

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Milena Arantes Rocha Maciel

Cardinalidade de *caps* maximais em espaços afins finitos

Juiz de Fora

2025

Milena Arantes Rocha Maciel

Cardinalidade de *caps* maximais em espaços afins finitos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura

Orientador: Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Coorientadora: Profa. Dra. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Arantes Rocha Maciel, Milena.

Cardinalidade de *caps* maximais em espaços afins finitos / Milena  
Arantes Rocha Maciel. – 2025.

62 f. : il.

Orientador: Frederico Sercio Feitosa

Coorientadora: Beatriz Casulari da Motta Ribeiro

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

1. Geometria Finita. 2. Espaço Afim Finito. 3. *Caps*. 4. *Caps*  
Maximais. I. Sercio Feitosa, Frederico, orient. II. Casulari da Motta Ribeiro,  
Beatriz, coorient. III. Título.

**Milena Arantes Rocha Maciel**

**Cardinalidade de *caps* maximais em espaços afins finitos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovada em 12 de março de 2025.

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa** - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Beatriz Casulari da Motta Ribeiro**

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Fabio Enrique Brochero Martinez**

Universidade Federal de Minas Gerais

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Dafne Campos Lima Bessades Pereira**

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 07/04/2025.



Documento assinado eletronicamente por **FABIO ENRIQUE BROCHERO MARTINEZ, Usuário Externo**, em 07/04/2025, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Frederico Sercio Feitosa, Professor(a)**, em 29/04/2025, às 18:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Beatriz Casulari da Motta Ribeiro, Professor(a)**, em 29/04/2025, às 18:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Dafne Campos Lima Bessades Pereira, Professor(a)**, em 29/04/2025, às 20:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2337581** e o código CRC **2F7A1242**.

Dedico este trabalho aos meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha mãe, Maria da Glória, e ao meu pai, Francisco de Assis, por todo apoio, confiança e amor incondicional. Também agradeço aos meus irmãos, Maíza e Michel, por sempre acreditarem no meu potencial. Agradeço a Deus, pois me sinto extremamente abençoada.

Agradeço ao Pedro, meu companheiro de todos os dias, que, juntamente com o nosso gato, Luke, foram um dos pilares fundamentais para que eu não desistisse. Amo a família que estamos construindo juntos.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática que participaram da minha vida acadêmica de alguma forma. Em particular, agradeço ao meu orientador, Frederico, por ter embarcado nessa jornada comigo, auxiliando-me no que fosse necessário. Também agradeço à minha coorientadora, Beatriz, por trabalhar comigo desde o início da graduação, sempre com muito zelo e paciência, apresentando-me tantos assuntos interessantes que me fizeram permanecer.

Agradeço aos membros da banca examinadora, professores Fábio e Dafne, por gentilmente aceitarem o convite para avaliar e enriquecer este trabalho com suas valiosas considerações.

Agradeço aos amigos presentes na minha vida, os quais não citarei, pois, por sorte, a lista seria extensa, por deixarem a caminhada mais leve e alegre.

Por fim, agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro imprescindível, à Universidade Federal de Juiz de Fora pelo ensino público, gratuito e de qualidade, a todos os funcionários do espaço universitário pelos serviços excepcionais que prestam e à OBMEP por todas as oportunidades que me deram para chegar até aqui.

“Après cela, il y aura, j’espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.” (Évariste Galois).

## RESUMO

Neste trabalho, estamos interessados na cardinalidade de *caps* maximais em espaços afins finitos  $AG(d, 3)$ , com  $2 \leq d \leq 6$ . Para isso, a noção de *caps* em espaços afins finitos é introduzida através do jogo de cartas *SET* culminando na questão sobre a quantidade máxima de cartas que não contém um *set*. A partir daí, apresentamos os principais resultados sobre a maior cardinalidade possível para *caps* em dimensões 2 a 5 e, por fim, fazemos um estudo detalhado na dimensão 6.

Palavras-chave: geometria finita; espaço afim finito; *caps*; *caps* maximais.

## ABSTRACT

In this work, we are interested in the cardinality of maximal caps in finite affine spaces  $AG(d, 3)$ , with  $2 \leq d \leq 6$ . To achieve this, the notion of caps in finite affine spaces is presented through the card game *SET* culminating in the question about the maximum number of cards that do not contain a set. From there, we present the main results on the largest possible cardinality for caps in dimensions 2 to 5 and, finally, we make a detailed study in dimension 6.

Keywords: finite geometry; finite affine space; caps; maximal caps.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – O jogo de cartas <i>SET</i> . . . . .	13
Figura 2 – Dois exemplos de retas em $AG(2, 3)$ . . . . .	22
Figura 3 – $AG(2, 3)$ decomposto como união de três retas paralelas. . . . .	24
Figura 4 – Quatro retas contendo $x_5$ . . . . .	25
Figura 5 – <i>AWM</i> , <i>MAA</i> , <i>NAM</i> e <i>WME</i> , respectivamente. . . . .	55
Figura 6 – Exemplos de cartas com mulheres notáveis da matemática. . . . .	56
Figura 7 – Cartas formando um <i>quad</i> . . . . .	58

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Atributos das cartas do <i>SET</i> . . . . .	13
Tabela 2 – Atributos das cartas do <i>SET</i> relacionados com $\mathbb{F}_3$ . . . . .	20
Tabela 3 – Cardinalidade dos <i>caps</i> maximais conhecidos. . . . .	21
Tabela 4 – Possível quadrado de interseção. . . . .	50
Tabela 5 – Atributos das cartas do <i>EvenQuads</i> relacionados com $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ . . . . .	57

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b><i>CAPS</i> E O JOGO <i>SET</i> . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	O JOGO DE CARTAS <i>SET</i> . . . . .	13
2.2	ESPAÇOS AFINS FINITOS . . . . .	18
2.3	ESTRUTURA MATEMÁTICA DO <i>SET</i> . . . . .	20
<b>3</b>	<b><i>CAPS</i> MAXIMAIS EM <math>AG(d, 3)</math> COM <math>2 \leq d \leq 5</math> . . . . .</b>	<b>24</b>
3.1	<i>CAPS</i> MAXIMAIS EM $AG(2, 3)$ . . . . .	24
3.2	<i>CAPS</i> MAXIMAIS EM $AG(3, 3)$ . . . . .	25
3.3	<i>CAPS</i> MAXIMAIS EM $AG(4, 3)$ . . . . .	28
3.4	<i>CAPS</i> MAXIMAIS EM $AG(5, 3)$ . . . . .	29
<b>4</b>	<b><i>CAPS</i> MAXIMAIS EM <math>AG(6, 3)</math> . . . . .</b>	<b>31</b>
4.1	RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	31
4.2	ESTUDO DAS CLASSES PARALELAS . . . . .	32
4.3	ESTUDO DOS <i>44-CAPS</i> EM $AG(5, 3)$ . . . . .	42
4.4	MAXIMALIDADE DO <i>112-CAP</i> EM $AG(6, 3)$ . . . . .	49
<b>5</b>	<b>GENERALIZAÇÕES E VARIANTES DO <i>SET</i> . . . . .</b>	<b>53</b>
5.1	O JOGO <i>SUPERSET</i> . . . . .	53
5.2	O JOGO <i>EVENQUADS</i> . . . . .	55
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>60</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>61</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Fixado o corpo finito com  $q$  elementos  $\mathbb{F}_q$ , seja  $V = V(d+1, q)$  o espaço vetorial de dimensão  $d+1 \geq 2$  sobre  $\mathbb{F}_q$ . Consideramos a relação de equivalência em  $V \setminus \{0\}$  cujas classes de equivalência são os subespaços de dimensão  $d$  de  $V$  com o 0 deletado. Então, o conjunto das classes de equivalência é o espaço projetivo de dimensão  $d$  sobre  $\mathbb{F}_q$ , denotado por  $PG(d, q)$ . Para cada  $m = 1, 2, 3, \dots, d$ , um subespaço de dimensão  $m$  de  $PG(d, q)$  é o conjunto de pontos cujos vetores, junto com o 0, formam um subespaço de dimensão  $m+1$  de  $V$ . Subespaços de dimensões 1, 2, 3 e  $d-1$  são chamados reta, plano, sólido e hiperplano, respectivamente. Se  $\mathcal{H}$  é um hiperplano de  $PG(d, q)$ , então  $AG(d, q) = PG(d, q) \setminus \mathcal{H}$  é um espaço afim de dimensão  $d$  sobre  $\mathbb{F}_q$ . Os subespaços de  $AG(d, q)$  são os subespaços de  $PG(d, q)$ , menos o  $\mathcal{H}$ , com os pontos de  $\mathcal{H}$  deletados em cada caso. Nesse caso,  $\mathcal{H}$  é dito o hiperplano no infinito de  $AG(d, q)$ . Para mais definições e resultados básicos sobre  $PG(d, q)$  e  $AG(d, q)$ , sugerimos o capítulo 2 de [9].

