaborado pelo autor.

O transdutor utilizado para medir as correntes dos magnetos foi o ITN 12-P ULTRASTAB, da LEM Danfysik, por ter características compatíveis com aplicações de controle de corrente de alta precisão. Trata-se de um transdutor de malha fechada, baseado em detector de fluxo zero, o que proporciona elevada acurácia, boa linearidade, baixas variações em precisão e estabilidade devido a mudança temperatura, ampla largura de banda e reduzido nível de ruído no sinal de saída (LEM, 2018). As principais especificações do transdutor são apresentadas na Tabela 4.

Apesar do Controlador Digital de Sinais, (do inglês, *Digital Signal Controller*) (DSC) ter canais de conversão Analógico Digital, foram utilizados conversores externos para isolar os sinais analógicos que chegavam ao microcontrolador. O conversor A/D utilizado para discretizar a corrente de saída foi o AD7634BSTZ. Esse circuito integrado possui resolução

Figura 27 – Carga magnética.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4 – Principais características do transdutor de corrente ITN 12-P ULTRASTAB.

Característica	Valor
Corrente nominal primária	12,5 A
Faixa de medição primária	0 a $\pm 25$ A
Corrente secundária nominal	35 mA
Faixa de medição secundária	0 a $\pm 50$ mA
Relação de conversão	1 : 250
Erro de linearidade	$\leq 4$ ppm
Coefficiente térmico do offset	$< 2$ ppm/K
Largura de banda	DC a 100 kHz ( $\pm 1$ dB)
Tempo de resposta	$< 1$ $\mu$ s

Fonte: adaptado de LEM (2018).

de 18 bits e taxa máxima de conversão de 500 kHz comunicando diretamente com o DSC (Analog Devices, 2012). A Tabela 5 apresenta as taxas de conversão utilizadas, os transdutores empregados, os filtros anti-aliasing de primeira ordem e a resolução dos sinais medidos.

Tabela 5 – Características da conversão analógico-digital.

Sinal medido	Taxa de amostragem	Frequência de corte do filtro	Resolução
Corrente $i_{o1}$	48 kHz	24 kHz	18 bits
Corrente $i_{o2}$	48 kHz	24 kHz	18 bits

Fonte: adaptada de Cardoso (2019).

## 4.2 Verificação Experimental

A lei de controle foi implementada em um DSC de ponto flutuante F28M36P63C2 com frequência de amostragem  $f_s = 48$  kHz. Para isso, o controlador obtido em tempo contínuo (3.24) foi discretizado pelo método de Tustin, devido às suas vantagens conhecidas (ASTROM & WITTENMARK, 2011), resultando no seguinte controlador em tempo discreto:

$$K_{11}(z) = \frac{0,2444z^4 - 0,3977z^3 - 0,0877z^2 + 0,3978z - 0,1566}{z^4 - 1,885z^3 + 0,0971z^2 + 1,4606z - 0,6729} \quad (4.1)$$

$$K_{12}(z) = \frac{0,2142z^4 - 0,3955z^3 - 0,0322z^2 + 0,3955z - 0,1819}{z^4 - 1,885z^3 + 0,0975z^2 + 1,4606z - 0,6729} \quad (4.2)$$

Para fins de simplicidade, apenas quatro casas decimais foram utilizadas para representar os coeficientes das equações (4.1) e (4.2). Os coeficientes do controlador implementado no DSC foram representados em aritmética de 32 bits, sendo submetidos a truncamento durante o processo de quantização.

Na Figura 28 é mostrada a comparação da resposta em frequência entre os controladores em tempo contínuo e discreto. Observa-se que a discrepância entre o sistema original em tempo contínuo e sua contraparte discretizada torna-se significativa apenas próxima à frequência de Nyquist. Contudo, essa diferença não afeta a faixa de frequência de maior interesse.

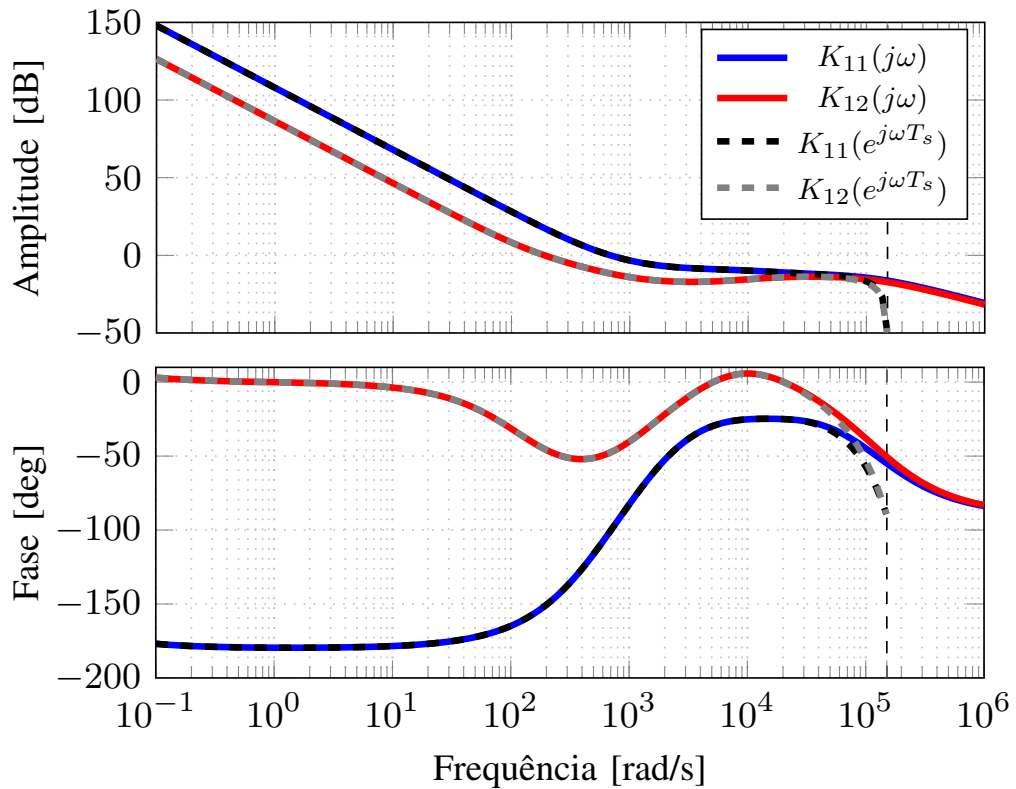
Nas Figuras 29 e 30 são mostrados o comportamento de rastreamento das correntes  $i_{o1}$  e  $i_{o2}$ , respectivamente. É evidente que essas correntes seguem de forma precisa a forma de onda de referência, com mínima defasagem. Os sinais de modulação para o par superior,  $m_1$  e  $m_2$ , são ilustrados na Figura 31. Embora os sinais possam inicialmente parecer saturados, uma inspeção mais detalhada revela que não estão. Outros sinais de modulação apresentam características semelhantes e foram omitidos para maior clareza.

