

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado



Perturbações Lineares na Cosmologia Relativística: Fundamentos e Aplicações

Luis Enrique Pablo Mamani Mamani

Orientador:

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador:

Prof. Dr. Nicolas Ribeiro Bertini

Terça-feira, 4 de novembro de 2025

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

Luis Enrique Pablo Mamani Mamani

**Perturbações Lineares na Cosmologia Relativística: Fundamentos e
Aplicações**

Juiz de Fora
2025

Luis Enrique Pablo Mamani Mamani

**Perturbações Lineares na Cosmologia Relativística: Fundamentos e
Aplicações**

Dissertação apresentada ao Programa do Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Nicolas Ribeiro Bertini

Juiz de Fora
2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mamani Mamani, Luis Enrique Pablo.

Perturbações Lineares na Cosmologia Relativística: Fundamentos
e Aplicações / Luis Enrique Pablo Mamani. -- 2025.
53 f. : il.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Coorientador: Nicolas Ribeiro Bertini

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz
de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação
em Física, 2025.

1. Perturbações cosmológicas. 2. Flutuações. 3. Variáveis
invariantes de calibre. 4. Instabilidade gravitacional. 5. Inflação. I.
Lvovich Shapiro, Ilya, orient. II. Ribeiro Bertini, Nicolas, coorient. III.
Título.

Luis Enrique Pablo Mamani Mamani

Perturbações Lineares na Cosmologia Relativística: Fundamentos e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 4 de novembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Nicolas Ribeiro Bertini - Coorientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Dr. Wagno Cesar e Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Júlio César Fabris

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Juiz de Fora, 22/10/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Júlio César Fabris, Usuário Externo**, em 05/11/2025, às 07:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wagno Cesar e Silva, Usuário Externo**, em 05/11/2025, às 08:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nicolas Ribeiro Bertini, Professor(a)**, em 05/11/2025, às 09:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Membro**, em 05/11/2025, às 17:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2699442** e o código CRC **F2002D15**.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus por me permitir seguir em frente nesta vida e por me dar a força para completar este trabalho.
- À minha mãe Andrea Aurelia, ao meu pai Pablo e ao meu irmão Dennis Ronald, por serem a essência que dá sentido a cada um dos meus esforços na vida.
- Agradeço sinceramente à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudos que financiou integralmente minha formação no mestrado em Física, permitindo-me dedicar exclusivamente ao estudo, à pesquisa e ao desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), por me proporcionar um ambiente acadêmico excepcional, caracterizado pela excelência investigativa.
- Ao meu orientador, Professor Dr. Ilya Lvovich Shapiro, cuja disponibilidade e compreensão constante têm sido uma referência na minha formação acadêmica no estudo da Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos, e cuja integridade e excelência profissional constituem um modelo a seguir no âmbito científico.
- Ao meu coorientador, Professor Dr. Nicolas Ribeiro Bertini, por sua valiosa contribuição à minha formação em cosmologia. Sua paciência, disponibilidade constante e compreensão enriqueceram de maneira significativa o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Professor Dr. Gil de Oliveira Neto e ao Professor Dr. José Paulo Rodrigues Furtado de Mendonça, cujas aulas em Cosmologia, Mecânica Quântica IV e Teoria Eletromagnética III não apenas ampliaram meus horizontes conceituais, mas também inspiraram em mim uma profunda admiração pelo labor docente e pelo compromisso com a excelência acadêmica.

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento completo do formalismo de perturbações cosmológicas lineares na Relatividade Geral. Inicialmente, revisa-se os fundamentos da Relatividade Geral, incluindo a formulação variacional das equações de Einstein. Em seguida, constrói-se a cosmologia do modelo FLRW, com ênfase nas equações de Friedmann. A parte central dedica-se ao formalismo de perturbações, abordando a decomposição em modos escalares, vetoriais e tensoriais, o problema do calibre na descrição de perturbações, e a construção de variáveis invariantes de calibre, particularmente as variáveis de Bardeen. Derivam-se as equações de Einstein perturbadas para cada tipo de modo e discute-se sua interpretação física no contexto da formação de estruturas cósmicas. Finalmente, se discute o papel da inflação cósmica como mecanismo gerador de perturbações primordiais a partir de flutuações de campo escalar.

Palavras-chave: Perturbações cosmológicas, flutuações, variáveis invariantes de calibre, instabilidade gravitacional, inflação.

Abstract

This work presents the complete development of the formalism of linear cosmological perturbações in General Relativity. Initially, the foundations of General Relativity are reviewed, including the variational formulation of Einstein's equations. Next, the cosmology of the FLRW model was constructed, with emphasis on Friedmann's equations. A central part is dedicated to the formalism of perturbations, addressing the decomposition in scalar, vector and tensor modes, the gauge problem in the description of perturbations, and the construction of gauge-invariant variables, particularly the Bardeen variables. We derive the perturbed Einstein equations for each type of mode and discuss their physical interpretation in the context of the formation of cosmic structures. Finally, the role of cosmic inflation as a mechanism generating primordial perturbations from scalar field fluctuations is analyzed.

Keywords: Cosmological perturbations, fluctuations, gauge invariant variables, gravitational instability, inflation.

Sumário

Introdução	1
Notações e convenções	3
1 Elementos da Relatividade Geral	4
1.1 Breve revisão sobre análise tensorial	4
1.1.1 Espaço-tempo, variedades diferenciáveis e a métrica	4
1.1.2 Tensores e derivadas covariantes	5
1.1.3 Equação da geodésica	6
1.1.4 O tensor de curvatura de Riemann	7
1.2 Equações de campo de Einstein	8
1.2.1 Ação de Einstein-Hilbert	9
1.2.2 Tensor energia-momento, leis de conservação e covariância	10
1.3 O limite newtoniano da Relatividade Geral	11
2 Cosmologia Padrão	13
2.1 O princípio cosmológico, a lei de Hubble e a métrica de FLRW	13
2.2 Equações de Friedmann	15
2.3 Modelos cosmológicos	17
2.4 Parâmetros cosmológicos	18
3 Perturbações Cosmológicas	24
3.1 Instabilidade gravitacional	24
3.2 Variáveis invariantes de calibre	27
3.3 Perturbação das equações de Einstein	28
3.3.1 Perturbação do setor de matéria	29
3.4 Breve discussão sobre inflação e perturbações primordiais	31
3.5 Perturbações cosmológicas primordiais	34
Considerações finais	38

Apêndice A	39
Apêndice B	42
Bibliografia	46

Introdução

O presente trabalho situa-se no contexto do estudo dos fundamentos teóricos da Relatividade Geral e da Cosmologia Moderna, com o objetivo de analisar as perturbações cosmológicas primordiais e compreender seu papel na formação das estruturas em grande escala do universo. O trabalho está organizado em três capítulos, que abrangem desde os princípios da Relatividade Geral até as perturbações cosmológicas e o papel da inflação na geração de não homogeneidades primordiais.

No [Capítulo 1](#), são introduzidos os fundamentos matemáticos da Relatividade Geral, partindo do conceito do espaço-tempo como uma variedade diferenciável equipada com uma métrica lorentziana desenvolvem-se conceitos essenciais como o tensor métrico, a conexão de Levi-Civita, os tensores de curvatura e as equações de campo de Einstein derivadas a partir do princípio variacional.

O [Capítulo 2](#) centra-se na Cosmologia Moderna, onde se empregam conceitos da Relatividade Geral à descrição do universo. Sob o postulado do princípio cosmológico, que estabelece a homogeneidade e isotropia do universo em grande escala, é introduzida a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) como solução das equações de Einstein para um universo em expansão. Também derivam-se e analisam-se as equações de Friedmann que governam a evolução do fator de escala em função do conteúdo material do universo e do tempo cósmico, e discutem-se modelos cosmológicos correspondentes a universos dominados por diferentes componentes como matéria, radiação e energia escura, bem como combinações entre elas. Além disso, são apresentados os parâmetros cosmológicos-chave, como o parâmetro de Hubble e os parâmetros de densidade, culminando na apresentação do modelo LambdaCDM (Λ CDM).

O [Capítulo 3](#) aborda o estudo das perturbações cosmológicas, essenciais para compreender a formação de estruturas no universo. A partir da métrica FLRW é introduzido um formalismo para descrever pequenas variações em relação ao fundo homogêneo e isotrópico, classificando-as em modos escalares, vetoriais e tensoriais [1]. São introduzidas as variáveis de Bardeen para construir grandezas invariantes sob transformações de coordenadas [2]. Por fim, analisa-se o papel da inflação cósmica como mecanismo gerador de perturbações primordiais, estabelecendo as bases para explicar o surgimento das não ho-

mogeneidades que deram origem a formação das estruturas em grande escala do universo observável.

Examinam-se também as implicações teóricas dessas perturbações no contexto da inflação [3, 4], fornecendo um arcabouço formal que permite interpretar como os modelos da cosmologia moderna explicam a organização estrutural do universo desde suas fases iniciais até o presente, oferecendo aplicações gerais na construção e avaliação de modelos cosmológicos atuais como em [5, 6, 7, 8] refletindo a relevância dessas implicações teóricas para a pesquisa em cosmologia.

Notações e Convenções

Notações

$\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, os índices gregos representam as coordenadas do espaço-tempo;

$i, j, k, l, m, n, \dots = 1, 2, 3$, os índices latinos representam as coordenadas espaciais;

$g_{\mu\nu}$, são as componentes do tensor métrico;

δ_{ij} , é a delta de Kronecker;

G, c, Λ , são a constante da gravitação universal, velocidade da luz no vácuo e a constante cosmológica, respectivamente.

Convenções

No formalismo tensorial, tanto para índices latinos quanto para índices gregos, distinguimos dois tipos de índices:

Índice mudo: É aquele que aparece uma vez como índice contravariante (superior) e uma vez como índice covariante (inferior) em uma expressão. Por convenção de Einstein, sobre ele se realiza uma soma implícita sobre todos os valores possíveis. Por exemplo:

$$A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^4 A^\mu B_\mu;$$

Índice livre: É aquele que aparece apenas uma vez na expressão e representa uma componente específica do vetor ou tensor. Por exemplo:

$$V^\nu = A^{\mu\nu} B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^4 A^{\mu\nu} B_\mu.$$

Aqui, μ é índice mudo e ν é índice livre.

CAPÍTULO 1

Elementos da Relatividade Geral

Neste capítulo apresentamos os fundamentos matemáticos e físicos da Relatividade Geral. O desenvolvimento teórico aqui apresentado baseia-se principalmente nas referências [9, 10, 11]. Começamos com a definição do espaço-tempo como uma variedade diferenciável equipada com uma métrica Lorentziana, na qual a conexão de Levi-Civita é construída e os tensores de curvatura associados são definidos. Em seguida, derivamos as equações de campo de Einstein a partir da ação de Einstein-Hilbert usando o método das variações.

1.1 Breve revisão sobre análise tensorial

1.1.1 Espaço-tempo, variedades diferenciáveis e a métrica

Na formulação da relatividade geral, o espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável \mathcal{M} de dimensão quatro, cuja estrutura geométrica é especificada por uma métrica pseudo-riemanniana $g_{\mu\nu}$. Essa métrica é um campo tensorial de ordem dois definido em cada ponto de \mathcal{M} , que permite calcular intervalos espaço-temporais e estabelecer relações locais de causalidade. O elemento de linha que define o intervalo entre dois eventos infinitamente próximos é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ possui algumas propriedades fundamentais. Em primeiro lugar, é simétrico em seus índices, isto é, satisfaz $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Consequentemente, em uma variedade de dimensão n , o número de componentes independentes é $n(n + 1)/2$, o que implica que, para $n = 4$, existem dez componentes independentes. Além disso, a métrica é não degenerada, de modo que seu determinante

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \quad (1.2)$$

é diferente de zero. Essa condição garante a existência da métrica inversa $g^{\mu\nu}$, definida pela relação

$$g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (1.3)$$

Finalmente, a métrica em relatividade geral é dotada de assinatura lorentziana, tipicamente escolhida como $(-, +, +, +)$ ou $(+, -, -, -)$, assegurando a distinção entre a dimensão temporal e as dimensões espaciais.

Essas propriedades caracterizam o espaço-tempo como uma variedade pseudo-riemanniana de quatro dimensões, fornecendo o arcabouço geométrico necessário para a formulação das equações de Einstein e para a descrição rigorosa dos fenômenos gravitacionais em cosmologia.

1.1.2 Tensores e derivadas covariantes

De forma geral, um tensor é um objeto matemático definido em cada ponto da variedade diferenciável \mathcal{M} , caracterizado por uma lei de transformação específica sob mudanças de coordenadas. Um tensor de tipo (r, s) é uma aplicação multilinear que associa números reais a r covetores e s vetores do espaço tangente em um ponto de \mathcal{M} .

Em um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, um tensor de tipo (r, s) pode ser representado por um conjunto de componentes $T^{\mu_1\dots\mu_r}_{\nu_1\dots\nu_s}$, os quais obedecem à lei de transformação

$$T'^{\mu_1\dots\mu_r}_{\nu_1\dots\nu_s} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_r}}{\partial x^{\alpha_r}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial x'^{\nu_s}} T^{\alpha_1\dots\alpha_r}_{\beta_1\dots\beta_s}. \quad (1.4)$$

A presença do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em \mathcal{M} permite estabelecer um isomorfismo entre o espaço tangente $T_p(\mathcal{M})$ e o espaço cotangente $T_p^*(\mathcal{M})$ em cada ponto $p \in \mathcal{M}$. Esse isomorfismo torna possível converter vetores em covetores e vice-versa, por meio das operações de abaixamento e elevação de índices.