Muitos problemas em geometria finita exploram contagens em diferentes configurações de pontos em  $AG(d, q)$  (ou em  $PG(d, q)$ ). Por exemplo, um  $k$ -arco é um conjunto de  $k \geq d+1$  pontos tais que não há  $d+1$  em um mesmo hiperplano. Já um  $k$ -cap  $\mathcal{K}$  é um conjunto de  $k$  pontos em  $\mathbb{F}_q^d$  tal que, sempre que  $v_1, v_2, v_3$  são elementos distintos de  $\mathcal{K}$  e  $\lambda_i \in \mathbb{F}_q$ , para  $i \in \{1, 2, 3\}$ , de modo que  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , então temos  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i \neq 0$ . Um dos problemas principais no estudo de *caps* (e arcos) é, fixados  $d$  e  $q$ , a determinação da cardinalidade dos maiores *caps*, chamados *caps* maximais. Nesse trabalho, estamos interessados especificamente na cardinalidade dos *caps* maximais em  $AG(d, 3)$ .

Para  $d=1$  e  $d=2$ , as cardinalidades dos *caps* maximais em  $AG(d, 3)$  podem ser encontradas por inspeção. Em dimensão 3, a prova foi feita pela primeira vez por Bose em 1947 [2]. Em 1970, Pellegrino forneceu a primeira prova para dimensão 4 [14]. Já em 2002, Edel, Ferret, Landjev e Storme [6] classificaram pela primeira vez os *caps* maximais para dimensão  $d=5$ . Os resultados tanto na dimensão 4 quanto na 5 vieram da observação dos *caps* no fecho projetivo  $PG(n, 3)$  e remoção de pontos. Em 2008, Potchin publicou o artigo [15], base do capítulo principal desse trabalho, em que encontrou a cardinalidade de *caps* maximais em  $AG(6, 3)$ . Em dimensões maiores, não são conhecidos os valores exatos para as cardinalidade dos *caps* maximais em  $AG(d, 3)$ , apenas cotas superiores. Veja, por exemplo, [10] e [1] para uma lista de resultados conhecidos em  $AG(d, q)$  e  $PG(d, q)$ .

Uma maneira divertida de visualizar a noção de *cap* é utilizando o jogo de cartas *SET*. O baralho é formado por 81 cartas, cada uma com desenhos com quatro atributos (quantidade, preenchimento, cor e forma) que podem assumir 3 valores cada, formando uma representação dos pontos do espaço  $AG(4, 3)$ . O objetivo é encontrar, dentre uma certa quantidade de cartas sobre a mesa, um *set*: conjunto de 3 cartas em que, em relação

a cada atributo, os valores são todos iguais ou todos diferentes. Dessa forma, um *cap* é um conjunto de cartas do jogo que não contém nenhum *set*. Assim, uma pergunta natural é: qual é a quantidade máxima de cartas que não contém nenhum *set*? Ou seja, qual é a cardinalidade de um *cap* maximal em  $AG(4, 3)$ ?

No Capítulo 2 desse trabalho, exploramos o jogo *SET* e sua relação com *caps*, como uma introdução à pesquisa pela cardinalidade dos *caps* maximais em  $AG(d, 3)$ .

No Capítulo 3, apresentamos os resultados conhecidos sobre a cardinalidade dos *caps* maximais em  $AG(d, 3)$ , para dimensões  $2 \leq d \leq 5$ . O objetivo é fazer uma revisão das técnicas utilizadas pelos autores em [2], [14] e [6]. Algumas dessas técnicas voltam a aparecer quando estudamos o problema dos *caps* maximais em dimensão 6.

Por fim, no Capítulo 4, temos os resultados principais desse trabalho sobre a cardinalidade do *cap* maximal em  $AG(6, 3)$ . Ao longo desse Capítulo, mostramos que não existem *44-caps* completos em  $AG(5, 3)$ , e então, provamos que a cardinalidade dos *caps* maximais em  $AG(6, 3)$  é 112 e que o *112-cap* em  $AG(6, 3)$  é único, a menos de equivalência. Nossa referência principal para isso é o artigo [15] de Potechin.

## 2 CAPS E O JOGO SET

### 2.1 O JOGO DE CARTAS SET

*SET* é um jogo de cartas rápido e divertido, que pode ser encontrado em lojas de brinquedos. Este jogo tem uma estrutura matemática interessante que liga-o à combinatória de espaços afins e projetivos finitos e à teoria de códigos corretores de erros.

O jogo *SET* foi inventado pela geneticista de populações Marsha Jean Falco em 1974. Ela estava estudando epilepsia em pastores alemães e começou a representar os dados genéticos dos cães desenhando símbolos em cartas e, em seguida, procurando por padrões nos dados. Depois de perceber o potencial como um jogo desafiador, e com o incentivo de amigos e familiares, ela desenvolveu e comercializou o jogo de cartas. Desde então, *SET* se tornou um grande sucesso tanto dentro quanto fora da comunidade matemática. É possível jogar *online* em [11].

Figura 1 – O jogo de cartas *SET*.