Embora o erro pareça desprezível, nesta aplicação a precisão é fundamental. Portanto, o erro relativo é calculado em partes por milhão (ppm) conforme:

$$e_{track} = \left( \frac{i_o^* - i_o}{\hat{i}_o^*} \right) \times 10^6 \quad (4.3)$$

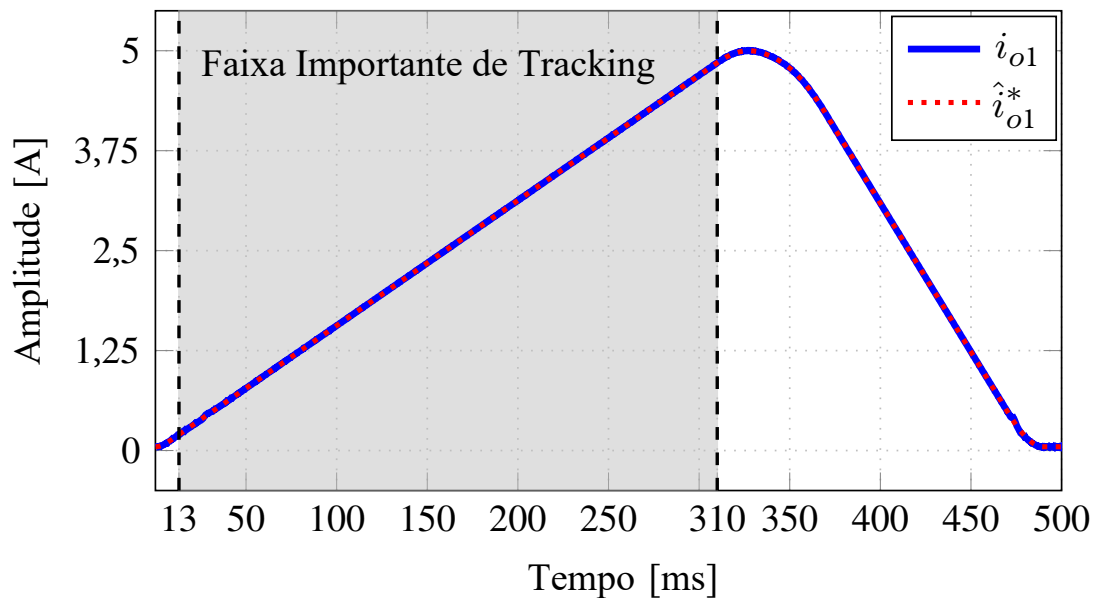
em que  $i_o^*$  é a referência de corrente, e  $\hat{i}_o^*$  é seu valor de pico, que é 5 A.

Figura 28 – Resposta em frequência do controlador.



Fonte: Elaborado pelo autor.

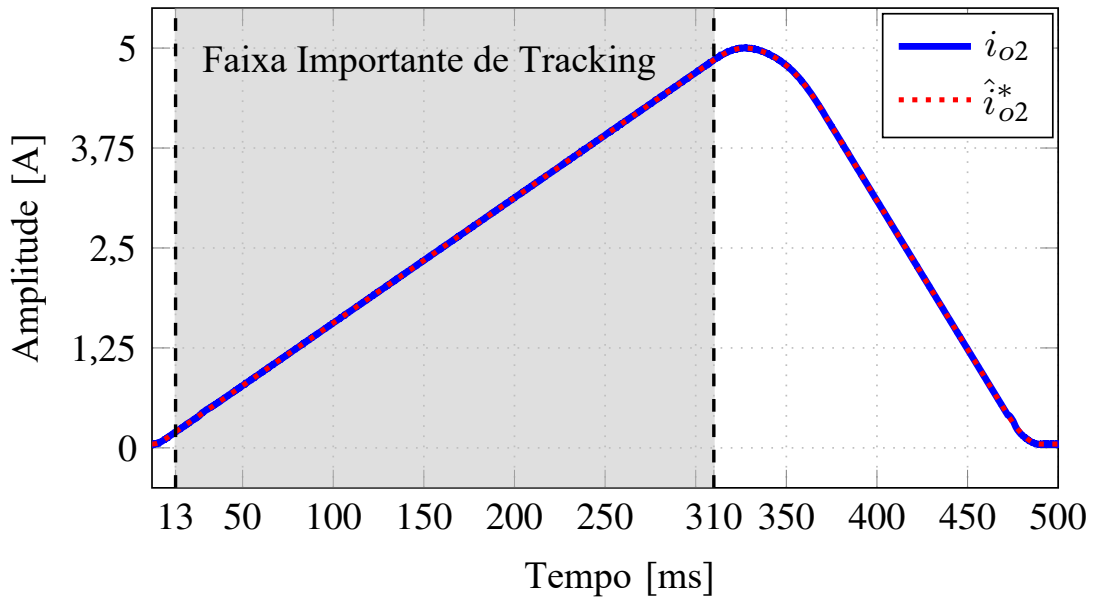
Figura 29 – Comportamento de rastreamento da corrente  $i_{o1}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

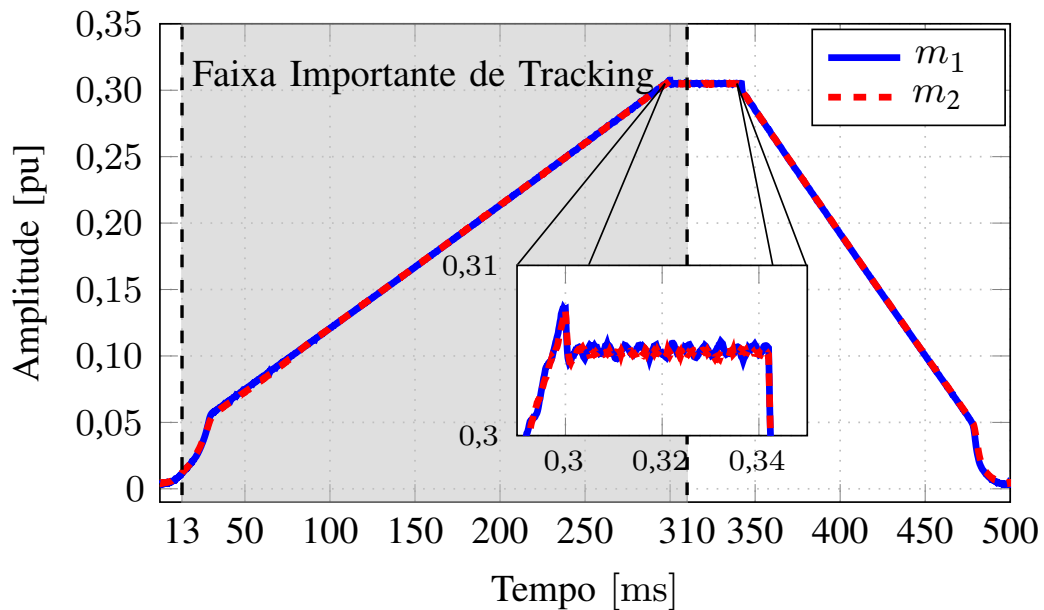
O comportamento de rastreamento, avaliado conforme (4.3), é mostrado na Figura 32. Nota-se claramente que o erro permanece dentro dos limites pré-definidos em

Figura 30 – Comportamento de rastreamento da corrente  $i_{o2}$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 – Sinais de modulação.