Dado um vetor $V^\mu \in T_p(\mathcal{M})$, define-se o covetor associado $V_\nu \in T_p^*(\mathcal{M})$ pela relação

$$V_\nu = g_{\mu\nu} V^\mu. \quad (1.5)$$

Analogamente, dado um covetor $\omega_\mu \in T_p^*(\mathcal{M})$, obtém-se o vetor associado $\omega^\nu \in T_p(\mathcal{M})$ utilizando a métrica inversa $g^{\mu\nu}$:

$$\omega^\nu = g^{\mu\nu} \omega_\mu. \quad (1.6)$$

Essas operações estendem-se naturalmente a tensores de ordem superior. Por exemplo, se T^μ_ν é um tensor de tipo $(1, 1)$, então é possível construir um tensor de tipo $(0, 2)$ através

do abaixamento de um índice, ou seja,

$$T_{\sigma\nu} = g_{\mu\sigma} T^\mu{}_\nu, \quad (1.7)$$

ou um tensor de tipo $(2, 0)$ através da elevação de um índice, como em

$$T^{\mu\sigma} = g^{\sigma\nu} T^\mu{}_\nu. \quad (1.8)$$

Portanto, utilizando a métrica podemos alterar a posição dos índices de qualquer tensor de maneira consistente. Essa propriedade é essencial e será utilizada em todo trabalho sem maiores explicações.

A derivada covariante na direção i denotado por ∇_i é uma extensão da derivada usual para variedades diferenciáveis, o que nos permite derivar campos tensoriais respeitando a lei de transformação uma vez que a derivada parcial de um campo tensorial não obedece à lei de transformação de tensores sob mudanças gerais de coordenadas [11]. Esta derivada é caracterizada localmente pelos símbolos de Christoffel

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} \{ \partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu} \}, \quad (1.9)$$

que codificam como a base vetorial local varia ao longo das coordenadas. A derivada covariante de um tensor do tipo $(0, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, 2)$ ¹ em termos da conexão afim é dada por

$$\nabla_\alpha T_\beta = \partial_\alpha T_\beta - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} T_\lambda, \quad (1.10)$$

$$\nabla_\gamma T_{\alpha\beta} = \partial_\gamma T_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} T_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} T_{\lambda\alpha}, \quad (1.11)$$

$$\nabla_\gamma T^\lambda_{\alpha\beta} = \partial_\gamma T^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\sigma_{\gamma\beta} T^\lambda_{\alpha\sigma} - \Gamma^\sigma_{\gamma\alpha} T^\lambda_{\sigma\beta} + \Gamma^\lambda_{\gamma\sigma} T^\sigma_{\alpha\beta}. \quad (1.12)$$

As expressões (1.10)-(1.12) podem ser facilmente demonstradas usando a regra de transformação tensorial (1.4) e serão úteis na Seção 1.2.

1.1.3 Equação da geodésica

No espaço-tempo, as partículas livres seguem trajetórias chamadas geodésicas, cujo desvio em relação a linhas retas é causado pela presença de matéria e energia. Derivamos brevemente a equação da geodésica em um espaço-tempo curvo. O elemento de linha em um espaço-tempo curvo descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$ é dado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. A seguir,

¹A formulação geral para um tensor tipo (n, m) é encontrado na referência [10].

consideramos a ação S associada a uma partícula livre de massa m , dada por

$$S = -m \int ds = -m \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}, \quad (1.13)$$

onde, τ é um parâmetro ao longo da curva e representa o tempo próprio da partícula. Para parametrizar a trajetória da partícula, escrevemos $dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau$ e usando a regra da cadeia, obtemos que (1.13) fica escrita como

$$\delta S = -\frac{m}{2} \int d\tau \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{-1/2} \left[\delta g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right]. \quad (1.14)$$

O primeiro termo envolve a variação explícita da métrica, enquanto o segundo requer integração por partes. Desprezando os termos de contorno (isto é, assumindo que $\delta x^\mu = 0$ nas extremidades da trajetória) e reagrupando termos, de (1.14) obtemos que

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (1.15)$$

Esta é a chamada equação da geodésica, que descreve a trajetória de uma partícula livre em um espaço-tempo curvo.

1.1.4 O tensor de curvatura de Riemann

No contexto de uma variedade pseudo-Riemanniana n -dimensional equipada com uma métrica Lorentziana, a presença de curvatura é totalmente codificada no chamado tensor de Riemann, que surge naturalmente da derivada covariante e das propriedades de paralelismo do espaço-tempo.

Em coordenadas locais $\{x^\mu\}$, se denotarmos por ∂_μ as bases locais do espaço tangente, e por $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ os símbolos de Christoffel associados à conexão ∇ , então as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\rho\nu}^\lambda. \quad (1.16)$$

A expressão (1.16) contém todas as informações geométricas sobre a curvatura do espaço-tempo: um espaço (pseudo) Riemanniano é plano se e somente se $R_{\nu\rho\sigma}^\mu = 0$ em todos os pontos.

O tensor de Riemann também satisfaz uma série de simetrias fundamentais, que reduzem drasticamente o número de componentes independentes. Em particular, ele é

anti-simétrico em seus dois últimos índices

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = -R_{\nu\sigma\rho}^\mu, \quad (1.17)$$

o que implica que a troca dos índices ρ e σ inverte o sinal do tensor e a simetria de pares de índices que indica que a troca simultânea dos dois primeiros índices com os dois últimos não altera o tensor, refletindo uma propriedade de invariância geométrica da curvatura e por fim, o tensor satisfaz a primeira identidade de Bianchi, que estabelece uma relação cíclica entre três combinações dos índices e representa uma restrição geométrica do espaço-tempo

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad \nabla_\lambda R_{\beta\mu\nu}^\alpha + \nabla_\mu R_{\beta\nu\lambda}^\alpha + \nabla_\nu R_{\beta\lambda\mu}^\alpha = 0, \quad (1.18)$$

respetivamente. As (1.17) e (1.18) nos permitem calcular, por exemplo, na dimensão $n = 4$, o número de componentes independentes do tensor de Riemann é 20. Por outro lado, a partir do tensor de Riemann podem ser construídas outras grandezas geométricas fundamentais que vão ser usadas, tais como

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^\lambda, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.19)$$

e

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (1.20)$$

que são o tensor e escalar de Ricci, respectivamente. Esses tensores satisfazem a identidade diferencial

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (1.21)$$

conhecida como identidade de Bianchi contraída, a qual assegura a conservação covariante do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ na presença de matéria e energia.

1.2 Equações de campo de Einstein

As equações de campo de Einstein constituem um sistema de dez equações diferenciais parciais não lineares e acopladas para as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Estas equações descrevem como a geometria do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria e energia, codificada no tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Elas substituem a lei da gravitação de Newton nos regimes onde os efeitos relativísticos são relevantes, proporcionando uma generalização geométrica da interação gravitacional compatível com os

princípios da relatividade especial.

1.2.1 Ação de Einstein-Hilbert

A ação total de um sistema gravitacional acoplado à matéria é dada por

$$S_{\text{total}} = S_{\text{EH}} + S_{\text{mat}}, \quad (1.22)$$

onde

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (1.23)$$

é a ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica Λ e G é a constante de Newton. Por sua vez, S_{mat} representa a ação das fontes de matéria. E para obter as equações de movimento para a métrica $g_{\mu\nu}$, impõe-se que a variação total da ação seja nula sob variações arbitrárias $\delta g^{\mu\nu}$, isto é

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[(\delta \sqrt{-g}) (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g} (\delta R) \right] \quad (1.24)$$

e

$$\delta S_{\text{mat}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad \text{onde } T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.25)$$

onde $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ e usando (1.10)-(1.12) obtemos que

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\cdot\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\cdot\mu\lambda}) \quad (1.26)$$

com

$$\delta \Gamma^\lambda_{\cdot\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right). \quad (1.27)$$

Por outro lado, os termos de fronteira (ou superficiais) surgem da variação do R por meio de derivadas de $\delta \Gamma^\lambda_{\cdot\mu\nu}$, e são usualmente eliminados ao se supor que $\delta g_{\mu\nu}$ se anula na fronteira. Essa suposição é uma condição de contorno natural que assegura que todas as variações relevantes ocorram apenas no interior da região integrada. Desta forma, usando (1.24) e (1.25) em (1.22), temos que

$$\delta S_{\text{total}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (1.28)$$

Desta forma, por definição $\delta S = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}$ e pelo princípio da mínima ação, de (1.28) e usando (1.20) obtemos que

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

E elas são chamadas equações de campo e determinam a dinâmica (isto é, a forma ou evolução espaço-temporal) do campo métrico $g_{\mu\nu}$, de maneira análoga à forma como a segunda lei de Newton ou as equações de Euler-Lagrange determinam o movimento de uma partícula ou de um campo clássico.

1.2.2 Tensor energia-momento, leis de conservação e covariância

O Tensor energia-momento é um campo tensorial simétrico do tipo $(0, 2)$ definido sobre o espaço-tempo que codifica localmente as propriedades dinâmicas da matéria e os campos e representa as densidades de energia e de momento linear, bem como os fluxos de momento e as pressões internas. Em um sistema de coordenadas locais x^μ as fontes que originam o campo gravitacional são a energia e o momento de $T_{\mu\nu}$ associados às partículas que constituem o objeto astrofísico e representa o fluxo da componente μ do momento p^μ ² através de uma hipersuperfície definida pela coordenada $x^\nu = \text{constante}$. Desta forma, a componente T_{00} é o fluxo de energia $p^0 = E$ através de uma hipersuperfície de $t = \text{constante}$ (ou seja, a densidade de energia). Seguindo um raciocínio similar, T_{0i} representa o fluxo de energia p^0 na direção i , ou seja, a energia que atravessa uma hipersuperfície tridimensional definida por $x^i = \text{constante}$, cuja normal é perpendicular ao eixo x^i . Por fim, T_{ij} representa o fluxo do momento p^i que atravessam a hipersuperfície espacial definida por $x^j = \text{constante}$, correspondendo às tensões internas na direção i sobre as hipersuperfícies. Formalmente, o tensor energia-momento é definido como a variação funcional da ação da matéria em relação à métrica $g^{\mu\nu}$ do espaço-tempo escrito em (1.25) onde S_{mat} é a ação correspondente aos campos de matéria. Essa definição garante que $T_{\mu\nu}$ seja simétrico e que sua divergência covariante se anule quando os campos de matéria satisfazem suas equações de movimento derivadas da ação S_{mat} . O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ satisfaz a lei de conservação no espaço-tempo curvo, expressa pela divergência covariante nula,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.30)$$

a partir da qual pode ser obtida a equação de continuidade, que garante a conservação de energia do sistema e as equações de Euler relativistas, que descrevem a evolução do momento linear dentro do fluido. Portanto, essa equação expressa a conservação local de

²O 4-momento é definido como $p^\mu = (p^0, p^i) = (E, p^i)$.

energia e momento em um espaço-tempo curvo.

O princípio da covariância geral estabelece, que as leis físicas devem ser expressas de forma tensorial, de modo que sua validade permaneça inalterada sob difeomorfismos arbitrários da variedade, refletindo a ausência de referenciais privilegiados e a natureza dinâmica da própria métrica. A equação de Einstein (1.29) é covariante porque ambos os membros são tensores simétricos definidos sobre o espaço-tempo, e portanto transformam-se de maneira coerente sob qualquer mudança de coordenadas.

Para um fluido perfeito, $T^{\mu\nu}$ é dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

onde ρ é a densidade de energia e p a pressão. A condição (1.30) permite obter as equações da dinâmica do fluido, e projetando na direção da 4-velocidade u_ν obtém-se a equação de continuidade

$$u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p) \nabla_\mu u^\mu = 0, \quad (1.32)$$

que expressa a conservação de energia; projetando ortogonalmente a u^ν com o projetor $h^{\alpha\nu} = g^{\alpha\nu} - u^\alpha u^\nu$, obtém-se as equações de Euler relativistas

$$(\rho + p)u^\mu \nabla_\mu u^\alpha + h^{\alpha\mu} \nabla_\mu p = 0, \quad (1.33)$$

que descrevem a evolução do momento linear do fluido.

1.3 O limite newtoniano da Relatividade Geral

A Relatividade Geral é uma extensão da teoria da gravitação de Newton, portanto admite um limite newtoniano para que as equações de Einstein se reduzam às equações de Newton. Consideremos a equação da geodésica (1.15) de uma partícula livre, logo impomos as que o campo gravitacional é fraco, ou seja $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Desta forma, no regime newtoniano as velocidades são baixas e o campo gravitacional é estático, isto é $v^i = dx^i/dt \ll 1$ e $\partial_0 h_{\mu\nu} \approx 0$, respectivamente. Desse jeito, o único componente relevante da métrica é $g_{00} \approx 1 - 2\Phi$, onde Φ é o potencial gravitacional. No regime não-relativístico, o tempo próprio e o tempo coordenado coincidem aproximadamente, ou seja $d\tau \approx dt$, e os termos envolvendo produtos de velocidades espaciais são desprezíveis frente aos termos temporais. Assim, a equação geodésica para $\mu = i$ se reduz a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{dt} \right)^2 = 0. \quad (1.34)$$

Como $x^0 = t$, temos $dx^0/dt = 1$, e portanto (1.34) reduz-se a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i. \quad (1.35)$$

Para calcular Γ_{00}^i , usamos a definição dos símbolos de Christoffel na aproximação linear:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\alpha h_{\nu\beta} + \partial_\beta h_{\nu\alpha} - \partial_\nu h_{\alpha\beta}). \quad (1.36)$$

Tomando $\mu = i$ e $\alpha = \beta = 0$, e da hipótese de campo estático ($\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$) e usando $h_{00} = -2\Phi$, (1.36) torna-se a

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\eta^{ij}(\partial_0 h_{j0} + \partial_0 h_{j0} - \partial_j h_{00}) = -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_j h_{00} = \eta^{ij}\partial_j\Phi, \quad (1.37)$$

e portanto, acoplando (1.35) e (1.37) a equação de movimento é expresso como

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\nabla\Phi. \quad (1.38)$$

Esta é precisamente a equação de movimento newtoniana para uma partícula sob a influência de um potencial gravitacional escalar Φ , satisfazendo a equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.39)$$

Portanto, no regime de campos fracos, velocidades baixas e fontes não-relativísticas, o movimento das partículas de prova é regido pela equação de Newton com um potencial gravitacional Φ que satisfaz a equação de Poisson. Este resultado confirma que a relatividade geral recupera corretamente a dinâmica gravitacional clássica no limite newtoniano.