Fonte: <https://www.playmonster.com/product/set/>

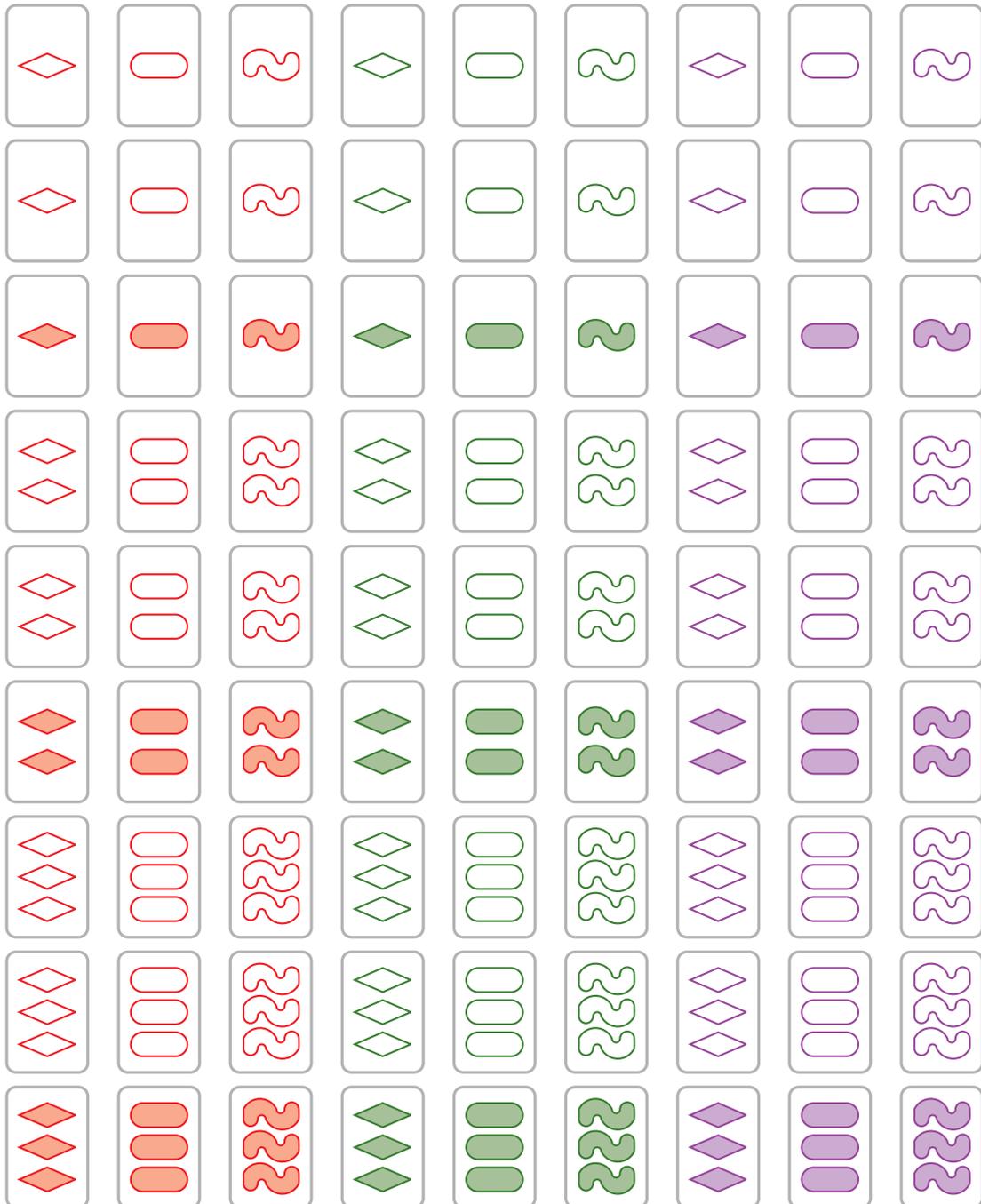
Cada carta do *SET* exibe desenhos com quatro atributos: quantidade, preenchimento, cor e forma. Cada atributo pode assumir três valores, conforme a Tabela 1.

Quantidade	um, dois, três
Preenchimento	vazado, listrado, sólido
Cor	vermelho, verde, roxo
Forma	losango, oval, ondulado

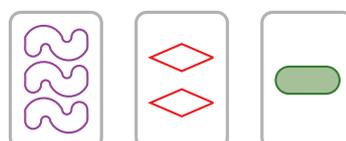
Tabela 1 – Atributos das cartas do *SET*.

Um baralho de *SET* possui uma carta para cada combinação possível de atributos, o que nos dá  $3^4 = 81$  cartas no total. O objetivo do jogo é encontrar coleções de cartas

que satisfaçam a seguinte regra: três cartas são chamadas de um *set* se, em relação a cada um dos quatro atributos, as cartas forem todas iguais ou todas diferentes. A seguir, temos todas as cartas possíveis do baralho do *SET*, produzidas com o pacote *setdeck* [17] elaborado pela pesquisadora Gwyneth Whieldon, que usaremos ao longo do trabalho.

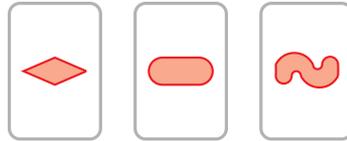


**Exemplo 2.1.1.** As cartas

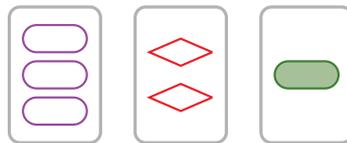


formam um *set*, pois temos três quantidades distintas, três preenchimentos distintos, três cores distintas e três formas distintas, ou seja, as cartas são diferentes em todos atributos.

**Exemplo 2.1.2.** E também, as cartas a seguir formam um *set*, pois todas as cartas tem a mesma quantidade, o mesmo preenchimento, a mesma cor e todas as formas distintas.



**Exemplo 2.1.3.** Agora, por outro lado, as cartas

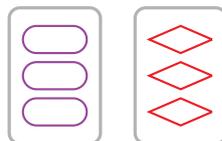


não formam um *set*, pois temos duas cartas com a mesma forma oval e uma carta com a forma losango. Assim, as cartas não são nem todas iguais nem todas diferentes em relação ao atributo forma.

Uma pergunta simples que pode surgir é: quantos *sets* podem ser formados contendo uma dada carta? Para resolver isso, precisamos ter em mente o seguinte:

**Teorema 2.1.4** (Teorema Fundamental do *SET*). *Dado qualquer par de cartas do SET, existe uma única carta que completa um set com o par.*

**Exemplo 2.1.5.** Considere as duas cartas a seguir:



Ambas tem formas diferentes e cores diferentes, mas a mesma quantidade e o mesmo preenchimento. Isso nos diz que a carta que completará o *set* deve ter 3 figuras listradas, além de forma e cor diferentes das existentes, formando o *set*:

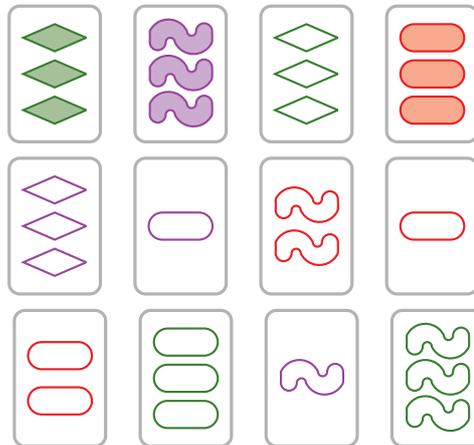


O exemplo anterior nos mostra a ideia da demonstração do Teorema 2.1.4. Dadas duas cartas, já sabemos se cada um dos quatro atributos será igual ou diferente entre essas

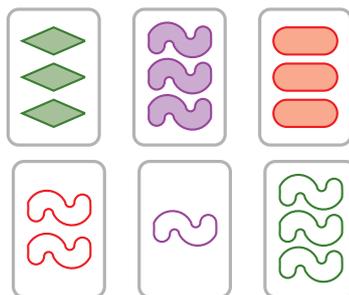
cartas, o que significa que basta escolher uma terceira carta seguindo a regra definida para cada atributo.

Para jogar, o baralho do *SET* é embaralhado e 12 cartas são distribuídas viradas para cima na mesa. Todos os jogadores simultaneamente procuram por *sets*. O primeiro jogador a localizar um *set* avisa os demais e remove-o da mesa, e três novas cartas são colocadas no lugar das que foram retiradas. Pode acontecer de não ter nenhum *set* entre as 12 cartas distribuídas inicialmente. Então, 3 cartas extras são distribuídas, e isso é repetido até que apareça um *set*. Quando não sobrar mais cartas sobre a mesa ou caso sobre algumas cartas e todos concordarem que não há mais *sets* disponíveis, o jogo acaba e o jogador com mais *sets* é o vencedor.