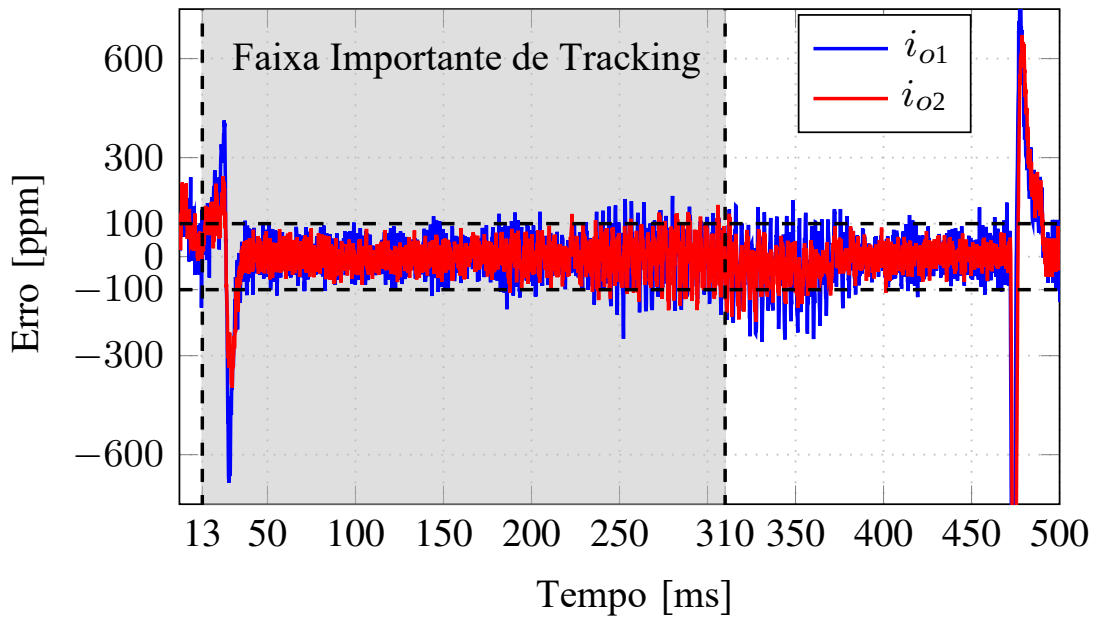


Fonte: Elaborado pelo autor.

praticamente toda a região crítica de rastreamento. Contudo, há um pequeno período em que o erro ultrapassa 100 ppm. Isso ocorre quando a corrente está próxima de zero, assim como os sinais de modulação. Conseqüentemente, essa é a região onde o tempo morto do conversor tem um efeito significativo sobre a tensão de saída, o que, por sua vez, aumenta o erro de rastreamento.

Para demonstrar o efeito do tempo morto sobre o erro de rastreamento, ele foi

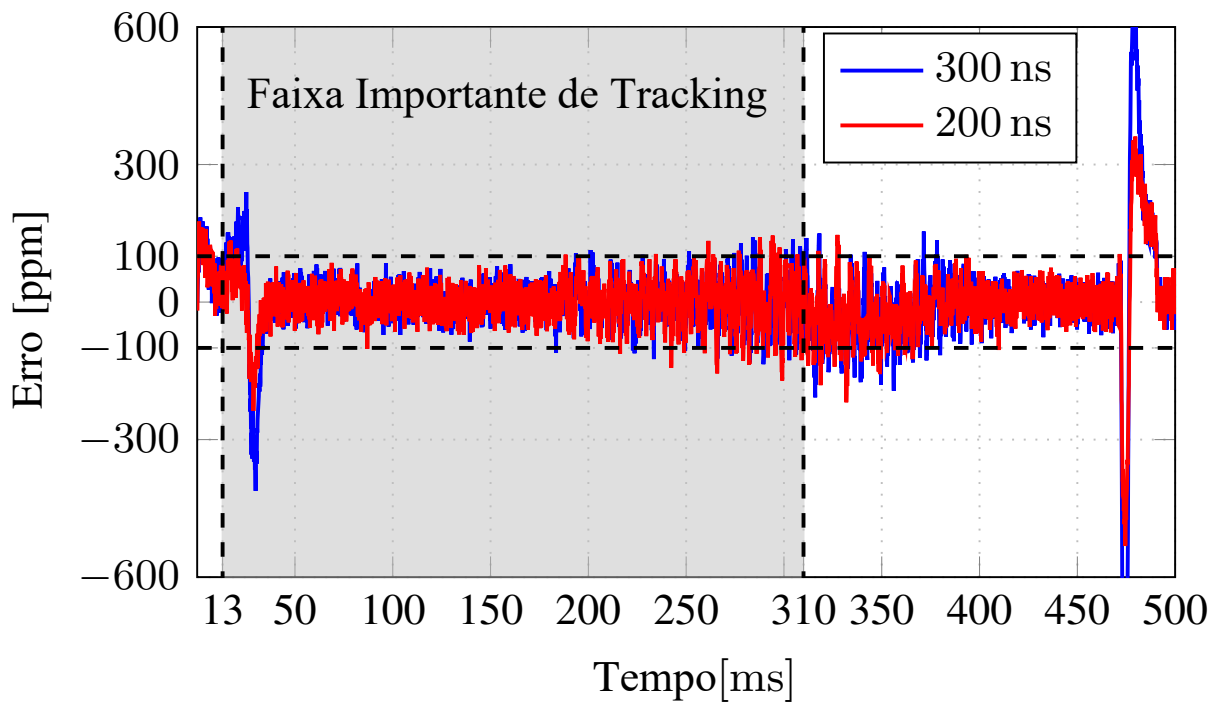
Figura 32 – Comportamento do erro de rastreamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

reduzido de 300 ns para 200 ns, que é o valor mínimo permitido pelo hardware. Como pode ser visto na Figura 33, a redução melhorou o rastreamento durante as regiões críticas, resultando em um período praticamente nulo em que o erro excede o limite ideal.