CAPÍTULO 2

Cosmologia Padrão

Na relatividade especial a métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é a métrica que descreve um universo estático com curvatura nula em todos os pontos do espaço. Entretanto, observações cosmológicas indicam que o universo real está se expandindo. Assim, neste capítulo vamos nos centrar no estudo de um universo de curvatura espacial nula, incorporando a expansão cósmica em um marco relativístico, descrita pela métrica FLRW escrita em coordenadas cartesianas comóveis e tempo cósmico nos baseando em [9, 1]. Isto estabelecerá a base para o capítulo posterior.

2.1 O princípio cosmológico, a lei de Hubble e a métrica de FLRW

Um dos postulados fundamentais da cosmologia moderna é o *princípio cosmológico*, o qual estabelece que, em escalas suficientemente grandes (da ordem de centenas de megaparsecs), o universo pode ser descrito como um sistema físico cujo espaço e distribuição de matéria e energia é homogênea e isotrópica o que implica que não existe uma direção nem uma localização privilegiada no universo e que, em cada instante do tempo cosmológico t , o espaço é invariante sob translações (homogeneidade) e rotações (isotropia) espaciais. As observações cosmológicas indicam que o universo está em expansão e se estabelece que as galáxias se afastamumas das outras. Esta expansão é descrita por um fator de escala a que faz com que as distâncias físicas entre objetos em repouso dentro da estrutura de grande escala aumentem continuamente com o tempo. Para formalizar essa noção, introduz-se o conceito de distância comóvel que permanece constante para observadores que se movem juntamente com a expansão do universo. A distância física $d_{\text{fís}}$ correspondente a uma distância comóvel d_{com} é dada por

$$d_{\text{fís}} = a d_{\text{com}}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, a velocidade de recessão v em um tempo t é proporcional à sua distância $d_{\text{fís}}$ e resultado da expansão do espaço do universo e dada pela relação conhecida como a lei de Hubble, que é expressa como $v = H d_{\text{fís}}$ onde H é chamado parâmetro de Hubble definido por $H \equiv \dot{a}/a$ que descreve a taxa de expansão do universo e seu valor atual, denotado por H_0 , é conhecido como a constante de Hubble.

Não obstante, o princípio cosmológico permite a construção de modelos baseados em soluções exatas das equações de Einstein e a métrica compatível com esse princípio é a métrica de FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker), que é expressa como

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.2)$$

onde k é o parâmetro da curvatura do espaço, que pode assumir os valores $k = 0$ (espaço plano), $k = +1$ (espaço fechado) ou $k = -1$ (espaço aberto). Para construir o elemento de linha e a métrica de nosso interesse, começamos com um espaço-tempo plano e estático, onde a geometria é descrita pela métrica de Minkowski, e o seu elemento de linha é

$$ds^2 = dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.3)$$

onde δ_{ij} representa a métrica euclidiana do espaço tridimensional. A métrica total $\eta_{\mu\nu}$ que descreve este espaço-tempo plano é invariante sob as transformações do grupo de Poincaré ¹. Desta maneira, substituímos os deslocamentos espaciais diferenciais dx^i por $a(t) dx^i$. Portanto, o elemento de linha se torna

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.4)$$

Essa expressão corresponde a uma métrica dinâmica e espacialmente plana, adequada à descrição de um universo homogêneo, isotrópico e em expansão. Então a métrica resultante tem a forma

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \quad \text{e} \quad g_{ij} = -a^2 \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Por outro lado, a evolução da densidade de energia ρ é dada por (1.32), que é obtida pela conservação da energia-momento em um universo homogêneo e isotrópico,

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.6)$$

onde ρ está em função do fator de escala $a(t)$. Dessa forma, de acordo com a equação de estado,

$$p = w \rho, \quad (2.7)$$

¹Para uma discussão mais detalhada das propriedades algébricas do grupo de Poincaré, veja [12].

onde a pressão p para cada componente do universo é

$$\text{Poeira (matéria não relativística): } w = 0 \Rightarrow p_m = 0, \quad (2.8)$$

$$\text{Radiação: } w = \frac{1}{3} \Rightarrow p_r = \frac{\rho_r}{3}, \quad (2.9)$$

$$\text{Constante cosmológica: } w = -1 \Rightarrow p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (2.10)$$

Portanto, a densidade de energia para cada universo evolui como

$$\text{Poeira (matéria não relativística): } \rho_m(a) = \rho_{m0} a^{-3}, \quad (2.11)$$

$$\text{Radiação: } \rho_r(a) = \rho_{r0} a^{-4}, \quad (2.12)$$

$$\text{Constante cosmológica: } \rho_\Lambda(a) = \rho_{\Lambda0}. \quad (2.13)$$

O comportamento de ρ é ilustrado na [Figura 2.1](#).

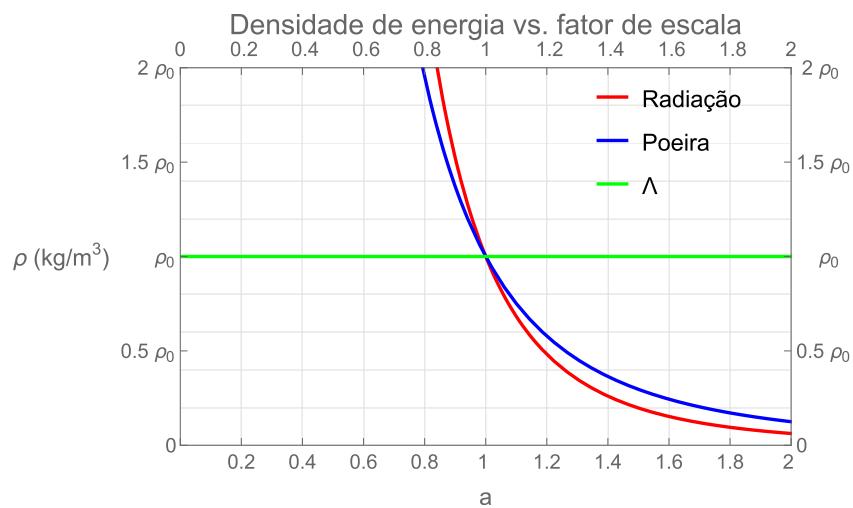


Figura 2.1: Comportamento da densidade de energia para um universo dominado por poeira, radiação e Λ em função do fator de escala.

2.2 Equações de Friedmann

A equação de Friedmann é uma equação relativista que descreve a evolução temporal do fator de escala em um universo homogêneo e isotrópico. Para obter tais equações, partimos das equações de campo de Einstein decompondo (1.29) mas com assinatura $(+, -, -, -)$, em três conjuntos de componentes independentes correspondentes as componentes temporal-temporal, temporal-espacial e espacial-espacial, respectivamente, ou seja

$$G_0^0 = 8\pi G T_0^0 + \Lambda, \quad G_i^0 = 8\pi G T_i^0 \quad \text{e} \quad G_j^i = 8\pi G T_j^i - \delta_j^i a^2 \Lambda. \quad (2.14)$$

Por meio de (2.5) e (1.9) temos que os símbolos de Christoffel não nulos são

$$\Gamma_{ij}^0 = a^2 \mathcal{H} \delta_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \mathcal{H} \delta_j^i. \quad (2.15)$$

E através de (2.15), (1.19), temos que as componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{e} \quad R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (2.16)$$

E usando (1.19), obtemos que o escalar de Ricci é

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Desta forma, de (1.20) obtemos que as componentes não nulas do tensor de Einstein são

$$G_0^0 = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad \text{e} \quad G_j^i = \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \delta_j^i. \quad (2.18)$$

Por último, considerando um fluido perfeito, para obter as componentes de $T_{\alpha\beta}$ usamos (1.31), onde $u_\alpha = (a, 0, 0, 0)$. Assim, elevando o primeiro índice com (2.5), temos que

$$T_0^0 = \rho \quad \text{e} \quad T_j^i = -p \delta_j^i. \quad (2.19)$$

Assim, substituindo em (2.18) e (2.19) em (2.14) e lembrando a definição do parâmetro de Hubble obtemos que as equações de Friedmann para um universo com curvatura espacial nula, é

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.20)$$

e

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p) + \Lambda. \quad (2.21)$$

A primeira equação prevê como o universo se expande ao longo do tempo sabendo a densidade total ρ dependente do conteúdo dominante do universo. A segunda equação de Friedmann prevê como a aceleração da expansão do universo muda em função da densidade de energia e da pressão do conteúdo do universo.

Além de determinar a evolução da energia e da pressão do conteúdo do universo, o modelo permite reconstruir sua história térmica e causal, incluindo eventos fundamentais como o Big Bang, a inflação e a recombinação. A partir dessa descrição, é possível estimar a idade do universo e analisar seus possíveis cenários de evolução futura, como a expansão acelerada ou o colapso gravitacional. O modelo também descreve as transições

de dominância entre os diferentes componentes cosmológicos, como radiação, matéria e energia escura.

2.3 Modelos cosmológicos

Para resolver (2.20) devemos usar (2.11), (2.12) e (2.13). Desta forma, para um universo dominado apenas por poeira, radiação e energia associada a Λ , a solução de (2.20) para cada uma das componentes é:

$$a = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad a = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad a = \exp \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} (t - t_0) \right]. \quad (2.22)$$

A Figura 2.2 mostra a evolução do fator de escala $a(t)$, com expansão desacelerada em universos dominados por poeira e radiação, e expansão acelerada exponencial em um universo dominado pela constante cosmológica Λ . A densidade de energia em função do

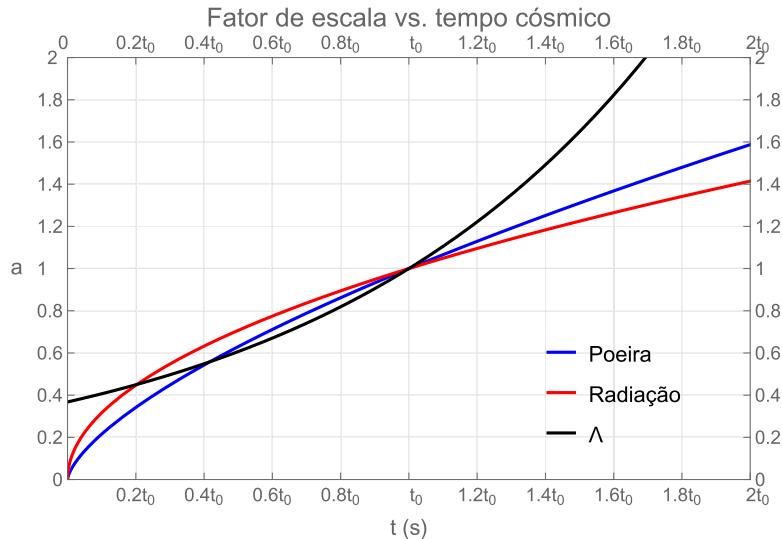


Figura 2.2: Comportamento do fator de escala para um universo dominado por poeira, radiação e Λ em função do tempo cósmico.

tempo cósmico é dada pela solução da equação da continuidade, de modo que, para cada componente do universo, tem-se

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} \left(\frac{t_0}{t} \right)^2, \quad \rho_r(t) = \rho_{r0} \left(\frac{t_0}{t} \right)^2, \quad \rho_\Lambda(t) = \rho_{\Lambda0}. \quad (2.23)$$

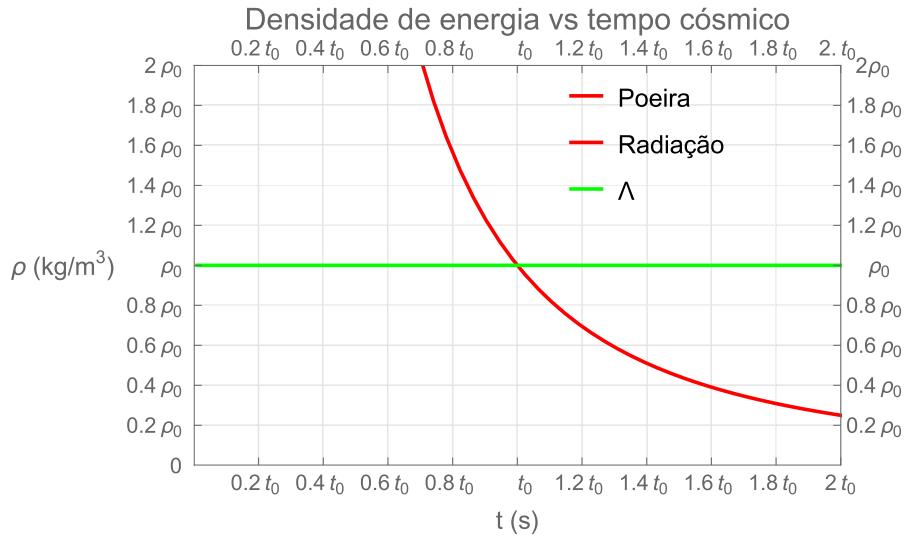


Figura 2.3: Comportamento da densidade de energia para um Universo dominado por poeira, radiação e Λ em função do tempo cósmico.

Dessa forma, o parâmetro de Hubble em função do tempo cósmico para cada componente do universo se expressa como

$$H_m = \frac{2}{3t}, \quad H_r = \frac{1}{2t}, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (2.24)$$

A Figura 2.4 mostra a evolução do parâmetro de Hubble para diferentes componentes do universo². Em universos dominados por poeira e radiação, H decresce com o tempo, refletindo a desaceleração da expansão. Já em um universo dominado pela constante cosmológica, H permanece constante com o tempo, o que implica que a expansão do universo acelera continuamente, crescendo de forma exponencial.