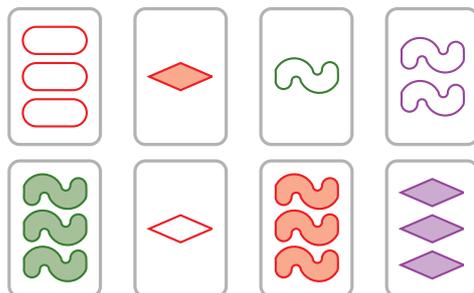
**Exemplo 2.1.6.** Ao iniciar uma partida, as seguintes 12 cartas foram distribuídas:

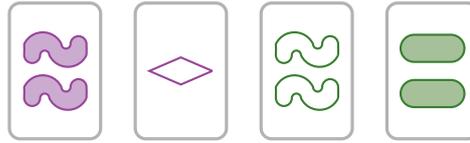


Dentre elas, é possível apontar *sets*, por exemplo:

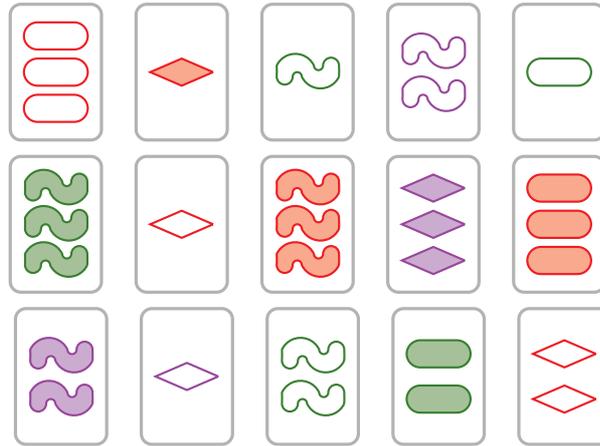


**Exemplo 2.1.7.** Agora, iniciamos outra partida. As seguintes 12 cartas foram distribuídas:

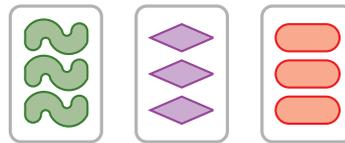




Perceba que, dentre elas, não é possível apontar nenhum *set*. Assim, adicionamos 3 cartas extras, por exemplo:

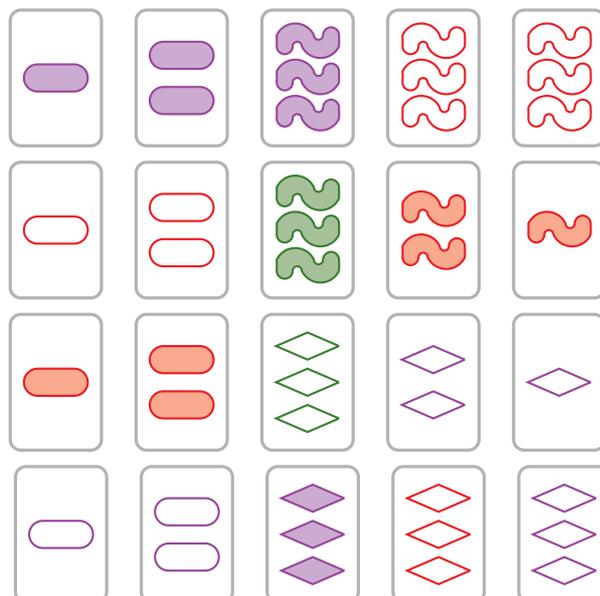


Agora, é possível apontar um *set*, sendo ele:



O exemplo 2.1.7 apresenta um caso em que entre 12 cartas não há nenhum *set*, mas que com 3 novas cartas temos um *set*. A seguir apresentamos um exemplo de coleção ainda maior que não contém nenhum *set*.

**Exemplo 2.1.8.** A seguir, temos um conjunto de 20 cartas que não contém nenhum *set*:



Isso nos leva à seguinte questão:

*Pergunta 2.1.9.* Quantas cartas devem ser distribuídas para garantir a presença de pelo menos um *set*?

Antes de responder essa pergunta, vamos reformulá-la formalmente utilizando uma estrutura matemática para compreender o jogo *SET*. Para tal, na próxima seção vamos fazer uma breve apresentação do espaço afim finito  $AG(d, q)$ .

## 2.2 ESPAÇOS AFINS FINITOS

O corpo finito com  $q$  elementos  $\mathbb{F}_q$  é equipado com operações de adição e multiplicação, com identidades 0 e 1, respectivamente. Considere o espaço vetorial

$$\mathbb{F}_q^d = \{(x_1, \dots, x_d); x_i \in \mathbb{F}_q, 1 \leq i \leq d\}.$$

Dois vetores não nulos  $(a_1, \dots, a_d)$  e  $(b_1, \dots, b_d)$  de  $\mathbb{F}_q^d$  são equivalentes se existir  $c \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  tal que

$$(b_1, \dots, b_d) = (ca_1, \dots, ca_d).$$

Isso define uma relação de equivalência sobre os vetores não nulos de  $\mathbb{F}_q^d$ . De fato:

1. A relação é reflexiva: basta escolher  $c = 1 \in \mathbb{F}_q$  para todo  $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{F}_q^d$ .
2. A relação é simétrica: se  $(b_1, \dots, b_d) = (ca_1, \dots, ca_d)$ , onde  $c \in \mathbb{F}_q$ , como  $\mathbb{F}_q$  é corpo então existe  $c^{-1} \in \mathbb{F}_q$  tal que  $(a_1, \dots, a_d) = (c^{-1}b_1, \dots, c^{-1}b_d)$ .
3. A relação é transitiva: se existem  $c, f \in \mathbb{F}_q$  tais que  $(b_1, \dots, b_d) = (ca_1, \dots, ca_d)$  e  $(e_1, \dots, e_d) = (fb_1, \dots, fb_d)$ , segue que  $(e_1, \dots, e_d) = (fca_1, \dots, fca_d)$ .

Existem exatamente

$$r = \frac{q^d - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{d-1}$$

classes de equivalência, pois há  $q^d - 1$  elementos em  $\mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}$  e  $q - 1$  elementos em  $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ . Sejam  $h_1 = (h_{11}, \dots, h_{d1}), \dots, h_r = (h_{1r}, \dots, h_{dr}) \in \mathbb{F}_q^d$  representantes de cada uma dessas classes de equivalência.

**Definição 2.2.1.** Um **hiperplano** é um conjunto definido como

$$\mathcal{H}_{j,c} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{F}_q^d; h_{1j}x_1 + \dots + h_{dj}x_d = c\},$$

para  $1 \leq j \leq r$  e  $c \in \mathbb{F}_q$ .

Note que cada  $\mathcal{H}_{j,0}$  (para  $1 \leq j \leq r$ ) é um subespaço vetorial de  $\mathbb{F}_q^d$  com dimensão  $d - 1$ , e todo  $\mathcal{H}_{j,c}$  é uma classe lateral (*coset*) de  $\mathcal{H}_{j,0}$  em  $\mathbb{F}_q^d$  (para  $c \in \mathbb{F}_q$ ).