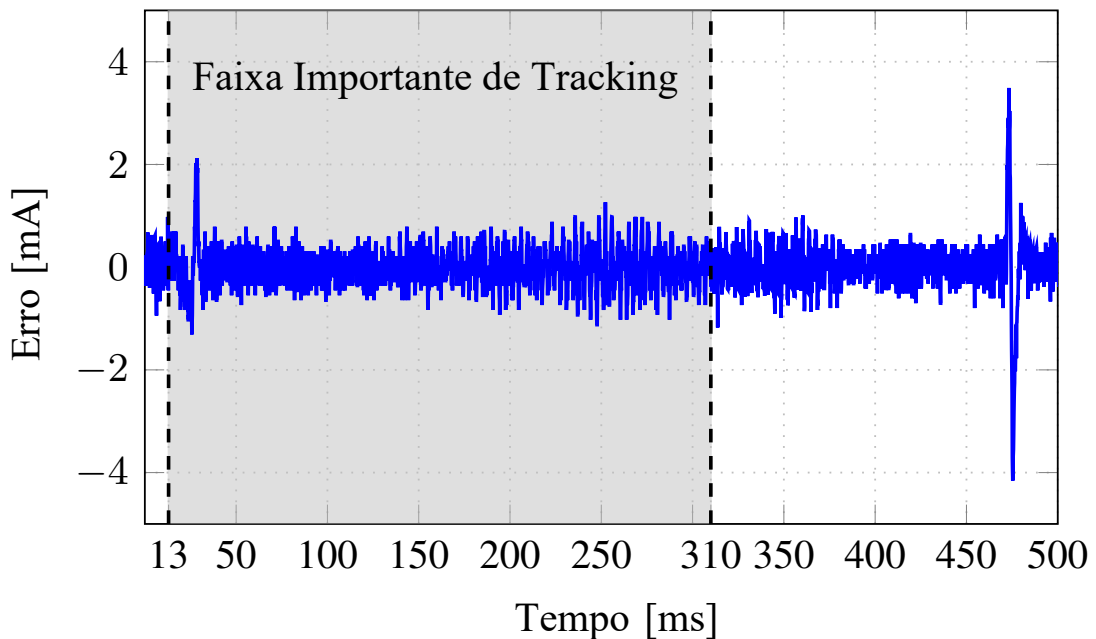
Figura 33 – Erro de rastreamento de  $i_{o2}$  com tempo morto reduzido para 200 ns.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, também é essencial que os conversores conectados em paralelo compartilhem igualmente a corrente da carga. Ou seja, o erro de compartilhamento  $e_s = i_{o1} - i_{o2}$  deve ser pequeno. Esse erro é mostrado na Figura 34, é evidente que o compartilhamento de corrente é efetivo, com o erro permanecendo dentro de aproximadamente 2 mA ao longo da faixa crítica de rastreamento. Essa observação confirma a ausência de condições de sobrecarga nos conversores.

Figura 34 – Erro de compartilhamento  $e_s = i_{o1} - i_{o2}$  entre os conversores conectados em paralelo.



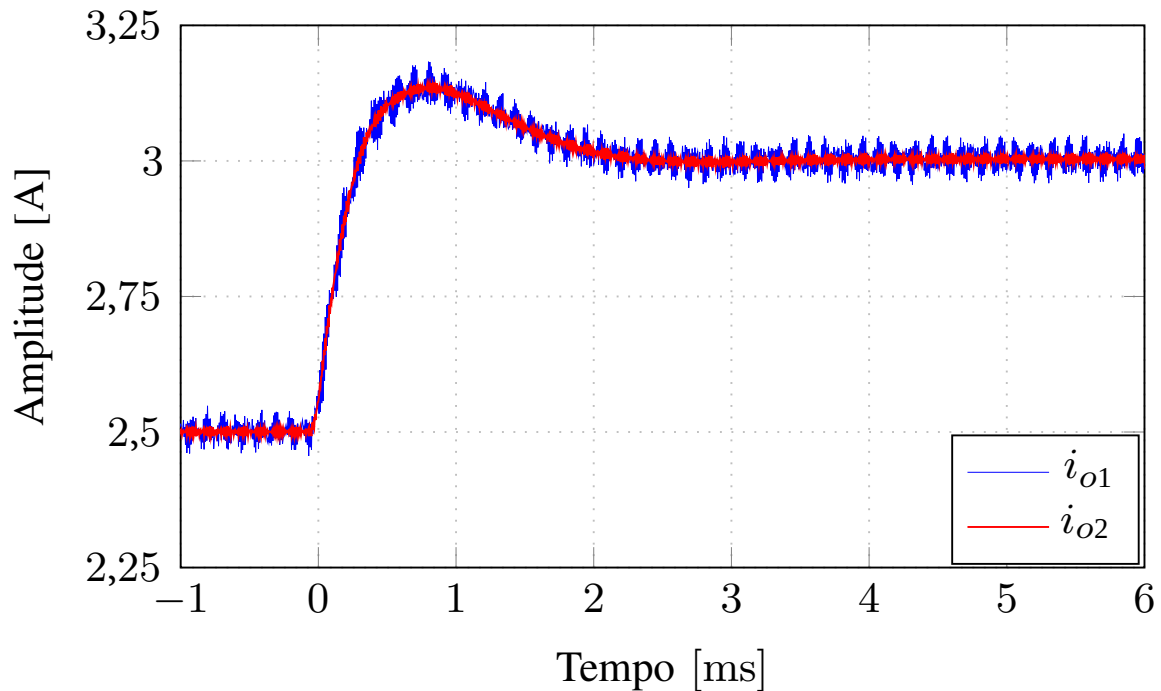
Fonte: Elaborado pelo autor.

Embora o sinal de referência permaneça constante nesta aplicação, o protótipo foi testado com uma mudança em degrau na referência para avaliar o desempenho do controlador, como mostrado na Figura 35. Conforme ilustrado, ambas as correntes de saída exibem dinâmicas semelhantes. Além disso, o sobresinal é relativamente pequeno (13%), e o tempo de acomodação é de aproximadamente 3 ms, o que está consistente com a largura de banda escolhida durante a fase de projeto.

Embora outras escolhas de parâmetros de filtro tenham sido consideradas, nenhuma delas melhorou o erro de rastreamento. Especificamente, tornar os parâmetros do filtro mais rígidos para obter tempos de resposta mais rápidos (isto é, aumentando  $\omega_B$  e reduzindo  $A$  e  $M$ ) resultou em um controlador que ou não assegurava robustez ou levava a soluções inviáveis. Por outro lado, relaxar ainda mais os parâmetros apenas aumentava o erro de rastreamento. Portanto, o filtro selecionado no manuscrito oferece o melhor equilíbrio entre resposta transitória e robustez.

Para fins de investigação, na Figura 36 é mostrada uma comparação entre o filtro

Figura 35 – Comportamento das correntes de saída em resposta a uma mudança em degrau na referência.



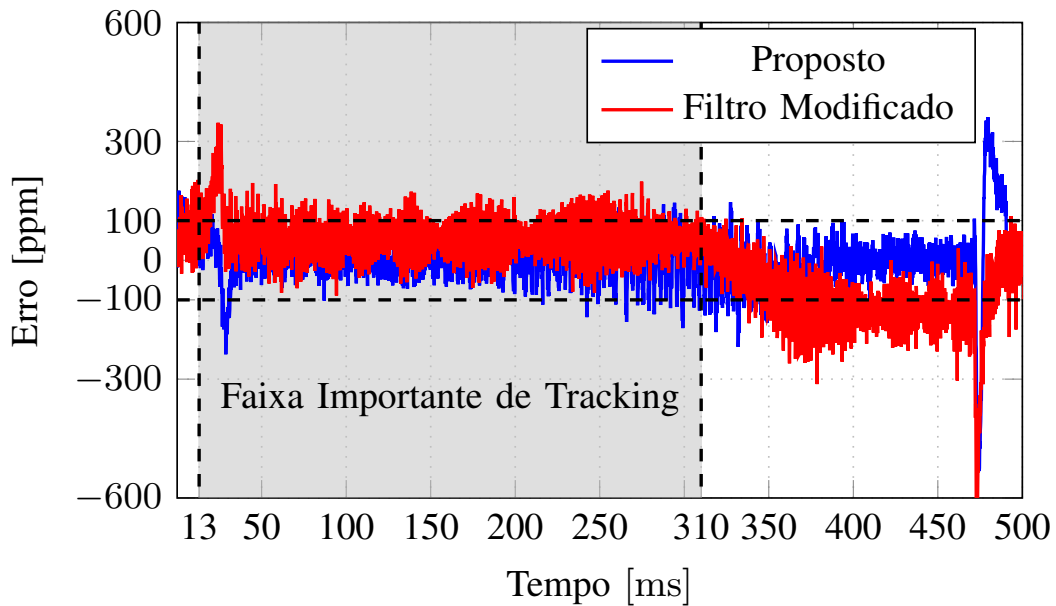
Fonte: Elaborado pelo autor.