No entanto, (2.6) e (2.20) por si só não fixam os valores numéricos da taxa de expansão e da densidade de energia atual.

2.4 Parâmetros cosmológicos

O valor do parâmetro de Hubble H no tempo atual t_0 é denominado constante de Hubble $H_0 = H(t_0)$ e nos indica a taxa de expansão atual do universo, tornando-se assim um parâmetro cosmológico fundamental, dado que muitas medições de outras propriedades do universo dependem diretamente do seu valor. H_0 obedece à lei de Hubble, portanto medi-la consiste em medir com precisão as velocidades de recessão e distâncias físicas de um conjunto de galáxias. A velocidade de recessão é obtida a partir do deslocamento para o vermelho das linhas espectrais, que atualmente é suficientemente precisa para

²Consideramos $1 \text{ s}^{-1} = 3.1 \times 10^{19} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

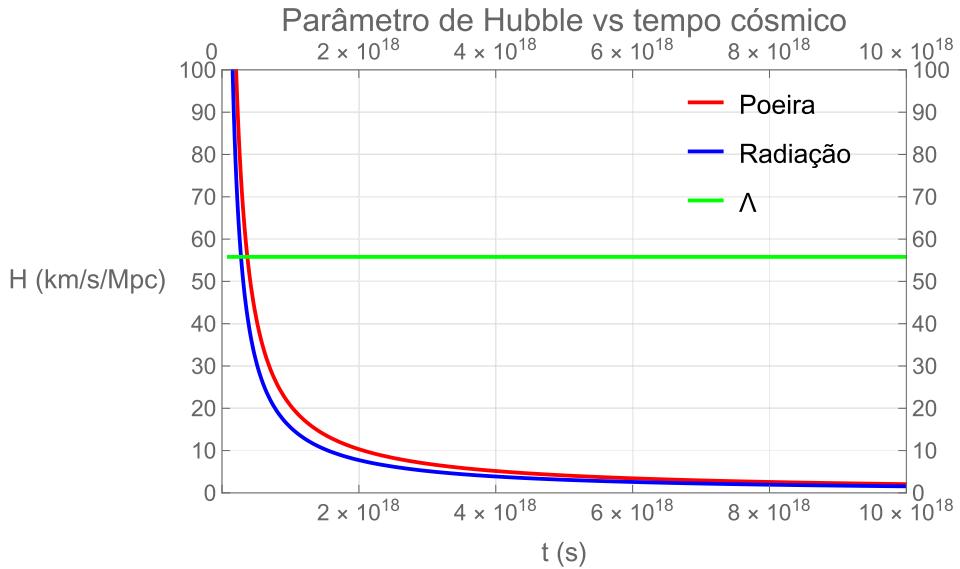


Figura 2.4: Comportamento do parâmetro de Hubble para um universo dominado por poeira, radiação e Λ em função do tempo cósmico

determinar a velocidade de recessão de uma galáxia com alta exatidão. Para galáxias muito distantes (dezenas de megaparsecs), a velocidade de recessão é muito maior que a velocidade peculiar, por isso podemos ignorar a velocidade peculiar e assumir que a velocidade que medimos provém quase completamente da expansão do universo.

O valor da constante de Hubble não é conhecido de forma exata, por isso costuma ser parametrizado mediante um número adimensional h de maneira que

$$H_0 = 100h \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \quad (2.25)$$

Esta parametrização permite expressar a constante de Hubble H_0 de forma geral, separando a incerteza sobre seu valor exato no fator h . Na década de 1990, o Projeto Chave do Telescópio Espacial Hubble [13], deu

$$h = 0.72 \pm 0.08, \quad (2.26)$$

onde o “ ± 0.08 ” indica a incerteza típica da medição.

O parâmetro de densidade denotado por Ω , definido como o quociente entre a densidade de energia de um componente específico do conteúdo do universo e a densidade correspondente à curvatura espacial nula, permite reescrever a equação de Friedmann (2.20) de maneira normalizada. Tal reformulação não apenas simplifica a análise qualitativa das soluções, como também fornece uma conexão direta com os dados cosmológicos atuais, facilitando a distinção entre diferentes regimes dinâmicos e a dominância da matéria, da radiação e da constante cosmológica. É uma forma muito útil de especificar a

densidade do universo, que expressa a densidade do universo relativa a um valor de referência e indica quanto perto está a densidade real do universo da densidade de referência necessária para que a geometria espacial do universo seja plana ($k = 0$). Essa densidade de referência é denominada densidade crítica e é denotada por ρ_c , sendo definida a partir da equação de Friedmann para um universo plano como

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.27)$$

A partir disso, o parâmetro de densidade é definido formalmente como

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.28)$$

E de (2.25), a densidade crítica é

$$\rho_{c0} = 1.88 h^2 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (2.29)$$

Da definição do parâmetro de densidade (2.28) e (2.20) podemos definir o parâmetro de densidade associado à constante cosmológica como

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda/(8\pi G)}{3H^2/(8\pi G)} = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.30)$$

o qual pode assumir valores positivos ou negativos. Neste contexto, a equação de Friedmann pode ser escrita de forma compacta como

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1. \quad (2.31)$$

Além disso, permite reformular a equação de Friedmann em termos de parâmetros de densidade atuais, o que favorece uma interpretação mais clara da dinâmica do universo e sua relação com as observações cosmológicas,

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda0} \quad (2.32)$$

em que a seguinte condição é satisfeita

$$\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda0} = 1, \quad (2.33)$$

onde

$$\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{c0}}, \quad \Omega_{r0} = \frac{\rho_{r0}}{\rho_{c0}}, \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (2.34)$$

Para um universo dominado só por matéria, radiação e constante cosmológica Λ , a equação (2.32) para cada uma delas ficam

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{m0}a^{-3}, \quad \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{r0}a^{-4} \quad \text{e} \quad \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{\Lambda0}. \quad (2.35)$$

Resolvendo as três equações dadas em (2.35), obtemos que

$$a(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m0}} H_0 t\right)^{2/3}, \quad a(t) = \left(2\sqrt{\Omega_{r0}} H_0 t\right)^{1/2} \quad \text{e} \quad a(t) = \exp\left(\sqrt{\Omega_{\Lambda0}} H_0 t\right). \quad (2.36)$$

Para um universo dominado pela matéria e constante cosmológica Λ , (2.32) fica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda0}\right), \quad (2.37)$$

onde $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$. Resolvendo (2.37) para $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$ temos que

$$a = \left(\frac{\Omega_{m0}}{1 - \Omega_{m0}}\right)^{1/3} \operatorname{senh}^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \Omega_{m0}} H_0 t\right) \quad (2.38)$$

e

$$a = \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0} - 1}\right)^{1/3} \operatorname{sen}^{2/3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{m0} - 1} H_0 t\right), \quad (2.39)$$

respectivamente. Como ilustrado na [Figura 2.5](#), um universo com $\Omega_{m0} < 1$ (aberto) expande-se indefinidamente de forma crescente, seguindo a solução hiperbólica da equação de Friedmann, enquanto um universo com $\Omega_{m0} > 1$ (fechado) atinge um máximo antes de iniciar sua recessão, refletindo como a densidade de matéria determina o destino dinâmico do universo.

O modelo Λ CDM (Lambda-Cold Dark Matter) corresponde ao modelo cosmológico padrão que melhor descreve o universo, no qual a expansão é governada pela combinação de radiação, matéria e a constante cosmológica. Este modelo explica corretamente as principais medições observáveis do universo como a radiação cósmica de fundo, a formação de estruturas em larga escala e a expansão acelerada do universo. Os valores atuais para os parâmetros cosmológicos foram obtidos a partir das observações do fundo cósmico de micro-ondas realizadas pelo satélite Planck [14] em 2020, sendo

$$\Omega_\Lambda = 0.6889 \pm 0.0056, \quad \Omega_{m0} = 0.3158 \pm 0.0073, \quad (2.40)$$

$$\Omega_{r0} \sim 10^{-5}, \quad H_0 = 67.4 \pm 0.5 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}.$$

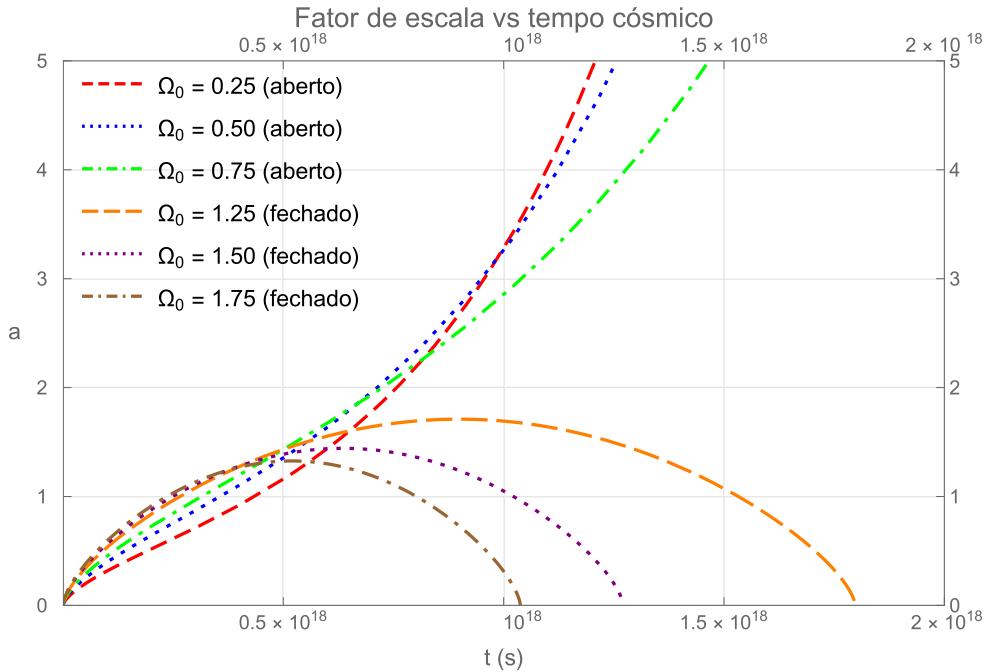


Figura 2.5: Comportamento do fator de escala para um universo dominado por poeira e Λ (positivo e negativo), em função do tempo cósmico.

Essa abordagem permite analisar a evolução do fator de escala considerando simultaneamente as contribuições da radiação, da matéria e da energia escura. Em particular, a radiação domina a dinâmica do universo nos estágios iniciais ($a \ll 1$), a matéria domina nos estágios intermediários e a energia escura determina a expansão acelerada observada no presente. Assim, o modelo Λ CDM incluindo radiação fornece uma descrição consistente de todas as eras cosmológicas.

Por outro lado, determinar a idade do universo é um dos problemas fundamentais da cosmologia moderna e é definido como o tempo decorrido desde o Big Bang até o presente. A idade do universo é calculada a partir da equação de Friedmann (2.32) para um universo homogêneo e isotrópico, expressa em termos dos parâmetros de densidade atual da matéria, radiação e o parâmetro de densidade associado à constante cosmológica para um universo com curvatura espacial nula.

$$t_{\text{idade do universo}} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{r0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda0} a^4 \right)}} da. \quad (2.41)$$

Embora não exista solução analítica para a equação (2.41), ela pode ser integrada numericamente. A partir da integração numérica da equação de Friedmann normalizada em termos dos parâmetros de densidade atuais, obtém-se que a idade do universo no modelo

Λ CDM é

$$t_{\text{idade do universo}} \approx 4.36 \times 10^{17} \text{ s} \approx 13.8 \text{ bilhões de anos.} \quad (2.42)$$

CAPÍTULO 3

Perturbações Cosmológicas

Como foi desenvolvido nos [Capítulo 1](#) e [Capítulo 2](#), a Relatividade Geral fornece o marco teórico para descrever a geometria do espaço-tempo através das equações de Einstein, enquanto o modelo FLRW constitui uma descrição cosmológica fundamental para um universo homogêneo e isotrópico. No entanto observações em escalas inferiores a 100 Mpc revelam um universo estruturado, com galáxias, aglomerados, superaglomerados, vazios e filamentos. Estas estruturas emergem de flutuações primordiais na densidade de matéria, onde regiões sobredensas atraem gravitacionalmente matéria circundante, amplificando a perturbação inicial através do mecanismo de instabilidade gravitacional. Em um universo estático, este processo levaria a um colapso exponencial [15], mas em um universo em expansão, a dinâmica é modulada pela expansão cósmica, que atenua o crescimento das perturbações.

Este capítulo desenvolve o formalismo para a evolução de perturbações cosmológicas [1], estabelecendo a base teórica para perturbar a métrica FLRW, classificando as perturbações em modos escalares, vetoriais e tensoriais, introduzindo o conceito de invariância de gauge com as variáveis de Bardeen, linearizando as equações de Einstein para obter as equações dinâmicas de evolução, e discutindo o papel da inflação cósmica como mecanismo gerador de perturbações primordiais.

3.1 Instabilidade gravitacional

O modelo FLRW descreve um universo ideal com um espaço-tempo homogêneo e isotrópico em expansão e uma distribuição de matéria perfeitamente homogênea e isotrópica em todas as escalas espaciais. No entanto, é válido apenas em grandes escalas, ou seja em pequenas escalas, menores que 100 Mpc, o universo não é homogêneo nem isotrópico, e isso se manifesta na presença de galáxias, aglomerados, superaglomerados, vazios, filamentos, etc.