Dois hiperplanos são ditos paralelos se possuem o mesmo vetor normal  $(h_{1j}, \dots, h_{dj})$ , mas diferentes valores de  $c \in \mathbb{F}_q$ . Por exemplo, em  $\mathbb{F}_3^3$ , os hiperplanos  $x + y + z = 0$  e  $x + y + z = 1$  são paralelos. Dessa forma, em  $\mathbb{F}_q^d$  há  $\frac{q^d - 1}{q - 1}$  famílias de hiperplanos paralelos, cada uma com  $q$  hiperplanos.

**Definição 2.2.2.** Definimos o **espaço afim finito**  $AG(d, q)$  como o conjunto dos pontos de  $\mathbb{F}_q^d$  e o conjunto de todos os hiperplanos  $\mathcal{H}_{j,c}$ .

Assim, muitas propriedades são satisfeitas por  $AG(d, q)$ , incluindo as seguintes:

1. Cada hiperplano contém  $q^{d-1}$  pontos.
2. Cada ponto pertence exatamente à  $r = \frac{q^d - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{d-1}$  hiperplanos.
3. Todo conjunto de  $d$  pontos em posição geral está contido em um único hiperplano.

**Definição 2.2.3.** Um subespaço afim  $k$ -dimensional de um espaço vetorial é chamado de  **$k$ -plano**.

A proposição a seguir será utilizada diversas vezes ao longo desse trabalho.

**Proposição 2.2.4.** *O número de hiperplanos que contêm um  $k$ -plano fixado em  $AG(d, 3)$  é dado por*

$$\phi(d, k) = \frac{3^{d-k} - 1}{2}.$$

*Demonstração.* Seja  $K$  um  $k$ -plano que contém a origem. Então, a aplicação natural

$$AG(d, 3) \longrightarrow AG(d, 3)/K \cong AG(d - k, 3)$$

nos dá uma bijeção entre os hiperplanos em  $AG(d, 3)$  que contêm  $K$  e os hiperplanos de  $AG(d - k, 3)$  que contêm a origem.

Cada hiperplano que contém a origem é determinado por um vetor normal não nulo, e existem exatamente dois vetores normais não nulos determinando cada hiperplano. Assim, há metade do número de hiperplanos em comparação com o número de vetores não nulos. Como existem  $3^{d-k} - 1$  vetores não nulos em  $AG(d - k, 3)$ , então devemos ter  $\frac{3^{d-k} - 1}{2}$  hiperplanos contendo a origem.

Portanto, o número de hiperplanos em  $AG(d, 3)$  que contém  $K$  é

$$\phi(d, k) = \frac{3^{d-k} - 1}{2}.$$

□

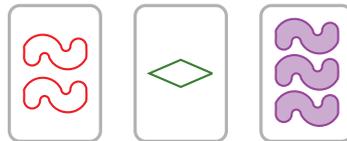
### 2.3 ESTRUTURA MATEMÁTICA DO SET

Seja  $\mathbb{F}_3$  o corpo finito com três elementos e considere o espaço vetorial  $AG(4, 3)$ . Um ponto  $x \in AG(4, 3)$  é uma 4-upla da forma  $x = (a, b, c, d)$ , onde cada coordenada assume um dos três valores possíveis em  $\mathbb{F}_3$ . Assim, podemos dar valores aos atributos das cartas do baralho do SET seguindo Tabela 2, e então, as cartas correspondem aos pontos de  $AG(4, 3)$ , e vice-versa.

Valor	0	1	2
Quantidade	um	dois	três
Preenchimento	vazado	listrado	sólido
Cor	vermelho	verde	roxo
Forma	losango	oval	ondulado

Tabela 2 – Atributos das cartas do SET relacionados com  $\mathbb{F}_3$ .

**Exemplo 2.3.1.** Os elementos de  $AG(4, 3)$ :  $(1, 1, 0, 2)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(2, 2, 2, 2)$  correspondem às seguintes cartas, respectivamente:



**Definição 2.3.2.** Uma **reta** em  $AG(4, 3)$  é definida como o conjunto

$$r = \{p + tv ; t \in \mathbb{F}_3, p \in AG(4, 3)\},$$

onde  $v$  é o vetor diretor.

Dados 3 elementos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_3$ , então  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  se, e somente se,  $\alpha = \beta = \gamma$  ou  $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{0, 1, 2\}$ . Dessa forma, dados 3 pontos  $x, y, z \in AG(4, 3)$ , tem-se  $x, y, z$  todos iguais ou todos diferentes em cada coordenada se, e somente se,  $x + y + z = 0$ . Porém,  $x + y + z = 0$  em  $AG(4, 3)$  se, e somente se,  $x - y = y - z$  em  $AG(4, 3)$ , ou seja,  $x, y, z$  são colineares. Dessa forma, o seguinte resultado é válido:

**Proposição 2.3.3.** *Três pontos  $x, y, z \in AG(4, 3)$  são colineares se, e somente se,*

$$x + y + z = 0.$$

Então, nesta correspondência, três cartas formam um *set* se, e somente se, os três pontos associados em  $AG(4, 3)$  são colineares. Deste ponto de vista, os jogadores de SET estão procurando por retas contidas em um subconjunto de  $AG(4, 3)$ . Ainda, a Proposição 2.3.3 garante a validade do Teorema Fundamental do SET (Teorema 2.1.4), já que conhecendo um par de pontos da reta, o terceiro está bem determinado.

Note que a Proposição 2.3.3 pode ser generalizada no espaço vetorial  $AG(d, 3)$ : três pontos  $\alpha, \beta, \gamma \in AG(d, 3)$  representam pontos colineares se, e somente se,  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ . Assim, em um jogo como o *SET*, porém com  $d$  atributos em cada carta, a procura por *sets* é, então, equivalente à procura por retas em um subconjunto de  $AG(d, 3)$ . Isso motiva a seguinte definição:

**Definição 2.3.4.** Um ***k-cap*** é um subconjunto com  $k$  elementos de  $AG(d, 3)$  que não contém nenhuma reta.

*Pergunta 2.3.5.* Qual é o tamanho máximo possível de um *k-cap* em  $AG(4, 3)$ ?

Note que essa é a Pergunta 2.1.9. Ela foi respondida pela primeira vez, sem o uso de computadores, por Giuseppe Pellegrino em [14]. Observe que o artigo é de 1971, três anos antes do jogo *SET* ser inventado!

Embora as cartas do *SET* sejam descritas com quatro atributos, de uma perspectiva matemática não há nada especial sobre o número quatro. Podemos jogar uma versão de três atributos do *SET*, por exemplo, jogando apenas com as cartas verdes. Ou podemos jogar uma versão de cinco atributos do *SET* usando cartas com o fundo colorido em vez de branco, por exemplo, com o fundo variando entre preto, azul e amarelo. Em geral, definimos um jogo *SET* afim de dimensão  $d$  como um jogo de cartas com uma carta para cada ponto de  $AG(d, 3)$ , onde três cartas formam um *set* se, e somente se, os pontos correspondentes forem colineares.

**Definição 2.3.6.** Um *cap* de cardinalidade máxima possível é chamado de ***cap maximal***.

É natural questionar sobre o tamanho de um *cap* maximal  $\mathcal{M}$  em  $AG(d, 3)$ , em função da dimensão  $d$ , esse é justamente o tema desse trabalho. Denotamos essa cardinalidade por  $|\mathcal{M}|$ . Até o momento, só são conhecidos os valores de  $|\mathcal{M}|$  nas dimensões 1 a 6 (veja a Tabela 3), sendo que os valores nas dimensões 3, 4, 5 e 6 foram determinados, respectivamente, em [2], [14], [6] e [15].