escolhido e uma versão modificada com parâmetros de ponderação mais relaxados. O filtro modificado usa  $M = 5,3$ ,  $A = 2 \times 10^{-10}$  e  $\omega_B = 2\pi \cdot 330/\sqrt{2}$  rad/s. Conforme mostrado na Figura 36, essa modificação resultou em um leve aumento no erro de rastreamento, evidenciando o compromisso entre relaxamento do filtro e degradação de desempenho.

Para fins de comparação, um controlador Proporcional-Integral (PI) foi implementado e seu desempenho de rastreamento foi comparado com o do controlador proposto. O objetivo dessa comparação é estabelecer uma referência de desempenho em relação a uma estratégia clássica de controle, amplamente utilizada em aplicações industriais devido à sua simplicidade de projeto e implementação. Ressalta-se, entretanto, que essa comparação não tem como objetivo apresentar o PI como uma alternativa equivalente ao controlador robusto proposto, mas sim evidenciar as limitações de uma abordagem SISO convencional quando aplicada a uma planta multivariável, acoplada e sujeita a requisitos rigorosos de rastreamento.

O controlador PI foi projetado com base em um modelo reduzido que desconsidera o acoplamento entre os conversores, tratando o sistema como uma planta SISO. Para garantir uma comparação com critérios de sintonia semelhantes, foi utilizada a mesma largura de banda empregada no projeto do controlador PI e no filtro de ponderação do controlador robusto proposto, especificamente  $\omega_B = 2\pi \cdot 430/\sqrt{2}$  rad/s. Os ganhos resultantes do PI são  $k_p = 0,3185$  e  $k_i = 160,5$ , que fornecem uma margem de fase de  $90^\circ$

Figura 36 – Comparação da resposta de rastreamento para diferentes parâmetros de filtro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

e uma margem de ganho de 31,3 dB, valores considerados adequados na teoria de controle clássico.

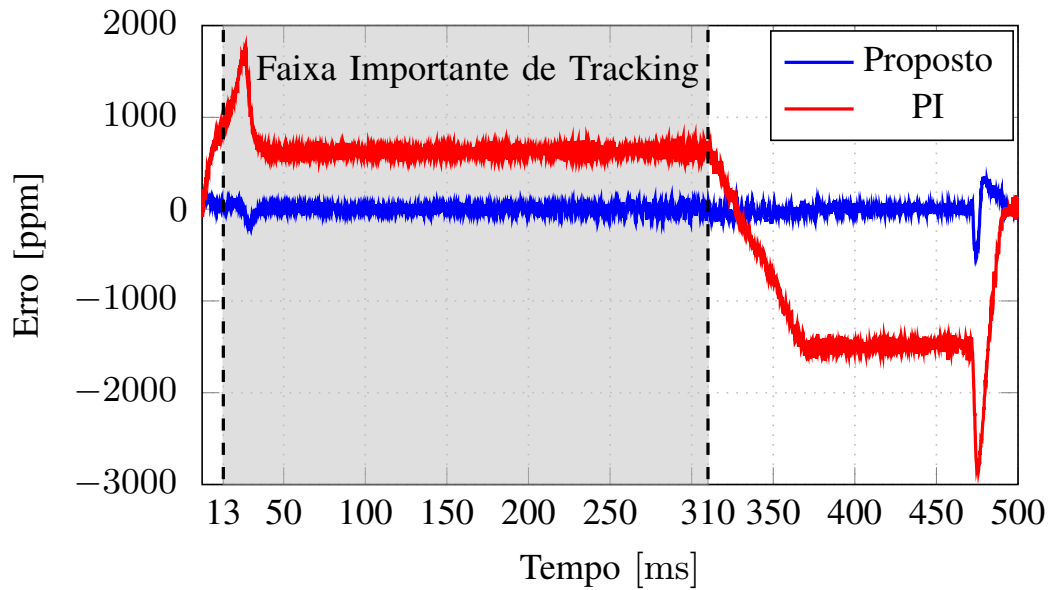
Na Figura 37 são ilustrados os erros de rastreamento para ambos os controladores, PI e o proposto. É evidente que o controlador PI não consegue manter um erro inferior a 100 ppm dentro da faixa desejada. Além disso, devido ao seu único integrador, ele não é capaz de seguir com precisão referências em rampa sem incorrer em erro de velocidade. Destaca-se também que a inclinação mais acentuada do lado decrescente da rampa de referência resulta em um erro de rastreamento maior, como era de se esperar.

Por fim, para testar a robustez do controlador, foram realizadas simulações devido à dificuldade de modificar a carga acoplada na prática. Na Figura 38 é mostrado o erro da corrente de saída em partes por milhão (ppm) para variações na indutância da carga. Especificamente, a indutância foi alterada inicialmente de 1 mH para 1,5 mH, e depois de 1,5 mH para 0,5 mH. Conforme observado, o erro se mantém bem comportado, com um breve transitório antes de retornar suavemente à região de rastreamento. Apesar de uma variação significativa de 50% na indutância em relação ao valor nominal, o sistema manteve a estabilidade, demonstrando a robustez do controlador.

#### 4.3 Discussão dos Resultados

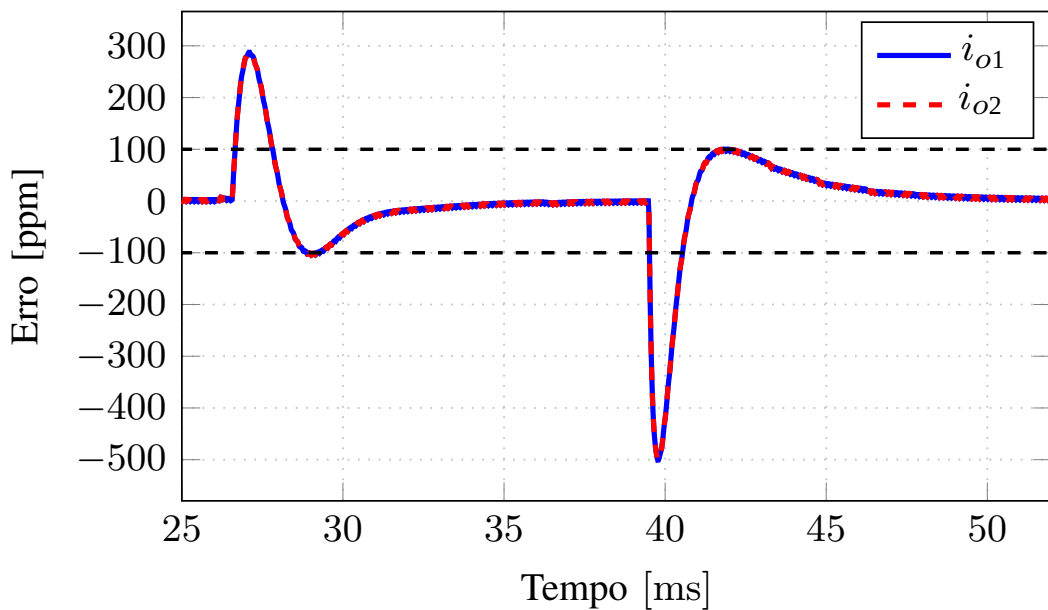
Os resultados experimentais apresentados neste capítulo demonstram que a estratégia de controle robusto multivariável proposta é capaz de atender aos rigorosos requisitos de desempenho impostos pela aplicação no *Booster* do Sirius. O erro de