Variações locais na densidade da matéria em relação ao seu valor médio são chamadas de flutuações. Portanto, em pequenas escalas as flutuações na densidade da matéria são muito grandes e em grandes escalas as amplitudes das flutuações diminuem. Uma pequena superdensidade exerce uma força gravitacional adicional sobre a matéria circundante. Consequentemente, a perturbação aumenta e, por sua vez, gera uma atração gravitacional maior. Em um fundo não expansivo, isso levaria a uma instabilidade exponencial. No entanto, em um universo em expansão, esse aumento na atração é parcialmente neutralizado pela expansão cósmica. As medições da radiação cósmica de fundo (CMB) indicam que, na época da recombinação, o universo era extremamente homogêneo e isotrópico (com flutuações da ordem de $\sim 10^{-4}$) em todas as escalas até o horizonte observável atual [16, 17]. No entanto, atualmente o universo apresenta uma estrutura não linear, manifestando-se sob a forma de aglomerados de galáxias e, em escalas maiores, de vazios, lâminas e filamentos. Por outro lado, estudos do desvio para o vermelho mostram que em escalas cosmológicas suficientemente grandes as não homogeneidades na distribuição da densidade permanecem pequenas em comparação com a densidade média.

A métrica FLRW possui simetria espacial homogênea e isotrópica, ou seja, admite transformações sob as quais a métrica permanece invariante. Em outras palavras, devido à homogeneidade, a métrica é simétrica sob translações espaciais; e devido à isotropia, é simétrica sob rotações espaciais.

Assim, as não homogeneidades e anisotropias na distribuição da matéria induzem perturbações na métrica, a métrica total $g_{\alpha\beta}$ do espaço-tempo é expressa como a soma da métrica de fundo, denotada por ${}^{(0)}g_{\alpha\beta}$, e uma pequena perturbação $\delta g_{\alpha\beta}$ representando os desvios em relação à métrica de fundo, ou seja,

$$g_{\alpha\beta} = {}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}, \quad (3.1)$$

onde $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$. Na Relatividade Geral o campo gravitacional é determinado pelas equações (1.29), já que os efeitos não lineares são desprezíveis expandimos ate primeira ordem e usando (1.20), mas, por conveniência, trabalharemos com a forma mista temos que

$$\delta G^\alpha_\beta = 8\pi G \delta T^\alpha_\beta, \quad (3.2)$$

com $\delta G^\alpha_\beta = \delta R^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \delta R$. No estudo das perturbações lineares, é fundamental compreender que as quantidades perturbadas, como a densidade de energia ε , o 4-vetor velocidade do fluido u_α e o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, não são invariantes sob transformações infinitesimais de coordenadas, chamadas de transformações de calibre. Dessa forma, usando (A-92)

para a densidade de energia e pressão temos

$$\delta\varepsilon \rightarrow \delta\tilde{\varepsilon} = \delta\varepsilon - \varepsilon_{0,\alpha}\xi^\alpha, \quad \delta p \rightarrow \delta\tilde{p} = \delta p - p_{0,\alpha}\xi^\alpha. \quad (3.3)$$

Onde denotamos $\partial_\alpha A = A_{,\alpha}$. E para o 4-vetor velocidade $u_\alpha = {}^{(0)}u_\alpha + \delta u$ e a métrica $g_{\alpha\beta} = {}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$, empregando (A-93) e (A-91) respetivamente, temos que

$$\delta u_\alpha \rightarrow \delta\tilde{u}_\alpha = \delta u_\alpha - {}^{(0)}u_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}u_{,\gamma}\xi_{,\alpha}^\gamma, \quad (3.4)$$

$$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow \delta\tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - {}^{(0)}g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}\xi_{,\alpha}^\gamma - {}^{(0)}g_{\alpha\gamma}\xi_{,\beta}^\gamma. \quad (3.5)$$

Podemos classificar as perturbações de acordo com seu comportamento sob as simetrias espaciais do universo de Friedmann. Elas se classificam em escalares, vetoriais e tensoriais. Essa classificação é essencial para identificar os graus de liberdade físicos e construir um formalismo simplificado, porém completo, para perturbações lineares.

A perturbação da componente temporal-temporal δg_{00} é puramente escalar; portanto, comporta-se como um campo escalar sob o grupo de isometrias espaciais do fundo FLRW e pode ser expressa em termos de funções escalares

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi, \quad (3.6)$$

onde ϕ é um 3-escalar. As componentes δg_{0i} se comportam como um campo vetorial. Assim, pelo teorema de Helmholtz, podem ser decompostas como a soma do gradiente espacial de um campo escalar B e de um campo vetorial S_i com divergência nula, ou seja,

$$\delta g_{0i} = a^2(B_{,i} + S_i), \quad (3.7)$$

onde $B_{,i}$ ¹ é o componente longitudinal vetorial e S_i é um vetor que satisfaz $S_{,i}^i = 0$ (a divergência espacial nula), ou seja, S^i é um campo vetorial transversal. Dessa forma, a perturbação da componente δg_{0i} contém tanto uma parte escalar quanto uma parte vetorial. As componentes δg_{ij} se comportam como um campo tensorial e podem ser decompostas como a soma

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \quad (3.8)$$

onde ψ e E são campos escalares. F_i é um campo vetorial satisfaz a condição $F_{,i}^i = 0$ (isto é, a divergência espacial de F_i é nula), ou seja, F_i é um campo vetorial transversal. h_{ij} é um tensor que satisfaz as seguintes condições: $h_i^i = 0$ (traço nula), eliminando a parte escalar, e $h_{j,i}^i = 0$ (divergência espacial nula), eliminando a parte vetorial de h_{ij} ,

¹Neste capítulo · indicará d/dt e ' indicará $d/d\eta$.

e restando apenas os modos tensoriais físicos. E o elemento de linha para perturbações escalares, vetoriais e tensoriais são

$$ds^2 = a^2 \left[(1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta - ((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j \right], \quad (3.9)$$

$$ds^2 = a^2 \left[d\eta^2 + 2S_i dx^i d\eta - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i}) dx^i dx^j \right], \quad (3.10)$$

$$ds^2 = a^2 \left[d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (3.11)$$

respectivamente.

3.2 Variáveis invariantes de calibre

Sabemos que o 4-vetor infinitesimal ξ^α pode ser escrito como $\xi^\alpha \equiv (\xi^0, \xi^i)$. Aplicando o teorema de Helmholtz, podemos decompor o campo vetorial contravariante infinitesimal ξ^i em duas partes, uma parte transversal e outra longitudinal, ou seja

$$\xi^i = \xi_\perp^i + \zeta^{,i}, \quad (3.12)$$

onde ξ_\perp^i é um campo vetorial com divergência nula, ou seja, $\xi_{\perp,i}^i = 0$, ζ é uma função escalar e $\zeta^{,i}$ é o gradiente do campo escalar ζ . Agora, lembrando as componentes da métrica de fundo ${}^{(0)}g_{00} = a^2(\eta)$, ${}^{(0)}g_{i0} = {}^{(0)}g_{0i} = 0$ e ${}^{(0)}g_{ij} = -a^2(\eta)\delta_{ij}$, usando a lei de transformação de calibre (3.5) se-obtem que

$$\delta\tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a(a\xi^0)', \quad (3.13)$$

$$\delta\tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2 [\xi_{\perp,i}^i + (\zeta' - \xi^0)_{,i}], \quad (3.14)$$

$$\delta\tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} - a^2 \left[2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\xi^0 + 2\zeta_{,ij} + (\xi_{\perp,i,j} + \xi_{\perp,j,i}) \right]. \quad (3.15)$$

Podemos obter as leis de transformação de calibre para as perturbações escalares, vetoriais e tensorial usando as leis de transformação de calibre definidas sobre o tensor métrico. Substituindo as expressões da parte temporal-espacial e espacial-espacial da métrica perturbada $\delta g_{\alpha\beta}$, ou seja, δg_{0i} e δg_{ij} dadas em (3.6) (3.7) e (3.8) nas expressões de $\delta\tilde{g}_{0i}$ e $\delta\tilde{g}_{ij}$ dadas nas equações (3.13), (3.14) e (3.15), obtemos as transformações de calibre para as

demais perturbações escalares ψ , B , E , vetoriais S_i , F_i e tensorial h_{ij} , que são dadas por

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi + \frac{1}{a}(a\xi^0)', \quad \psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \quad (3.16)$$

$$B \rightarrow \tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0, \quad E \rightarrow \tilde{E} = E + \zeta, \quad (3.17)$$

$$S_i \rightarrow \tilde{S}_i = S_i + \xi'_{\perp i}, \quad F_i \rightarrow \tilde{F}_i = F_i + \xi_{\perp i}, \quad (3.18)$$

$$h_{ij} \rightarrow \tilde{h}_{ij} = h_{ij}. \quad (3.19)$$

Dessa forma, apenas ξ^0 e ζ contribuem para as transformações de calibre das perturbações escalares, e ao escolhê-las adequadamente, podemos fazer com que duas das quatro funções ψ, ϕ, B, E desapareçam. As combinações lineares invariantes de calibre mais simples das funções ϕ, ψ, B e E , que abrangem o espaço bidimensional das perturbações físicas, são:

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]' \quad \text{e} \quad \Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E') \quad (3.20)$$

denominadas variáveis de Bardeen [2]. Mas existe um número infinito de variáveis invariantes de calibre diferentes, já que qualquer combinação de variáveis invariantes de calibre também será uma variável invariante de calibre.

Para as perturbações vetoriais, tem-se que

$$\bar{V}_i = S_i - F'_i. \quad (3.21)$$

No calibre Newtoniano temos que

$$\delta g_{00}^{\text{esc}} = 2a^2\phi, \quad \delta g_{0i}^{\text{esc}} = 0, \quad \delta g_{ij}^{\text{esc}} = 2a^2\psi\delta_{ij}, \quad (3.22)$$

$$\delta g_{00}^{\text{vet}} = 0, \quad \delta g_{0i}^{\text{vet}} = a^2S_i, \quad \delta g_{ij}^{\text{vet}} = a^2(F_{i,j} + F_{j,i}), \quad (3.23)$$

$$\delta g_{00}^{\text{ten}} = 0, \quad \delta g_{0i}^{\text{ten}} = 0, \quad \delta g_{ij}^{\text{ten}} = a^2h_{ij}. \quad (3.24)$$

3.3 Perturbação das equações de Einstein

Empregando a regra de transformação de calibre (A-94) se-obtém que

$$\overline{\delta G}_0^0 = \delta G_0^0 - (({}^{(0)}G_0^0)'(B - E')), \quad (3.25)$$

$$\overline{\delta G}_i^0 = \delta G_i^0 - \left({}^{(0)}G_0^0 - \frac{1}{3}{}^{(0)}G_k^k \right) (B - E')_{,i}, \quad (3.26)$$

$$\overline{\delta G}_j^i = \delta G_j^i - (({}^{(0)}G_j^i)'(B - E')), \quad (3.27)$$

e a mesma estrutura e para $\overline{\delta T}_\beta^\alpha$. Então, no calibre newtoniano os segundos termos das transformações de calibre do $\overline{\delta G}_\beta^\alpha$ (3.25)-(3.27) e do $\overline{\delta T}_\beta^\alpha$ são anulados, de esta forma considerando nossa equação de Einstein (3.2) para perturbações são dadas por

$$\overline{\delta G}_\beta^\alpha = 8\pi G \overline{\delta T}_\beta^\alpha \quad (3.28)$$

onde $\overline{\delta G}_\beta^\alpha = \delta G_\beta^\alpha$ e $\overline{\delta T}_\beta^\alpha = \delta T_\beta^\alpha$. Também, (3.28) podem se-dividir em 3 blocos, ou seja

$$\overline{\delta G}_\beta^\alpha \text{ esc} = 8\pi G \overline{\delta T}_\beta^\alpha \text{ esc}, \quad \overline{\delta G}_\beta^\alpha \text{ vet} = 8\pi G \overline{\delta T}_\beta^\alpha \text{ vet} \quad \text{e} \quad \overline{\delta G}_\beta^\alpha \text{ ten} = 8\pi G \overline{\delta T}_\beta^\alpha \text{ ten}. \quad (3.29)$$

Aplicando as expressões das componentes do tensor de Einstein dadas em (B-122)-(B-130) mas em termos das variáveis invariantes de calibre no calibre newtoniano onde $\phi = \Phi$, $\psi = \Psi$, $S_i - F'_i = \overline{V}_i$ nossas equações para perturbações escalares, vetoriais e tensoriais são dadas por,

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \delta T_0^0 \text{ esc}, \quad (3.30)$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}_i^0 \text{ esc}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & \left((2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}(\Phi + 2\Psi)' + \Psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi) \right) \delta_j^i + \\ & - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,kj} \delta^{ik} = -4\pi G a^2 \overline{\delta T}_j^i \text{ esc}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\Delta \overline{V}_i = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}_i^0 \text{ vet}, \quad (3.33)$$

$$\left\{ [\overline{V}_{k,j} + \overline{V}_{j,k}]' + 2\mathcal{H}[\overline{V}_{k,j} + \overline{V}_{j,k}] \right\} \delta^{ik} = -16\pi G a^2 \overline{\delta T}_j^i \text{ vet}, \quad (3.34)$$

$$(h_{kj}'' + 2\mathcal{H}h'_{kj} - \Delta h_{kj}) \delta^{ik} = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}_j^i \text{ ten}. \quad (3.35)$$

As equações (3.30)-(3.35) são as equações de Einstein para perturbações com fonte geral.