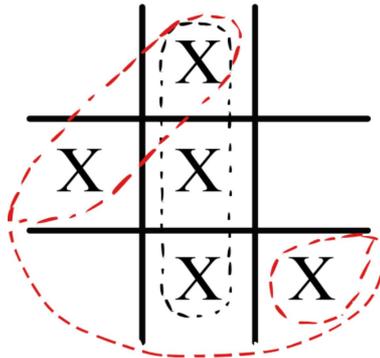
$d$	1	2	3	4	5	6
$ \mathcal{M} $	2	4	9	20	45	112

Tabela 3 – Cardinalidade dos *caps* maximais conhecidos.

Podemos exibir *caps* graficamente usando o seguinte esquema. Vamos considerar o caso da dimensão  $d = 2$ . Podemos fazer uma versão de dois atributos do *SET* jogando apenas com as cartas onduladas roxas. O espaço  $AG(2, 3)$  pode ser representado graficamente como um tabuleiro de jogo da velha como na Figura 2. Indicamos um subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $AG(2, 3)$  desenhando um “X” em cada quadrado do tabuleiro de jogo da velha correspondente a um ponto de  $\mathcal{S}$ .

As retas contidas em  $\mathcal{S}$  são quase claras de se ver. A maioria delas aparece como clássicas do jogo da velha vencedor, enquanto algumas são diagonais que não estamos acostumados a ver, que são aquelas que encontram uma borda do tabuleiro e “fazem um loop” para a borda oposta. Por exemplo, as duas retas na Figura 2 correspondem a *sets*.

Figura 2 – Dois exemplos de retas em  $AG(2, 3)$ .



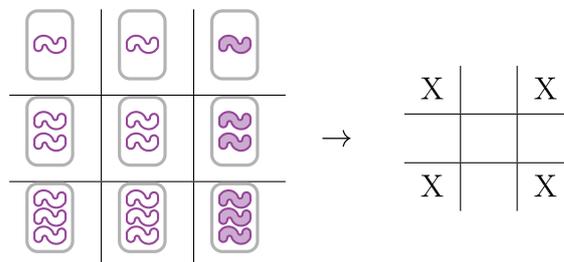
Fonte: Elaborada pela autora (2024).

A seguir, temos exemplos mostrando alguns *caps* maximais nas dimensões de 1 a 4. Nestas dimensões, os *caps* são visivelmente simétricos, e cada *cap* contém cópias embutidas dos *caps* maximais em dimensões mais baixas.

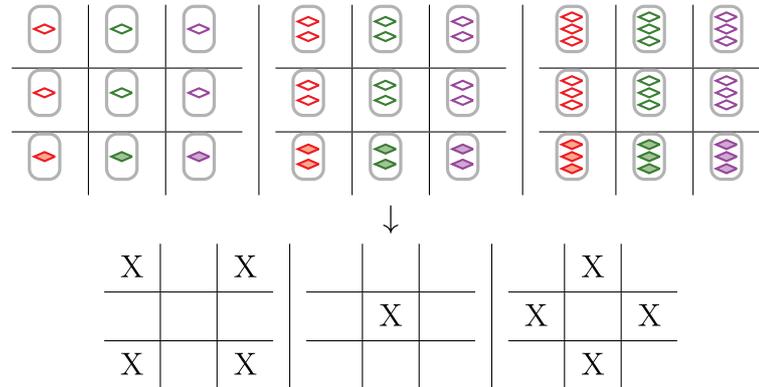
**Exemplo 2.3.7.** Em  $AG(1, 3)$ :



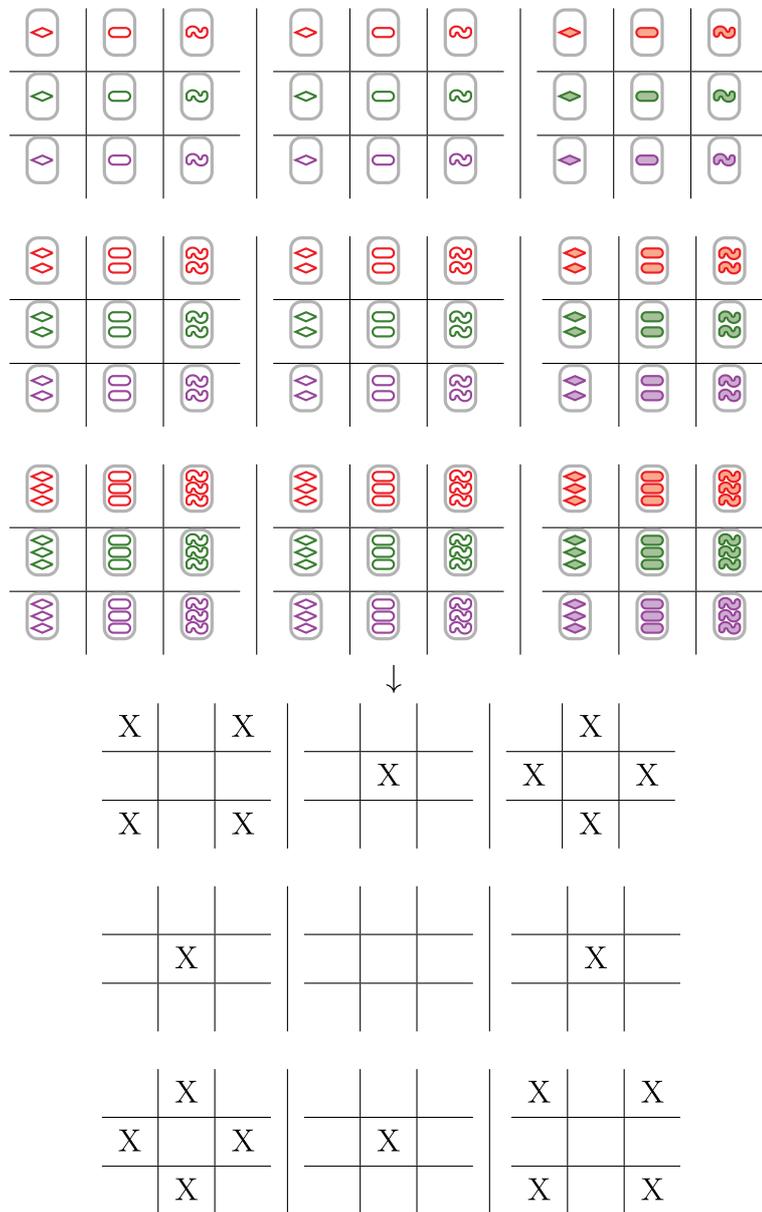
**Exemplo 2.3.8.** Em  $AG(2, 3)$ :



**Exemplo 2.3.9.** Em  $AG(3,3)$ :



**Exemplo 2.3.10.** Em  $AG(4,3)$ :



### 3 CAPS MAXIMAIS EM $AG(d, 3)$ COM $2 \leq d \leq 5$

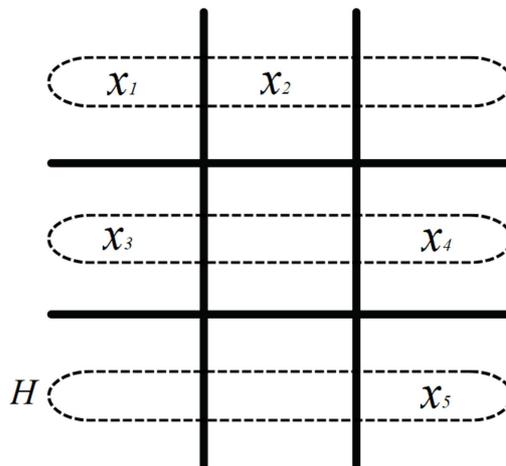
Nesse capítulo, vamos apresentar as cardinalidades dos *caps* maximais em  $AG(d, 3)$ , com  $2 \leq d \leq 5$ .