Figura 37 – Erros de rastreamento para os controladores PI e proposto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Comportamento da corrente de saída para variação da indutância da carga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

rastreamento permanece dentro do limite de 100 ppm na maior parte da região crítica de operação, evidenciando a eficácia do controlador no seguimento da referência de corrente.

Observa-se que os maiores desvios de rastreamento ocorrem nas regiões próximas ao cruzamento por zero da corrente, o que está diretamente associado aos efeitos do tempo morto dos dispositivos de potência e à redução da tensão efetivamente aplicada à carga

nessas condições. Esse comportamento era esperado, uma vez que o modelo linear utilizado no projeto não contempla explicitamente tais não linearidades.

A redução do tempo morto de 300 ns para 200 ns mostrou-se eficaz na mitigação desse efeito, confirmando que parte significativa do erro observado é de origem física e não decorrente de deficiências do projeto de controle. Tal resultado reforça a robustez da estratégia adotada, que se mostrou capaz de manter estabilidade e desempenho mesmo diante dessas limitações práticas.

O compartilhamento de corrente entre os módulos conectados em paralelo apresentou comportamento satisfatório ao longo de toda a faixa de operação, com erros reduzidos e ausência de sobrecarga em qualquer módulo individual. Esse resultado evidencia que o controlador multivariável foi capaz de lidar adequadamente com o acoplamento entre os braços em paralelo, algo que dificilmente seria alcançado por estratégias SISO convencionais.

Por fim, a comparação com o controlador PI clássico deixa claro que este não atende às especificações rigorosas impostas pela aplicação. A abordagem robusta  $\mathcal{H}_\infty$  proposta demonstra clara superioridade em termos de precisão, robustez e capacidade de lidar com incertezas paramétricas.

## 5 Conclusões e Propostas para Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo principal o desenvolvimento, a análise e a validação de uma estratégia de controle robusto multivariável aplicada a uma fonte de corrente modular, projetada para atender aos rigorosos requisitos de desempenho impostos por um acelerador de partículas de última geração, o Sirius, localizado no CNPEM. Buscou-se assegurar elevados níveis de precisão, robustez e estabilidade, mesmo na presença de incertezas paramétricas, variações operacionais e perturbações externas inerentes ao sistema.

No Capítulo 1 foi apresentada a contextualização do problema, destacando-se a importância de fontes de corrente de alta precisão para aplicações em aceleradores síncrotrons, bem como os desafios associados à modelagem e ao controle de sistemas modulares de elevada ordem. Além disso, foi realizada uma revisão bibliográfica de estratégias de controle para este tipo de fonte de corrente. Também foram definidos os objetivos do trabalho e descrita a estrutura geral da tese.

O Capítulo 2 abordou a modelagem detalhada da fonte de corrente modular, contemplando a dinâmica elétrica dos submódulos e os acoplamentos entre módulos. Foi apresentado o modelo para  $n$  módulos em série paralelo com  $n$  módulos em série. Essa etapa foi fundamental para a compreensão do comportamento dinâmico do sistema e para o desenvolvimento de estratégias de controle adequadas. Devido a elevada ordem do sistema completo foi proposto um sistema de ordem reduzida utilizando uma aproximação pela norma Hankel, visando obter controladores de menor ordem.

No Capítulo 3 foi apresentado os fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento da estratégia de controle robusto para um sistema multivariável, incluindo o erro entre o modelo de ordem completa e o modelo reduzido como uma incerteza para o projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ . Os valores singulares da função de sensibilidade complementar ( $T_{yu}$ ) foram analisados indicando que o controlador apresenta bom desempenho e robustez.

O Capítulo 4 apresentou os resultados experimentais e testes em protótipo em escala reduzida, evidenciando a eficácia das estratégias propostas. Os resultados demonstraram que os controladores desenvolvidos são capazes de atender aos requisitos de desempenho do sistema, mantendo erro de rastreamento dentro dos limites especificados, mesmo na presença de perturbações e variações paramétricas.

De forma geral, os resultados obtidos confirmam que a abordagem proposta é viável, robusta e eficaz, representando uma contribuição relevante para o projeto de sistemas de controle aplicados a fontes de corrente modulares de alta precisão. O trabalho contribui

tanto do ponto de vista teórico, ao integrar técnicas de controle robusto e redução de ordem, quanto do ponto de vista prático, ao fornecer soluções aplicáveis a sistemas reais de aceleradores de partículas.

As principais contribuições foram a modelagem matemática do sistema para  $N$  módulos em série conectados em paralelo com  $N$  módulos em série; projeto de um controlador que atende em praticamente toda a região de importância um erro no rastreamento de corrente menor que 100 ppm; projeto de um controlador que compartilhe a corrente de forma equilibrada nos conversores conectados em paralelo; tempo de processamento da ordem de controle factível com a aplicação no Sirius.

## 5.2 Propostas para trabalhos futuros

Como continuidade e complementação deste trabalho, sugerem-se as seguintes propostas para trabalhos futuros:

- Considerar utilizar outros tipos de chaveamento para diminuir o erro em tensões baixas do barramento no protótipo experimental.
- Considerar o uso de um controlador *feedforward* para tentar diminuir o erro inicial da corrente dos magnetos.
- Implementação das estratégias de controle propostas diretamente na fonte de corrente em operação no Sirius, permitindo a validação completa em ambiente real.
- Estudo do impacto de não linearidades e atrasos de comunicação no desempenho do controle, bem como o desenvolvimento de estratégias específicas para sua mitigação.
- Integração de métodos de controle preditivo robusto, explorando sua capacidade de lidar com restrições e otimizar o desempenho dinâmico.
- Considerar a variação paramétrica para o projeto dos controladores.

Essas extensões podem ampliar ainda mais a aplicabilidade dos resultados apresentados, contribuindo para o avanço do estado da arte em sistemas de controle de alta precisão para aplicações científicas e industriais.