3.3.1 Perturbação do setor de matéria

Considerando o tensor energia-momento $T_\beta^\alpha = g^{\alpha\lambda} T_{\lambda\beta}$ e separando cada termo como a soma de uma parte de fundo e parte perturbada e considerando só termos ate primeira ordem temos que

$$\delta T_\beta^\alpha = {}^{(0)}g^{\alpha\lambda} \delta T_{\lambda\beta} + \delta g^{\alpha\lambda} {}^{(0)}T_{\lambda\beta} \quad (3.36)$$

onde sabemos que

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} \quad (3.37)$$

Para obter $\delta T_{\alpha\beta}$ separamos cada termo como a soma de uma parte de fundo e parte perturbada e considerando termos ate primeira ordem, temos que

$$\delta T_{\alpha\beta} = (\delta\varepsilon + \delta p) {}^{(0)}u_\alpha {}^{(0)}u_\beta + (\varepsilon_0 + p_0) \left({}^{(0)}u_\alpha \delta u_\beta + \delta u_\alpha {}^{(0)}u_\beta \right) - p_0 \delta g_{\alpha\beta} - \delta p {}^{(0)}g_{\alpha\beta}, \quad (3.38)$$

então, no fundo FLRW e para um fluido perfeito e logo substituindo em (3.36), obtemos que

$$\delta T_0^0 = \delta\varepsilon, \quad \delta T_0^i = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\delta u_i \quad \text{e} \quad \delta T_j^i = -\delta p \delta_j^i \quad (3.39)$$

e considerando as transformações de calibre da densidade de energia (3.3), pressão (3.3) e 4-velocidade (3.4), no calibre newtoniano as componentes de $\overline{\delta T}_\beta^\alpha$ ficam como

$$\overline{\delta T}_0^0 = \overline{\delta\varepsilon}, \quad \overline{\delta T}_i^0 = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)(\overline{\delta u}_{||i} + \delta u_{\perp i}) \quad \text{e} \quad \overline{\delta T}_j^i = -\overline{\delta p} \delta_j^i, \quad (3.40)$$

onde

$$\overline{\delta T}_0^0{}^{\text{esc}} = \overline{\delta\varepsilon}, \quad \overline{\delta T}_i^0{}^{\text{esc}} = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\overline{\delta u}_{||i}, \quad \overline{\delta T}_j^i{}^{\text{esc}} = -\overline{\delta p} \delta_j^i, \quad (3.41)$$

$$\overline{\delta T}_0^0{}^{\text{vet}} = 0, \quad \overline{\delta T}_i^0{}^{\text{vet}} = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\delta u_{\perp i}, \quad \overline{\delta T}_j^i{}^{\text{vet}} = 0, \quad (3.42)$$

$$\overline{\delta T}_0^0{}^{\text{ten}} = 0, \quad \overline{\delta T}_i^0{}^{\text{ten}} = 0, \quad \overline{\delta T}_j^i{}^{\text{ten}} = 0. \quad (3.43)$$

Desta forma, substituindo (3.41)-(3.43) correspondentemente em (3.30)-(3.35) encontramos as equações de evolução para os modos escalares, vetoriais e tensoriais, que são dadas por

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi Ga^2\overline{\delta\varepsilon}, \quad (3.44)$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi Ga^2 \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\overline{\delta u}_{||i}, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & \left((2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}(\Phi + 2\Psi)' + \Psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi) \right) \delta_j^i + \\ & - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,kj} \delta^{ik} = 4\pi Ga^2 \overline{\delta p} \delta_j^i, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\Delta\overline{V}_i = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\delta u_{\perp i}, \quad (3.47)$$

$$\left\{ [\overline{V}_{k,j} + \overline{V}_{j,k}]' + 2\mathcal{H}[\overline{V}_{k,j} + \overline{V}_{j,k}] \right\} \delta^{ik} = 0, \quad (3.48)$$

$$h_{kj}'' + 2\mathcal{H}h_{kj}' - \Delta h_{kj} = 0. \quad (3.49)$$

As equações (3.44)-(3.49) descrevem completamente a evolução dinâmica das perturbações cosmológicas: as equações (3.44)-(3.46) governam os modos escalares, onde (3.44) relaciona o Laplaciano do potencial gravitacional Ψ com flutuações na densidade de energia

$\overline{\delta\varepsilon}$, (3.45) conecta a derivada temporal dos potenciais com a componente longitudinal do 4-vetor velocidade $\overline{\delta u}_{\parallel i}$ do fluido cosmológico, e (3.46) descreve a evolução dinâmica completa dos campos escalares Φ e Ψ incluindo efeitos de pressão $\overline{\delta p}$; as equações (3.47)-(3.48) descrevem os modos vetoriais, com (3.47) relacionando o Laplaciano do campo vetorial \overline{V}_i com componentes transversais do 4-vetor velocidade $\overline{\delta u}_{\perp i}$, e (3.48) governando o amortecimento de campos vetoriais devido à expansão cósmica; finalmente, (3.49) caracteriza os modos tensoriais, descrevendo a propagação de ondas gravitacionais h_{ij} no universo em expansão. Esta decomposição única em representações irreduzíveis do grupo de rotações garante que modos escalares, vetoriais e tensoriais evoluem independentemente na aproximação linear.

3.4 Breve discussão sobre inflação e perturbações primordiais

O modelo cosmológico padrão, baseado nas equações de Friedmann (2.20) e (2.21) derivadas da equações de Einstein (1.29), descreve um universo homogêneo e isotrópico cuja dinâmica depende da densidade de matéria e radiação. No entanto, apesar do seu sucesso em explicar fenômenos como a expansão cósmica e a nucleossíntese primordial, esse modelo enfrenta dificuldades fundamentais conhecidas como os problemas do horizonte, da planicidade e das condições iniciais. Esses problemas indicam uma incompatibilidade entre a extensão causal do universo observável e a extrema homogeneidade do fundo cósmico de micro-ondas (CMB), bem como a proximidade do parâmetro de densidade total Ω_0 ao valor crítico unitário.

A inflação cósmica inicialmente proposta por A. Guth [18] surge como um mecanismo físico que resolve, de maneira natural, tais inconsistências. Define-se, em termos gerais, como uma fase de expansão acelerada do universo primitivo, durante a qual a gravidade atua efetivamente como uma força repulsiva. Matematicamente, essa condição se expressa mediante a segunda derivada positiva do fator de escala:

$$\ddot{a}(t) > 0. \quad (3.50)$$

Durante a inflação, o ritmo de expansão é tão rápido que o fator de escala cresce quase exponencialmente,

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad (3.51)$$

com o parâmetro de Hubble H mantendo-se aproximadamente constante durante essa fase. Esse comportamento implica que as distâncias físicas entre pontos crescem mais rapidamente do que a velocidade com que a luz pode percorrer-las, estabelecendo efetivamente

mente um horizonte de eventos durante a inflação.

Paradoxalmente, essa expansão acelerada resolve o problema do horizonte. Antes da inflação, toda a região que posteriormente formaria o universo observável encontrava-se dentro de um único domínio causalmente conectado. A expansão acelerada “infla” essa região microscópica até escalas cosmológicas, garantindo a homogeneidade e a isotropia observadas no CMB entre áreas que hoje parecem causalmente desconectadas. Desse modo, a inflação transforma um pequeno domínio causal em um universo observável coerente.

Um dos êxitos conceituais mais notáveis da teoria inflacionária reside em sua extraordinária capacidade de explicar a planicidade espacial observada do universo. De acordo com a equação de Friedmann, o desvio da planicidade é dado por $|\Omega - 1| = |k|/(aH)^2$ (parâmetro de densidade associada à curvatura), onde k representa a curvatura espacial. Durante a fase inflacionária, o fator de escala cresce quase exponencialmente enquanto H permanece aproximadamente constante, fazendo com que o produto aH aumente de maneira exponencial. Como consequência direta, o termo $|\Omega - 1|$ diminui exponencialmente, isto é,

$$|\Omega - 1| \propto e^{-2Ht} \Rightarrow |\Omega - 1| \rightarrow 0, \quad (3.52)$$

indicando que qualquer desvio inicial do universo em relação à planicidade é rapidamente suprimido. Dessa forma, a inflação prevê de maneira natural que o universo atual seja praticamente plano, $\Omega_0 \approx 1$, em notável concordância com as medições cosmológicas do satélite *Planck*.

Além disso, a inflação explica de forma natural a origem das flutuações primordiais [19, 4] que deram origem à estrutura cósmica. Durante a fase inflacionária, as flutuações quânticas do campo ínflaton — o campo escalar responsável pela energia de vácuo dominante — são amplificadas pela expansão acelerada e, ao saírem do horizonte, congelam-se como perturbações clássicas do potencial gravitacional. Quando a inflação termina e o universo retorna a uma fase de expansão desacelerada, essas perturbações reentram no horizonte e atuam como sementes para a formação de galáxias e aglomerados.

A duração e a escala energética da inflação são restrinvidas por observações cosmológicas [20]. Nos modelos mais simples, a inflação conclui-se aproximadamente em tempos da ordem de

$$t_f \sim 10^{-34} \text{--} 10^{-36} \text{ s}, \quad (3.53)$$

após os quais ocorre uma fase de reaquecimento, em que a energia do campo ínflaton converte-se em matéria e radiação ordinárias, restabelecendo as condições iniciais do modelo de Friedmann.

A Figura 3.1 ilustra o comportamento da taxa de expansão do universo, $\dot{a}(t)$, em

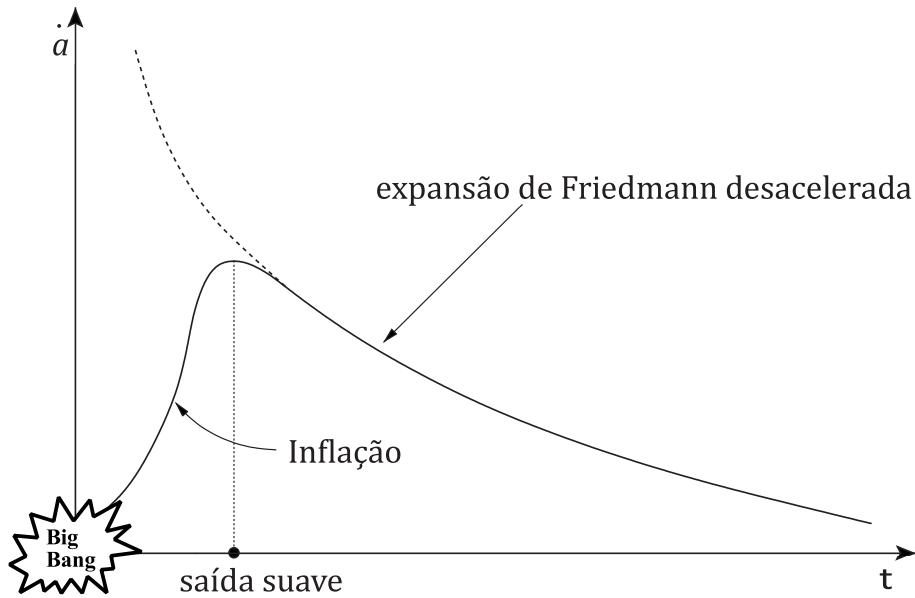


Figura 3.1: Evolução da taxa de expansão cósmica $\dot{a}(t)$ durante a fase inflacionária e a subsequente expansão de Friedmann desacelerada.

função do tempo cosmológico t . No início da evolução (região à esquerda), o universo emerge de um estado quântico ainda não descrito por uma teoria completa da gravitação. Em seguida, inicia-se uma fase de expansão acelerada, conhecida como inflação, caracterizada pela condição $\ddot{a}(t) > 0$. Durante essa fase, o fator de escala $a(t)$ cresce quase exponencialmente, o que implica um aumento abrupto de $\dot{a}(t)$, que atinge um valor quase constante. Essa etapa é dominada pela energia de vácuo associada ao campo ínflaton, cuja pressão negativa atua como uma fonte gravitacional repulsiva. A inflação perdura por um intervalo muito curto de tempo, mas suficiente para expandir uma região microscópica até dimensões cosmológicas. O ponto assinalado como *saída suave* marca o término da inflação, quando o potencial do campo ínflaton perde a dominância e a energia armazenada é convertida em partículas e radiação — processo conhecido como reaquecimento. Após essa transição, o universo entra na fase de expansão desacelerada de Friedmann, dominada inicialmente pela radiação e, posteriormente, pela matéria. Essa etapa é representada na figura pela curva descendente de $\dot{a}(t)$, indicando que a aceleração cósmica torna-se negativa, $\ddot{a}(t) < 0$.

Assim, a Figura 3.1 sintetiza a transição entre três regimes cosmológicos distintos: (i) uma fase pré-inflacionária ainda não compreendida, (ii) a expansão acelerada inflacionária que resolve os problemas de horizonte e planicidade, e (iii) o retorno contínuo à dinâmica padrão de Friedmann, que descreve a evolução térmica e estrutural subsequente do cosmos.

3.5 Perturbações cosmológicas primordiais

Um dos problemas centrais da cosmologia contemporânea é explicar a origem das não homogeneidades primordiais, que atuam como sementes para a formação de estruturas. Antes do advento da cosmologia inflacionária, as perturbações iniciais eram postuladas e ajustadas para se adequar aos dados observacionais. A inflação, em contraste, fornece uma explicação para a origem dessas perturbações e permite prever seu espectro, possibilitando confrontar a teoria com observações.

Durante a inflação cósmica, as perturbações primordiais originam-se de flutuações quânticas do campo escalar. Tais flutuações possuem amplitude significativa apenas em escalas próximas ao comprimento de Planck, mas são esticadas para escalas galácticas durante a fase inflacionária, mantendo aproximadamente sua amplitude. Assim, a inflação conecta a microfísica do campo escalar à estrutura em grande escala do universo, produzindo o espectro das flutuações primordiais que serve de base para diferentes cenários inflacionários.

Para descrever rigorosamente essas perturbações, consideramos um universo plano preenchido por um campo escalar ϕ condensado, com ação

$$S = \int p(X, \varphi) \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.54)$$

onde

$$X \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta}. \quad (3.55)$$

O termo lagrangiano $p(X, \varphi)$ representa a pressão do sistema [3]. Ao variar a ação (3.54) com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, obtém-se o tensor energia-momento na forma característica de um fluido hidrodinâmico ideal

$$T_\beta^\alpha = (\varepsilon + p) u^\alpha u_\beta - p \delta_\beta^\alpha. \quad (3.56)$$

Aqui $u_\nu = \varphi_\nu / \sqrt{2X}$ e a densidade de energia ε é dada pela expressão

$$\varepsilon = 2X p_{,X} - p. \quad (3.57)$$

O termo $p_{,X} \equiv \partial p / \partial X$ denota a derivada parcial de p em relação a X . Dessa forma, um campo escalar pode representar o fluxo potencial de um fluido ideal. De modo inverso, a formulação hidrodinâmica fornece uma correspondência útil para a descrição de um campo escalar com lagrangiano arbitrário.