#### 3.1 CAPS MAXIMAIS EM $AG(2, 3)$

**Teorema 3.1.1.** *Um cap maximal em  $AG(2, 3)$  tem 4 pontos.*

*Demonstração.* Anteriormente, no Exemplo 2.3.8, exibimos um 4-cap em  $AG(2, 3)$ . A demonstração seguirá por contradição. Suponhamos que exista um 5-cap em  $AG(2, 3)$ , chamemos esses pontos de  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_5$ . O plano afim finito  $AG(2, 3)$  pode ser decomposto como a união de três retas horizontais paralelas, como na Figura 3.

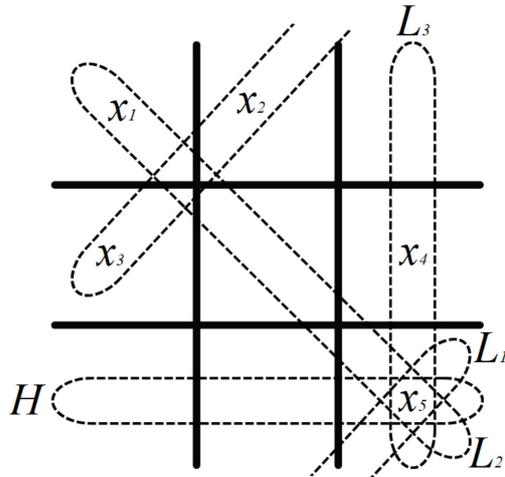
Figura 3 –  $AG(2, 3)$  decomposto como união de três retas paralelas.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Cada reta contém no máximo dois pontos do 5-cap, e como temos cinco pontos e três retas, então duas dessas retas contêm exatamente dois pontos do 5-cap e uma reta  $H$  contém exatamente um ponto do 5-cap. Sem perda de generalidade, suponhamos que  $x_5$  seja esse ponto na reta  $H$ . Pela Proposição 2.2.4, existem exatamente quatro retas do plano contendo o ponto  $x_5$ , pois temos  $\phi(2, 0) = \frac{3^2-1}{2} = 4$ . Vamos denotar essas retas por  $H, L_1, L_2$  e  $L_3$ .

Como a reta  $H$  não contém nenhum dos pontos  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ , estes devem estar nas retas  $L_1, L_2$  e  $L_3$ . Temos quatro pontos e três retas, então pelo princípio da casa dos pombos dois desses pontos,  $x_i$  e  $x_j$  devem estar em uma reta  $L_k$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $x_i = x_2, x_j = x_3$  e  $L_k = L_1$ . Assim, a reta  $L_1$  irá conter os

Figura 4 – Quatro retas contendo  $x_5$ .

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

pontos  $x_2, x_3$  e  $x_5$ , como podemos ver na Figura 4. Isso contradiz a hipótese de que existe um  $5$ -cap em  $AG(2, 3)$ . Portanto, um cap maximal em  $AG(2, 3)$  tem 4 pontos.  $\square$

### 3.2 CAPS MAXIMAIS EM $AG(3,3)$

**Teorema 3.2.1.** *Um cap maximal em  $AG(3, 3)$  tem 9 pontos.*

*Demonstração.* Vamos utilizar o mesmo método do Teorema 3.1.1. Anteriormente, no Exemplo 2.3.9, exibimos um  $9$ -cap em  $AG(3, 3)$ . A demonstração seguirá por contradição. Suponha que exista um  $10$ -cap em  $AG(3, 3)$ .

O espaço afim  $AG(3, 3)$  pode ser decomposto como a união de três hiperplanos paralelos, todos de dimensão 2. Por exemplo, podemos tomar os hiperplanos definidos por  $x + y + z = a$  com  $a$  variando em  $\mathbb{F}_3$ . Como a interseção de qualquer plano com o cap em  $AG(3, 3)$  é um cap em  $AG(2, 3)$ , a Proposição 3.1.1 implica que nenhum plano pode conter mais de quatro pontos do  $10$ -cap.

Isso significa que o plano que contém o menor número de pontos deve conter dois ou três pontos, pois, se contivesse quatro pontos, precisaríamos de um total de doze pontos, se contivesse um ponto implicaria nove pontos no total, e se contivesse nenhum ponto implicaria oito pontos no total. Chamemos de  $H$  o plano que contém o menor número de pontos, note que existem pelo menos sete pontos  $x_1, x_2, \dots, x_7$  do  $10$ -cap que não estão contidos em  $H$ .

Sejam  $a$  e  $b$  dois pontos do  $10$ -cap no plano  $H$ . Pela Proposição 2.2.4, existem exatamente quatro planos no espaço  $AG(3, 3)$  que contêm ambos os pontos  $a$  e  $b$ , pois temos  $\phi(3, 1) = \frac{3^{3-1}-1}{2} = \frac{3^2-1}{2} = 4$ . Vamos denotar esses planos por  $H, P_1, P_2$  e  $P_3$ . Como  $H$  não

contém os pontos  $x_1, x_2, \dots, x_7$ , estes devem estar contidos nos planos  $P_1, P_2$  e  $P_3$ . Pelo princípio da casa dos pombos, um dos planos  $P_i$  deve conter três desses pontos  $x_j, x_k, x_l$ . Sendo assim, o plano  $P_i$  irá conter cinco pontos  $a, b, x_j, x_k$  e  $x_l$ , mas isso contradiz o Teorema 3.1.1. Portanto, um *cap* maximal em  $AG(3, 3)$  tem 9 pontos.  $\square$

Infelizmente, este método usado não é suficientemente forte para provar que um *cap* maximal em  $AG(4, 3)$  tem 20 pontos. Para isso, usaremos outra técnica, e para apresentá-la daremos outra prova para o *cap* maximal em  $AG(3, 3)$ .

Mas primeiro, precisamos introduzir um método de contagem para classes paralelas de hiperplanos. Antes, contamos os pontos do *cap* em um hiperplano. Agora, contaremos as distribuições dos pontos do *cap* sobre hiperplanos paralelos. Chamamos essas distribuições de “classe paralela de hiperplanos”.

**Definição 3.2.2.** Dada uma decomposição em hiperplanos paralelos, uma **classe paralela de hiperplanos** é a distribuição dos pontos do *cap* em  $AG(d, 3)$  sobre os três hiperplanos paralelos. Em outras palavras, dado um *cap*  $\mathcal{C}$  em  $AG(d, 3)$  e uma decomposição em hiperplanos  $\mathcal{H}_{j,0}, \mathcal{H}_{j,1}, \mathcal{H}_{j,2}$ , a classe paralela de hiperplanos é definida como  $\{|\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,0}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,1}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,2}|\}$ , onde  $|\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,i}|$  é a cardinalidade de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,i}$ .

*Observação.* A ordem dos hiperplanos em uma classe paralela de hiperplanos não é relevante, apenas a quantidade de pontos distribuída entre eles. Entretanto, vamos estabelecer uma ordem.

Note que cada classe paralela de hiperplanos é representada por um vetor não nulo  $h_j = (h_{j,0}, \dots, h_{j,2})$  em  $AG(d, 3)$  e ele determina 3 hiperplanos paralelos. Assim, dois pontos  $v$  e  $w$  estão no mesmo hiperplano paralelo se  $h_j^T v = h_j^T w$ .