## REFERÊNCIAS

- Analog Devices. *AD7634: 18-Bit, 670 kSPS, Differential Programmable Input PulSAR ADC*. Norwood, MA, 2012. Data Sheet, Rev. B. Disponível em: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ad7634.pdf>. Acesso em: 18 maio 2026.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-controlled systems: Theory and design*. 3. ed., unabridged, corrected republic.. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2011. This Dover ed., first publ. in 2011, is an unabridged, corrected republication of the work first publ. in 1997 by Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey. ISBN 9780486486130.
- BAUR, U.; BENNER, P.; FENG, L. Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer, v. 21, n. 4, p. 331–358, 2014.
- BOYD, S. P.; BARRATT, C. H. *Linear controller design: limits of performance*. : Citeseer, 1991.
- BRUNHEIRA, G. O. et al. Digital control system for high precision power supplies of the new brazilian synchrotron source. In: IEEE. *2013 Brazilian Power Electronics Conference*. 2013. p. 326–331.
- CABELLO, R. V. C. *Projeto de Controladores H-infinito de Ordem Reduzida e Compensação de Saturação em Estruturas Flexíveis*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas - Campinas - SP, 2014.
- CARDOSO, T. T. *Estratégia de Controle Moderno e Discreto Aplicado a um Protótipo de Fonte Modular de Corrente do Sirius*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora - Juiz de Fora - MG, 2019.
- CARDOSO, T. T. et al. Optimal digital state-space control of a sirius modular current source prototype. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, p. 1–10, 2021.
- CNPEN. *Projeto Sirius: a nova fonte de luz síncrotron brasileira*. Campinas: CNPEM/LNLS, 2014. Disponível em: <https://lnls.cnpem.br/sirius/>. Acesso em: 6 maio 2026.
- CRAIEVICH, A. F. Synchrotron radiation in brazil. past, present and future. *Radiation Physics and Chemistry*, Elsevier, v. 167, p. 108253, 2020.
- DOYLE, J. C. Guaranteed margins for lqg regulators. *IEEE Transactions on automatic Control*, IEEE, v. 23, n. 4, p. 756–757, 1978.
- FREITAS, F. D.; ROMMES, J.; MARTINS, N. Gramian-based reduction method applied to large sparse power system descriptor models. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 1258–1270, 2008.
- FUKUDA, H.; NAKAOKA, M. State-vector feedback control-based 100 khz carrier pwm power conditioning amplifier and its high-precision current-tracking scheme. In: IEEE.

*Proceedings of IECON'93-19th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*. 1993. p. 1105–1110.

GLOVER, K. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_\infty$ -error bounds. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 39, n. 6, p. 1115–1193, 1984.

GU, D.-W.; PETKOV, P. H.; KONSTANTINOV, M. M. *Robust Control Design with MATLAB®*. : Springer, 2014. 492 p. ISBN 9781447146810.

KAMP, T. van de et al. Insect imaging at the anka synchrotron radiation facility. *Entomologie heute*, v. 25, p. 147–160, 11 2013.

KE, X.; JENNI, F.; KÜNZI, R. Investigations on a high performance control structure for accelerator magnet power supplies. In: PCIM. 2010.

KHALIL, I.; DOYLE, J.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. : Prentice hall New York, 1996.

KONDO, C. et al. High precision digital control magnet power supplies. In: *Proceedings of IPAC'23*. Venice, Italy: , 2023. p. 3773–3775.

KUNZI, R. Passive power filters. In: *Proceedings, CAS - CERN Accelerator School: Power Converters: Baden, Switzerland, May 7-14, 2014*. 2015. p. 265–289.

KURIMOTO, Y. et al. Precise current control in accelerator magnets with a digital feedback system. *IEEE Transactions on nuclear science*, IEEE, v. 61, n. 1, p. 546–552, 2014.

LANDAU, I. The rst digital controller design and applications. *Control Engineering Practice*, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 155–165, 1998.

LEM. *High Performance Current Transducer ITN 12-P ULTRASTAB*. fev. 2018. Datasheet, version 3, N° 88.38.C5.000.0. Disponível em: <https://ppmpower.co.uk/wp-content/uploads/LEM-ITN-12-P.pdf>. Acesso em: 18 maio 2026.

LIRA, A. et al. Power supplies for the lnls 500-mev booster synchrotron. v. 5, p. 3702–3704, 2001.

LIU, L. et al. Status of sirius—a new brazilian synchrotron light source. *Proc. of IPAC*, v. 11, p. 931–933, 2011.

LIU, L. et al. The sirius project. *Journal of synchrotron radiation*, International Union of Crystallography, v. 21, n. 5, p. 904–911, 2014.

LIU, L. et al. *A new 5BA low emittance lattice for Sirius*. 2013.

LOBATO, S. de C. *Fonte de Corrente para Aplicação em Magnetos de Aceleradores de Partículas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora - Juiz de Fora - MG, 2016.

LONG, F. Status and trends in magnet power converter technology for accelerators. 2014.

MOHAN, N.; UNDELAND, T. M.; ROBBINS, W. P. *Power electronics: converters, applications, and design*. : John wiley & sons, 2003.

OLIVEIRA, F. H. de. *Controle Discreto de fonte modular de Corrente aplica a Magnetos de Aceleradores de Partículas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora - Juiz de Fora - Brasil, 2018.

OLIVEIRA, F. H. de et al. Current source converter model and control for a particle accelerator quadrupole magnet. In: IEEE. *2017 Brazilian Power Electronics Conference (COBEP)*. 2017. p. 1–6.

RODRIGUES, A. et al. Sirius light source status report. *Proc. IPAC'18*, p. 2886–2889, 2018.

RODRIGUES, C.; LIMEIRA, B. E. 2-hz ramping mode magnet power supply for particle accelerators. In: IEEE. *2015 IEEE 13th Brazilian Power Electronics Conference and 1st Southern Power Electronics Conference (COBEP/SPEC)*. 2015. p. 1–5.

SANCHEZ-PENA, R. S.; SZNAIER, M. *Robust systems theory and applications*. : John Wiley & Sons, Inc., 1998.

SANTOS, T. M. et al. Synchrotron infrared nanospectroscopy in fourth-generation storage rings. *Synchrotron Radiation*, International Union of Crystallography, v. 31, n. 3, p. 547–556, 2024.

SKOGESTAD SIGURD & POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. : john Wiley & sons, 2005.

TSOLARIDIS, G.; BIELA, J. Flexible, highly dynamic, and precise 30-ka arbitrary current source. *IEEE Transactions on Plasma Science*, IEEE, v. 46, n. 10, p. 3382–3392, 2018.

WANG, X. et al. Design of control algorithm for accelerator magnet power supply with large time constant load. *Radiation Detection Technology and Methods*, Springer, v. 4, n. 3, p. 383–391, 2020.

WASSINGER, N. et al. Multiple-stage converter topology for high-precision high-current pulsed sources. *IEEE Transactions on Power electronics*, IEEE, v. 26, n. 5, p. 1316–1321, 2010.

WIEDEMANN, H. *Particle accelerator physics*. : Springer, 2015.

ZAMES GEORGE & FRANCIS, B. Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 28, n. 5, p. 585–601, 1983.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of robust control*. : Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.