A ação (3.54) é geral o suficiente para englobar todos os modelos inflacionários de campo único, incluindo o caso da inflação k [3]. Quando a lagrangiana depende apenas

de X , tem-se $\varepsilon = \varepsilon(X)$, e em diversos casos a relação (3.57) pode ser reescrita sob a forma $p = p(\varepsilon)$, correspondente à equação de estado de um fluido isentrópico. Para uma dependência do tipo $p \propto X^n$, obtém-se $p = \varepsilon/(2n - 1)$. Assim, o caso particular $p \propto X^2$ descreve um fluido ultra-relativístico com equação de estado $p = \varepsilon/3$. No caso mais geral, em que $p = p(X, \varphi)$, a pressão não pode ser expressa exclusivamente em função de ε , pois X e φ são variáveis independentes. Ainda assim, a analogia hidrodinâmica permanece válida e fornece uma interpretação consistente do sistema. Para o campo escalar canônico, as expressões reduzem-se a $p = X - V(\varphi)$ e $\varepsilon = X + V(\varphi)$. Aqui derivamos as equações para perturbações e reformulamos em uma forma simples e conveniente

Para o fundo, o estado de um universo homogêneo e plano é caracterizado completamente pelo fator de escala $a(\eta)$ e pelo campo homogêneo $\varphi_0(\eta)$, que satisfazem as equações familiares

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi}{3} a^2 \varepsilon, \quad (3.58)$$

e

$$\varepsilon' = \varepsilon_{,X} X'_0 + \varepsilon_{,\varphi} \varphi'_0 = -3\mathcal{H}(\varepsilon + p), \quad (3.59)$$

onde $X_0 = \varphi'^2_0/(2a^2)$ e definimos $G = 1$. Substituindo ε de (3.58) no lado esquerdo de (3.59), obtemos a relação

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -4\pi a^2 (\varepsilon + p), \quad (3.60)$$

que é útil no que segue.

Para a análise das perturbações e a derivação das equações que descrevem as inhomogeneidades, é necessário inicialmente expressar as componentes invariantes de gauge do tensor energia-momento $\delta\bar{T}_\rho^\sigma$ em função das perturbações do campo escalar e da métrica. Esse procedimento torna-se mais simples ao adotar o gauge longitudinal, no qual a métrica pode ser escrita na forma seguinte,

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\Phi) d\eta^2 - (1 - 2\Psi) \delta_{ik} dx^i dx^k]. \quad (3.61)$$

Em ordem linear, mantém-se apenas os termos de primeira ordem nas perturbações,

$$\delta X = \frac{1}{2} \delta g^{00} \varphi'^2_0 + g^{00} \varphi'_0 \delta \varphi' = 2X_0 \left(-\Phi + \frac{\delta \varphi'}{\varphi'_0} \right), \quad (3.62)$$

e a componente δT_0^0 é

$$\begin{aligned} \delta T_0^0 &= \delta \varepsilon = \varepsilon_{,X} \delta X + \varepsilon_{,\varphi} \delta \varphi = \varepsilon_{,X} \left(\delta X - X'_0 \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right) - 3\mathcal{H}(\varepsilon + p) \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \\ &= \frac{\varepsilon + p}{c_s^2} \left(\left(\frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right)' + \mathcal{H} \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} - \Phi \right) - 3\mathcal{H}(\varepsilon + p) \frac{\delta \varphi}{\varphi'_0}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Utilizamos a segunda igualdade em (3.59) para escrever $\varepsilon_{,\varphi}$ em função de $\varepsilon_{,X}$, ε e p , introduzindo também a definição da velocidade do som, c_s , que determina a propagação das perturbações escalares no fluido,

$$c_s^2 \equiv \frac{p_{,X}}{\varepsilon_{,X}} = \frac{\varepsilon + p}{2X\varepsilon_{,X}}. \quad (3.64)$$

No caso de um campo escalar canônico, a velocidade do som coincide com a velocidade da luz, $c_s = 1$. Os componentes δT_l^0 podem ser obtidos de maneira direta, fornecendo

$$\delta T_l^0 = (\varepsilon + p) u^0 \delta u_i = (\varepsilon + p) g^{00} \frac{\varphi'_0}{\sqrt{2X_0}} \frac{\delta \varphi_{,i}}{\sqrt{2X_0}} = (\varepsilon + p) \left(\frac{\delta \varphi}{\varphi'_0} \right)_{,i}. \quad (3.65)$$

Substituindo $\delta \varphi$ por $\overline{\delta \varphi}$ e substituindo (3.63) e (3.65) em (3.30) e (3.31), obtém-se para as variáveis invariantes de gauge Ψ , Φ e $\overline{\delta \varphi}$:

$$\Delta \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi a^2 (\varepsilon + p) \left[\frac{1}{c_s^2} \left(\left(\frac{\overline{\delta \varphi}}{\varphi'_0} \right)' + \mathcal{H} \frac{\overline{\delta \varphi}}{\varphi'_0} - \Phi \right) - 3\mathcal{H} \frac{\overline{\delta \varphi}}{\varphi'_0} \right], \quad (3.66)$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi a^2 (\varepsilon + p) \left(\frac{\overline{\delta \varphi}}{\varphi'_0} \right). \quad (3.67)$$

Como $\delta T_k^i = 0$ para $i \neq k$, segue-se que $\Psi = \Phi$. As duas equações apresentadas são suficientes para determinar tanto o potencial gravitacional quanto a perturbação do campo escalar. Contudo, é conveniente reescrevê-las em uma forma alternativa. Ao utilizar a relação (3.67) para expressar Φ em termos de Ψ' e $\overline{\delta \varphi}$, e substituindo o resultado em (3.66), obtém-se

$$\Delta \Psi = \frac{4\pi a^2 (\varepsilon + p)}{c_s^2 \mathcal{H}} \left(\mathcal{H} \frac{\overline{\delta \varphi}}{\varphi'_0} + \Psi \right)', \quad (3.68)$$

onde as equações de fundo (3.58) e (3.60) também foram usadas. Dado que $\Phi = \Psi$, (3.67) pode ser reescrita como

$$\left(a^2 \frac{\Psi}{\mathcal{H}} \right)' = \frac{4\pi a^4 (\varepsilon + p)}{\mathcal{H}^2} \left(\mathcal{H} \frac{\overline{\delta \varphi}}{\varphi'_0} + \Psi \right). \quad (3.69)$$

Finalmente, em termos das novas variáveis

$$u = \frac{\Psi}{4\pi(\varepsilon + p)^{1/2}}, \quad v = \sqrt{\varepsilon_{,X}} a \left(\overline{\delta \varphi} + \frac{\varphi'_0}{\mathcal{H}} \Psi \right), \quad (3.70)$$

(3.68) e (3.69) tornam-se

$$c_s \Delta u = z \left(\frac{v}{z} \right)', \quad c_s v = \theta \left(\frac{u}{\theta} \right)' \quad (3.71)$$

onde

$$z = \frac{a^2(\varepsilon + p)^{1/2}}{c_s \mathcal{H}}, \quad \theta = \frac{1}{c_s z} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{p}{\varepsilon}\right)^{-1/2}. \quad (3.72)$$

As equações (3.71) e (3.72), expressas nas variáveis u e v , fornecem uma forma conveniente para estudar a evolução das perturbações escalares, permitindo quantizar as flutuações do campo escalar durante a fase inflacionária e calcular o espectro das não homogeneidades primordiais que servem de sementes para a formação de estruturas no universo.

Substituindo v da segunda equação em (3.71) na primeira, obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para u , que descreve a evolução linear clássica das perturbações de um campo escalar homogêneo em um universo FLRW:

$$u'' - c_s^2 \nabla^2 u - \frac{\theta''}{\theta} u = 0, \quad (3.73)$$

que é a chamada equação de Mukhanov-Sasaki, na qual u é a variável que combina a amplitude da perturbação com fatores do fundo, θ depende do condensado homogêneo e do fator de escala. Fisicamente, esta equação descreve a evolução clássica das flutuações do campo escalar φ em torno do campo escalar homogêneo φ_0 , cujo potencial efetivo θ''/θ incorpora os efeitos do fundo do universo sobre as perturbações, de tal forma que os modos de comprimento de onda menores que a escala característica do horizonte oscilam livremente enquanto os modos maiores permanecem praticamente congelados, reproduzindo o comportamento clássico das perturbações do ínflaton e estabelecendo uma conexão direta com as variáveis de curvatura do fluido hidrodinâmico devido à equivalência estrutural das equações de evolução.

Considerações finais

O trabalho desenvolvido constitui uma revisão teórica do formalismo de perturbações cosmológicas lineares e fornece as bases para o estudo das perturbações no universo primordial, estabelecendo a estrutura teórica necessária para compreender a evolução das flutuações cósmicas desde suas origens até a formação de estruturas. A decomposição em modos escalares, vetoriais e tensoriais mostrou-se fundamental para isolar os diferentes graus de liberdade físicos, enquanto a construção de variáveis invariantes de calibre foi incorporada ao formalismo, seguindo o procedimento padrão para assegurar que as equações resultantes descrevam exclusivamente quantidades com significado físico.

A análise das equações de Einstein linearizadas permitiu derivar as equações que determinam como as flutuações evoluem com o tempo, enquanto o estudo das perturbações durante a inflação mostrou como essas flutuações podem ter se originado no universo primordial. O trabalho mostra que a formulação de perturbações na cosmologia requer o uso consistente da Relatividade Geral, utilizando conceitos como a derivada covariante e as equações de Einstein linearizadas para descrever corretamente as flutuações no universo em expansão.

Por outro lado, as perturbações cosmológicas são essencialmente importantes na pesquisa na cosmologia por suas aplicações na atualidade como no estudo de ondas gravitacionais [21] mas também por sua relevância em modelos de gravidade modificada, como em [6], [22] e também [5] apoiando-se nos resultados de [10]. Isso evidencia que a compreensão das perturbações conecta a física de alta energia do universo primordial com a cosmologia observational.

Apêndice A

1. Expressões das grandezas geométricas do espaço-tempo de fundo e perturbado

Para o fundo

- Símbolos de Christoffel

$${}^{(0)}\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} {}^{(0)}g^{\lambda\gamma} (\partial_\beta {}^{(0)}g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha {}^{(0)}g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma {}^{(0)}g_{\alpha\beta}) \quad (\text{A-74})$$

- Tensor de Ricci

$${}^{(0)}R_{\mu\nu} = \partial_\lambda {}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu {}^{(0)}\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + {}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^\tau {}^{(0)}\Gamma_{\tau\lambda}^\lambda - {}^{(0)}\Gamma_{\mu\lambda}^\tau {}^{(0)}\Gamma_{\tau\nu}^\lambda \quad (\text{A-75})$$

- Escalar de curvatura de Ricci

$${}^{(0)}R = {}^{(0)}g^{\alpha\beta} {}^{(0)}R_{\alpha\beta} \quad (\text{A-76})$$

- Tensor de Einstein com índices mistos

$${}^{(0)}G_\beta^\alpha = {}^{(0)}R_\beta^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha {}^{(0)}R \quad (\text{A-77})$$

Para a parte perturbada até primeira ordem

Escrevendo cada quantidade geométrica como a soma de uma parte de fundo e de uma parte perturbada e usando (A-74)-(A-77), obtemos que

- Tensor métrico inverso

$$\delta g^{\alpha\beta} = - {}^{(0)}g^{\alpha\mu} {}^{(0)}g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A-78})$$

- Símbolo de Christoffel

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} {}^{(0)}g^{\lambda\gamma} (\partial_\beta \delta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha \delta g_{\gamma\beta} - \partial_\gamma \delta g_{\alpha\beta}) + \delta g^{\lambda\gamma} {}^{(0)}g_{\sigma\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \quad (\text{A-79})$$

- Tensor de Ricci com índices covariantes

$$\delta R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \partial_\beta \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda + \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\tau {}^{(0)} \Gamma_{\tau\lambda}^\lambda + {}^{(0)} \Gamma_{\alpha\beta}^\tau \delta \Gamma_{\tau\lambda}^\lambda - \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\tau {}^{(0)} \Gamma_{\tau\beta}^\lambda - {}^{(0)} \Gamma_{\alpha\lambda}^\tau \delta \Gamma_{\tau\beta}^\lambda \quad (\text{A-80})$$

- Tensor de Ricci com índices mistos

$$\delta R_\beta^\alpha = \delta g^{\alpha\lambda} {}^{(0)} R_{\lambda\beta} + {}^{(0)} g^{\alpha\lambda} \delta R_{\lambda\beta} \quad (\text{A-81})$$

- Escalar de Ricci

$$\delta R = {}^{(0)} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta} {}^{(0)} R_{\alpha\beta} \quad (\text{A-82})$$

2. Relação entre \mathcal{H} y H

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \frac{da}{dt} = \frac{a}{a} \frac{da}{dt} = a \frac{\dot{a}}{a} = aH \quad (\text{A-83})$$

3. Transformações de calibre

Agora, para saber como mudam as perturbações de uma quantidade $A_{\alpha\beta}$, ou seja, $\delta A_{\alpha\beta}$, quando fazemos uma transformação de coordenadas infinitesimal

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (\text{A-84})$$

no sistema de coordenadas \tilde{x}^α pode ser calculado usando a seguinte regra de transformação

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} A_{\gamma\delta}(x^\rho), \quad (\text{A-85})$$

onde $A_{\alpha\beta}(x^\rho)$ pode ser decomposto como a soma de uma parte de fundo e uma parte perturbada, isto é:

$$A_{\alpha\beta}(x^\rho) = {}^{(0)} A_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta A_{\alpha\beta}(x^\rho). \quad (\text{A-86})$$