## APÊNDICE A – Construção ótima para a Norma de Hankel

A redução de modelo baseada na norma de Hankel simplifica de forma eficaz sistemas dinâmicos complexos, preservando suas características essenciais. A norma de Hankel quantifica a energia de um sistema analisando seu comportamento entrada-saída por meio da construção de uma matriz de Hankel. O processo de redução começa com a formação dessa matriz a partir da resposta do sistema, seguida pela aplicação da decomposição em valores singulares (SVD) para identificar os estados mais significativos. Ao reter os estados associados aos maiores valores singulares e descartar aqueles com contribuição mínima, formula-se um modelo de ordem reduzida. Esse método garante que as características dinâmicas fundamentais do sistema original de alta ordem sejam mantidas, enquanto elimina estados controláveis e observáveis menos relevantes do ponto de vista entrada-saída (SANCHEZ-PENA & SZNAIER, 1998).

Uma etapa fundamental na redução pela norma de Hankel é a obtenção de uma realização balanceada do sistema. O objetivo é encontrar uma transformação de similaridade que torne simultaneamente diagonais e iguais os Gramianos de controlabilidade e observabilidade.

Considerando que  $\mathbf{X}_b^* \mathbf{X}_c$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e utilizando a Equação 2.29, pode-se inferir que:

$$\mathbf{X}_b^* \mathbf{X}_c = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}^*}_{\mathbf{V}^*} \quad (.1)$$

De posse das matrizes descritas na Equação .1, é possível obter as matrizes de transformação à esquerda  $\mathbf{T}_e$  e à direita  $\mathbf{T}_d$  que estão descritas na Equação .2 (FREITAS; ROMMES & MARTINS, 2008). Nota-se ainda que  $\mathbf{T}_b^T \mathbf{T}_c = \mathbf{I}_{n \times n}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_e &= \mathbb{R}(\mathbf{X}_b) \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{T}_d &= \mathbb{R}(\mathbf{X}_c) \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (.2)$$

em que  $\mathbb{R}(\mathbf{X})$  é a parte real da matriz  $\mathbf{X}$ . Finalmente, utilizando as matrizes de transformação, o realização balanceada pode ser obtida:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}_e^T \mathbf{A} \mathbf{T}_d, \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathbf{T}_e^T \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{C} \mathbf{T}_d, \end{aligned} \quad (.3)$$

de modo que os novos Gramianos  $\tilde{\mathbf{X}}_b$  e  $\tilde{\mathbf{X}}_c$  satisfaçam:

$$\tilde{\mathbf{X}}_b = \tilde{\mathbf{X}}_c = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad (.4)$$

onde  $\sigma_i$  são os valores singulares de Hankel do sistema, definidos como:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{X}_b \mathbf{X}_c)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (.5)$$

com  $\lambda_i(\cdot)$  denotando os autovalores.

Nesta forma, o sistema é dito balanceado, e cada estado apresenta um mesmo nível de energia de controlabilidade e observabilidade, representada pelo valor singular correspondente  $\sigma_i$ . Os estados são usualmente ordenados de forma decrescente:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0,$$

de modo que os primeiros estados concentram a maior parte da energia transmissível do sistema. Essa propriedade é o ponto de partida para a posterior redução de ordem, pois permite identificar quais estados podem ser truncados com impacto mínimo sobre o comportamento dinâmico.

Uma vez obtido o sistema balanceado, pode-se particionar as matrizes de estado segundo o número  $r < n$  de estados que se deseja manter:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [C_1 \ C_2], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (.6)$$

onde  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  e  $\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$ .

O objetivo é encontrar um sistema reduzido  $G_r(s)$  de ordem  $r$  que aproxime  $G(s)$  com erro mínimo na norma de Hankel. Um dos métodos para essa redução consiste na resolução de Equações de Ricatti que tem uma certa complexidade computacional. A seguir é demonstrado como é obtido o Modelo de Ordem Reduzida (MOR) através do método de Glover (GLOVER, 1984).

A realização reduzida ótima de ordem  $r$  atinge  $\|\mathbf{G} - \mathbf{G}_r\|_H = \sigma_{r+1}$ , conforme o teorema de Glover (GLOVER, 1984). Assumimos um sistema LTI contínuo, próprio e estável com realização mínima ( $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}}$ ) e que já foi transformado para a forma balanceada

$$\tilde{\mathbf{X}}_b = \tilde{\mathbf{X}}_c = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0. \quad (.7)$$

### Escolha de $\gamma$

Fixe a ordem do modelo reduzido  $r < n$  e escolha um escalar tal que:

$$\sigma_{r+1} < \gamma < \sigma_r. \quad (.8)$$

## Equações de Riccati estabilizantes

Resolvem-se as seguintes Equação de Riccati na base balanceada:

$$\tilde{\mathbf{A}}^* \mathbf{X} + \mathbf{X} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}^* \tilde{\mathbf{C}} - \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{X} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^* \mathbf{X} = 0, \quad (.9)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{A}}^* + \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^* - \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{C}}^* \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{Y} = 0, \quad (.10)$$

obtendo as soluções *estabilizantes* simétricas semidefinidas positivas  $\mathbf{X} \succeq 0$  e  $\mathbf{Y} \succeq 0$ .

## Partição por blocos

Particione as matrizes conforme a separação  $r$  e  $n - r$ :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2], \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix}.$$

## Matrizes auxiliares

Defina

$$\Phi = \mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{X}_{22} \mathbf{Y}_{22}, \quad \Psi = \mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}_{22} \mathbf{X}_{22}, \quad (.11)$$

as quais são não singulares sob as hipóteses de Glover.

## Realização reduzida ótima

Uma realização (estável) de ordem  $r$  para  $G_r$  que atinge o ótimo é:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_r &= \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12} \Phi^{-1} \gamma^{-2} \mathbf{Y}_{22} \mathbf{A}_{21}, \\ \mathbf{B}_r &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12} \Phi^{-1} \gamma^{-2} \mathbf{Y}_{22} \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{C}_r &= \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \gamma^{-2} \mathbf{X}_{22} \Psi^{-1} \mathbf{A}_{21}, \\ \mathbf{D}_r &= \mathbf{D}. \end{aligned}} \quad (.12)$$

Expressões equivalentes podem ser escritas permutando  $\Phi^{-1}$  e  $\Psi^{-1}$  por simetria; todos os resultados são semelhantes (no sentido de similaridade de realizações).

### Propriedades de otimalidade

Seja  $E(s) = G(s) - G_r(s)$  o erro. A construção acima garante:

1.  $E$  é próprio e estável;
2.  $\|E\|_H = \sigma_{r+1}$  (erro ótimo);

### Algoritmo resumido

1. Resolva as Lyapunov de  $\mathbf{X}_b$  e  $\mathbf{X}_c$  2.28; calcule os valores singulares de Hankel  $\{\sigma_i\}$ .
2. Balanceie o sistema para obter  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .
3. Fixe  $r$  e escolha  $\gamma$  com  $\sigma_{r+1} < \gamma < \sigma_r$ .
4. Resolva (.9) e (.10) por  $X, Y$  estabilizantes.
5. Construa  $A_r, B_r, C_r, D_r$  via (.12).

A redução de modelos pela norma Hankel não define um limite superior de erro teórico como a técnica de balanceamento truncado. Porém, é definido um erro ótimo através da norma Hankel  $\|E\|_H = \sigma_{r+1}$ , sendo  $\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s) - \mathbf{G}_r(s)$