Dessa forma, substituindo (A-84) e (A-86) em (A-85), desenvolvendo o produto e considerando uma aproximação até primeira ordem — isto é, mantendo apenas os termos lineares em δA e ξ obtemos

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = {}^{(0)} A_{\alpha\beta} + \delta A_{\alpha\beta} - {}^{(0)} A_{\alpha\gamma} \xi_{,\beta}^\gamma - {}^{(0)} A_{\gamma\beta} \xi_{,\alpha}^\gamma. \quad (\text{A-87})$$

Agora, nas novas coordenadas \tilde{x}^ρ , o tensor $A_{\alpha\beta}$ também pode ser decomposto como a soma de uma parte de fundo e uma parte perturbada, ou seja, podemos escrever

$$\tilde{A}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = {}^{(0)} A_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) + \delta \tilde{A}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) \quad (\text{A-88})$$

onde ${}^{(0)}A_{\alpha\beta}$ é a parte de fundo que agora depende de \tilde{x}^ρ . Comparando as expressões (A-87) e (A-88), temos

$${}^{(0)}A_{\alpha\beta} + \delta A_{\alpha\beta} - {}^{(0)}A_{\alpha\gamma}\xi_{,\beta}^\gamma - {}^{(0)}A_{\gamma\beta}\xi_{,\alpha}^\gamma = {}^{(0)}A_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) + \delta \tilde{A}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho). \quad (\text{A-89})$$

Sabendo que $\delta \tilde{A}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = \delta \tilde{A}_{\alpha\beta}(x^\rho)$ e usando o desenvolvimento em primeira ordem de ${}^{(0)}A_{\alpha\beta}(x^\rho)$, ou seja:

$${}^{(0)}A_{\alpha\beta}(x^\rho) \approx {}^{(0)}A_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) - {}^{(0)}A_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma, \quad (\text{A-90})$$

obtemos a seguinte lei de transformação de calibre:

$$\delta A_{\alpha\beta} \longrightarrow \delta \tilde{A}_{\alpha\beta} = \delta A_{\alpha\beta} - {}^{(0)}A_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}A_{\gamma\beta}\xi_{,\alpha}^\gamma - {}^{(0)}A_{\alpha\gamma}\xi_{,\beta}^\gamma. \quad (\text{A-91})$$

De forma análoga, obtemos as transformações de calibre para o campo escalar, campo vetorial covariante e campo tensorial com índices mistos

$$\delta A \rightarrow \delta \tilde{A} = \delta A - {}^{(0)}A_{,\alpha}\xi^\alpha, \quad (\text{A-92})$$

$$\delta A_\alpha \rightarrow \delta \tilde{A}_\alpha = \delta A_\alpha - {}^{(0)}A_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}A_{\gamma}\xi_{,\alpha}^\gamma, \quad (\text{A-93})$$

$$\delta \tilde{A}_\beta^\alpha = \delta A_\beta^\alpha - {}^{(0)}A_{\beta,\gamma}^\alpha\xi^\gamma - {}^{(0)}A_\gamma^\alpha\xi_{,\beta}^\gamma + {}^{(0)}A_\beta^\gamma\xi_{,\gamma}^\alpha. \quad (\text{A-94})$$

Apêndice B

1. Símbolos de Christoffel

Para modos escalares

$$\delta\Gamma_{00}^0 \text{esc} = \phi' \quad (\text{B-95})$$

$$\delta\Gamma_{0i}^0 \text{esc} = \phi_{,i} \quad (\text{B-96})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 \text{esc} = -\left(2\mathcal{H}(\phi + \psi) + \psi'\right)\delta_{ij} \quad (\text{B-97})$$

$$\delta\Gamma_{00}^k \text{esc} = \phi_{,j}\delta^{kj} \quad (\text{B-98})$$

$$\delta\Gamma_{0i}^k \text{esc} = -\psi'\delta_i^k \quad (\text{B-99})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^k \text{esc} = -\left(\psi_{,j}\delta_i^k + \psi_{,i}\delta_j^k\right) + \psi_{,m}\delta^{km}\delta_{ij} \quad (\text{B-100})$$

Para modos vetoriais

$$\delta\Gamma_{00}^0 \text{vet} = 0 \quad (\text{B-101})$$

$$\delta\Gamma_{i0}^0 \text{vet} = 3\mathcal{H}S_i \quad (\text{B-102})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 \text{vet} = \frac{1}{2}\left(S_{i,j} + S_{j,i} - 2\mathcal{H}(F_{i,j} + F_{j,i}) - (F_{i,j} + F_{j,i})'\right) \quad (\text{B-103})$$

$$\delta\Gamma_{00}^k \text{vet} = -(\mathcal{H}S_j + S'_j)\delta^{kj} \quad (\text{B-104})$$

$$\delta\Gamma_{i0}^k \text{vet} = -\frac{1}{2}\left((F_{l,i} + F_{i,l})' - (S_{l,i} - S_{i,l})\right)\delta^{kl} \quad (\text{B-105})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^k \text{vet} = -F_{m,ij}\delta^{km} \quad (\text{B-106})$$

Para modos tensoriais

$$\delta\Gamma_{00}^0{}^{\text{ten}} = 0 \quad (\text{B-107})$$

$$\delta\Gamma_{i0}^0{}^{\text{ten}} = 0 \quad (\text{B-108})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0{}^{\text{ten}} = -\frac{1}{2}\left(2\mathcal{H}h_{ij} + h'_{ij}\right) \quad (\text{B-109})$$

$$\delta\Gamma_{00}^k{}^{\text{ten}} = 0 \quad (\text{B-110})$$

$$\delta\Gamma_{i0}^k{}^{\text{ten}} = -\frac{1}{2}h'_{li}\delta^{kl} \quad (\text{B-111})$$

$$\delta\Gamma_{ij}^k{}^{\text{ten}} = -\frac{1}{2}\left(h_{mi,j} + h_{mj,i} - h_{ij,m}\right)\delta^{km} \quad (\text{B-112})$$

2. Tensor de Ricci misto

Para modos escalares

$$\delta R_0^0{}^{\text{esc}} = \frac{1}{a^2}\left(6\phi\mathcal{H}' + \Delta\phi + 3\left(\mathcal{H}(\phi + \psi)' + \psi''\right)\right) \quad (\text{B-113})$$

$$\delta R_i^0{}^{\text{esc}} = \frac{2}{a^2}\left(\psi' + \mathcal{H}\phi\right)_{,i} \quad (\text{B-114})$$

$$\delta R_j^i{}^{\text{esc}} = \frac{1}{a^2}\left(\left(2\mathcal{H}'\phi + \mathcal{H}(\phi + 5\psi)'\right)' + 4\mathcal{H}^2\phi + \psi'' - \Delta\psi\right)\delta_j^i + \left(\phi - \psi\right)_{,kj}\delta^{ik} \quad (\text{B-115})$$

Para modos vetoriais

$$\delta R_0^0{}^{\text{vet}} = 0 \quad (\text{B-116})$$

$$\delta R_i^0{}^{\text{vet}} = 0 \quad (\text{B-117})$$

$$\delta R_j^i{}^{\text{vet}} = -\frac{1}{2a^2}\left\{\left[\left(S_k - F'_k\right)_{,j} + \left(S_j - F'_j\right)_{,k}\right]' + 2\mathcal{H}\left[\left(S_k - F'_k\right)_j + \left(S_j - F'_j\right)_{,k}\right]\right\}\delta^{ik} \quad (\text{B-118})$$

Para modos tensoriais

$$\begin{aligned}\delta R_0^{0 \text{ ten}} &= 0 \\ \delta R_j^{0 \text{ ten}} &= 0 \\ \delta R_j^{i \text{ ten}} &= \frac{1}{2a^2} (h''_{kj} + 2\mathcal{H}h'_{kj} - \Delta h_{kj}) \delta^{ik}\end{aligned}$$

3. Escalar de Ricci

Para modos escalares

$$\delta R^{\text{esc}} = \frac{2}{a^2} \left(\Delta\phi + 3\mathcal{H}(\phi' + 3\psi') + 6(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\phi + 3\psi'' - 2\Delta\psi \right) \quad (\text{B-119})$$

Para modos vetoriais

$$\delta R^{\text{vet}} = 0 \quad (\text{B-120})$$

Para modos tensoriais

$$\delta R^{\text{ten}} = 0 \quad (\text{B-121})$$

4. Tensor de Einstein

Para modos escalares

$$\delta G_0^{0 \text{ esc}} = \frac{2}{a^2} \left(\Delta\psi - 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) \right) \quad (\text{B-122})$$

$$\delta G_i^{0 \text{ esc}} = \frac{2}{a^2} (\psi' + \mathcal{H}\phi)_{,i} \quad (\text{B-123})$$

$$\delta G_j^{i \text{ esc}} = -\frac{2}{a^2} \left((2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}(\phi' + 2\psi') + \psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\phi - \psi) \right) \delta_j^i - \frac{1}{2} (\phi - \psi)_{kj} \delta^{ik} \quad (\text{B-124})$$

Para modos vetoriais

$$\delta G_0^0 \text{vet} = 0 \quad (\text{B-125})$$

$$\delta G_i^0 \text{vet} = 0 \quad (\text{B-126})$$

$$\delta G_j^i \text{vet} = -\frac{1}{2a^2} \left\{ \left[(S_k - F'_k)_{,j} + (S_j - F'_j)_{,k} \right]' + 2\mathcal{H} \left[(S_k - F'_k)_{,j} + (S_j - F'_j)_{,k} \right] \right\} \delta^{ik} \quad (\text{B-127})$$

Para modos tensoriais

$$\delta G_0^0 \text{ten} = 0 \quad (\text{B-128})$$

$$\delta G_0^i \text{ten} = 0 \quad (\text{B-129})$$

$$\delta G_j^i \text{ten} = \frac{1}{2a^2} (h''_{kj} + 2\mathcal{H}h'_{kj} - \Delta h_{kj}) \delta^{ik} \quad (\text{B-130})$$

6. Equações de Einstein

Para perturbações escalares

$$\Delta\psi - 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi Ga^2 \delta T_0^0 \text{esc} \quad (\text{B-131})$$

$$(\psi' + \mathcal{H}\phi)_{,i} = 4\pi Ga^2 \delta T_i^0 \text{esc} \quad (\text{B-132})$$

$$\begin{aligned} & \left((2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \mathcal{H}(\phi + 2\psi)' + \psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\phi - \psi) \right) \delta_j^i + \\ & - \frac{1}{2}(\phi - \psi)_{,kj} \delta^{ik} = -4\pi Ga^2 \delta T_j^i \text{esc} \end{aligned} \quad (\text{B-133})$$

Para perturbações vetoriais

$$(S_i - F'_i)_{,kl} \delta^{kl} = 16\pi Ga^2 \delta T_i^0 \text{vet} \quad (\text{B-134})$$

$$\left\{ \left[(S_k - F'_k)_{,j} + (S_j - F'_j)_{,k} \right]' + 2\mathcal{H} \left[(S_k - F'_k)_{,j} + (S_j - F'_j)_{,k} \right] \right\} \delta^{ik} = -16\pi Ga^2 \delta T_j^i \text{vet} \quad (\text{B-135})$$

Para perturbações tensoriais

$$(h''_{kj} + 2\mathcal{H}h'_{kj} - \Delta h_{kj}) \delta^{ik} = 16\pi Ga^2 \delta T_j^i \text{ten} \quad (\text{B-136})$$

Bibliografia

- [1] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] J. M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, 22(8):1882–1905, 1980.
- [3] J. Garriga and V. F. Mukhanov. Perturbations in k-inflation. *Physics Letters B*, 458:219–225, 1999.
- [4] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *JETP Letters*, 33:532–535, 1981.
- [5] N. R. Bertini. Scale-dependent gravity and covariant scale-setting, 2024.
- [6] N. R. Bertini, N. Bilić, and D. C. Rodrigues. Primordial perturbations and inflation in holographic cosmology. *Physical Review D*, 102:123505, 2020.
- [7] D. Langlois. Early universe: Inflation and cosmological perturbations, 2008.
- [8] J. C. Fabris, M. H. Alvarenga, and H. Velten. Using cosmological perturbation theory to distinguish between general relativity and unimodular gravity. *Symmetry*, 15(7):1392, 2023.
- [9] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972.
- [10] I. L. Shapiro. *A Primer in Tensor Analysis and Relativity*. Springer, 2019.
- [11] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity: A Deeper Understanding*. Oxford University Press, 2 edition, 2022.
- [12] I. L. Buchbinder and I. L. Shapiro. *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*. Oxford University Press, 2021.

-
- [13] W. L. et al. Freedman. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *Astrophysical Journal*, 553:47–72, 2001.
 - [14] N. et al. Aghanim. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.
 - [15] J. H. Jeans. On the stability of a spherical nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 199:1–53, 1902.
 - [16] C. L. et al. Bennett. Four-year cobe dmr cosmic microwave background observations: Maps and basic results. *Astrophysical Journal*, 464:L1, 1996.
 - [17] G. et al. Hinshaw. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Data processing, sky maps, and basic results. *Astrophysical Journal Supplement Series*, 180:225, 2009.
 - [18] A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, 23:347–356, 1981.
 - [19] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215:203–333, 1992.
 - [20] Z.-K. Guo, D. J. Schwarz, and Y.-Z. Zhang. Observational constraints on the energy scale of inflation. *Physical Review D*, 98:083526, 2018.
 - [21] R. Picard and K. A. Malik. Induced gravitational waves: the effect of first order tensor perturbations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2024(10):010, 2024.
 - [22] N. R. Bertini, N. Bilić, and D. C. Rodrigues. Primordial perturbations and inflation in a holography inspired gauss-bonnet cosmology. *Physical Review D*, 105(2):023509, 2022.