Dados um *cap*  $\mathcal{C}$  e uma decomposição dele em hiperplanos paralelos determinados por  $h_j$ , definimos a classe paralela de hiperplanos  $\{x, y, z\}$ , onde

$$\begin{aligned} x &= \max\{|\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,0}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,1}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,2}|\} \\ z &= \min\{|\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,0}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,1}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,2}|\} \\ y &= \{|\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,0}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,1}|, |\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_{j,2}|\} \setminus \{x, z\}. \end{aligned}$$

**Definição 3.2.3.** Definimos a contagem de pares de pontos de um *cap* que estão contidos numa mesma classe paralela de hiperplanos, para um dado hiperplano, como sendo o número

$$N_2(h_j) := N_2 = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{z(z-1)}{2}.$$

**Definição 3.2.4.** Definimos a contagem de trios de pontos de um *cap* que estão contidos numa mesma classe paralela de hiperplanos, para um dado hiperplano, como sendo o número

$$N_3(h_j) := N_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{y(y-1)(y-2)}{6} + \frac{z(z-1)(z-2)}{6}.$$

**Lema 3.2.5.** *Para um  $k$ -cap em  $AG(d, 3)$ , temos*

$$\sum_{j=1}^{\phi(d,0)} N_2(h_j) = \frac{k(k-1)}{2} \phi(d, 1).$$

*Demonstração.* Do lado esquerdo da equação, tomamos a soma das contagens de pares de pontos contidos em cada classe paralela de hiperplanos. Do lado direito da equação, temos o total de pares de pontos contidos nos hiperplanos em geral.  $\square$

**Lema 3.2.6.** *Para um  $k$ -cap em  $AG(d, 3)$ , temos*

$$\sum_{j=1}^{\phi(d,0)} N_3(h_j) = \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \phi(d, 2).$$

*Demonstração.* Do lado esquerdo da equação, tomamos a soma das contagens de trios de pontos contidos em cada classe paralela de hiperplanos. Do lado direito da equação, temos o total de trios de pontos contidos nos hiperplanos em geral.  $\square$

**Teorema 3.2.7.** *Um cap maximal em  $AG(3, 3)$  tem 9 pontos.*

*Demonstração.* A demonstração também segue por contradição. Suponha que exista um  $10$ -cap  $\mathcal{C}$  em  $AG(3, 3)$ . O espaço afim finito  $AG(3, 3)$  pode ser decomposto como a união de três planos paralelos  $H_1, H_2, H_3$ . Sabemos pelo Teorema 3.1.1 que um plano pode ter no máximo 4 pontos do  $10$ -cap, portanto, obtemos as seguintes classes paralelas de hiperplanos:  $\{4, 4, 2\}$  ou  $\{4, 3, 3\}$ .

Sejam  $a$  o número de classes paralelas de hiperplanos  $\{4, 4, 2\}$  e  $b$  o número de classes paralelas de hiperplanos  $\{4, 3, 3\}$ . De quantas maneiras diferentes podemos decompor  $AG(3, 3)$  como a união de três planos paralelos? Por um lado, existem  $a + b$  maneiras. Por outro lado, existe uma única reta passando pela origem de  $AG(3, 3)$  que é perpendicular a cada família de três hiperplanos paralelos (ou seja, cujo vetor diretor é proporcional ao vetor normal da família), e podemos contar essas retas como se segue.

Qualquer ponto não nulo determina uma reta passando pela origem e existem  $3^3 - 1 = 26$  pontos não nulos. Como cada reta contém dois pontos não nulos, devem existir  $\frac{26}{2} = 13$  retas passando pela origem e temos

$$a + b = 13. \tag{3.1}$$

Para obter outra equação em função de  $a$  e  $b$ , iremos contar os planos com pares de pontos usando o Lema 3.2.5. Temos  $\sum_j N_2(h_j) = \frac{k(k-1)}{2} \phi(d, 1)$ , onde  $k = 10$  e  $d = 3$ . Assim, existem  $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{3^2 - 1}{2} = 180$  planos com pares de pontos. Por outro lado, pela Definição 3.2.3, para cada classe paralela de hiperplanos  $\{4, 4, 2\}$ , contamos  $2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} = 13$

planos com pares de pontos, e para cada classe paralela de hiperplanos  $\{4, 3, 3\}$  contamos  $\frac{4 \cdot 3}{2} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} = 12$  planos com pares de pontos. Logo, temos

$$13a + 12b = 180. \quad (3.2)$$

Resolvendo o sistema das equações (3.1) e (3.2), temos que a única solução é  $a = 24$  e  $b = -11$ . O que é uma contradição, pois o número de classes paralelas de hiperplanos para uma dada decomposição deve ser não negativo. Portanto, um *cap* maximal em  $AG(3, 3)$  tem 9 pontos.  $\square$

### 3.3 CAPS MAXIMAIS EM $AG(4,3)$

O Teorema a seguir garante que qualquer conjunto de 21 cartas contém um *set*, respondendo à Pergunta 2.1.9.

**Teorema 3.3.1.** *Um cap maximal em  $AG(4, 3)$  tem 20 pontos.*

*Demonstração.* Anteriormente, no Exemplo 2.3.10, exibimos um *20-cap* em  $AG(4, 3)$ . A demonstração seguirá por contradição. Suponha que exista um *21-cap*  $\mathcal{C}$  em  $AG(4, 3)$ . Seja  $\lambda_{xyz}$  o número de classes paralelas de hiperplanos  $\{x, y, z\}$  de  $\mathcal{C}$ . Como um *cap* em  $AG(3, 3)$  tem no máximo 9 pontos, então existem apenas 7 possibilidades de classes paralelas de hiperplanos:

$$\{x, y, z\} = \{9, 9, 3\}, \{9, 8, 4\}, \{9, 7, 5\}, \{9, 6, 6\}, \{8, 8, 5\}, \{8, 7, 6\}, \{7, 7, 7\}.$$

O número de maneiras de decompor  $AG(4, 3)$  como uma união de três hiperplanos paralelos é igual ao número de retas passando pela origem em  $AG(4, 3)$ , que é  $\phi(4, 0) = \frac{3^4 - 1}{2} = 40$ . Assim, temos

$$\lambda_{993} + \lambda_{984} + \lambda_{975} + \lambda_{966} + \lambda_{885} + \lambda_{876} + \lambda_{777} = 40. \quad (3.3)$$

Para obter outra equação em função de  $\lambda_{xyz}$ , vamos contar os hiperplanos com pares de pontos usando o Lema 3.2.5. Temos  $\sum_j N_2(h_j) = \frac{k(k-1)}{2} \phi(d, 1)$ , onde  $k = 21$  e  $d = 4$ . Assim, existem  $\frac{21 \cdot 20}{2} \cdot \frac{3^3 - 1}{2} = 2730$  hiperplanos com pares de pontos. Análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 3.2.7, existem

$$\left(2 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2}\right) \lambda_{993} + \cdots + \left(3 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2}\right) \lambda_{777}$$

hiperplanos com pares de pontos, e explicitando cada coeficiente acima, temos

$$75\lambda_{993} + 70\lambda_{984} + 67\lambda_{975} + 66\lambda_{966} + 66\lambda_{885} + 64\lambda_{876} + 63\lambda_{777} = 2730. \quad (3.4)$$

Para obter outra equação em função de  $\lambda_{xyz}$ , vamos contar os hiperplanos com trios de pontos usando o Lema 3.2.6. Temos  $\sum_j N_3(h_j) = \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \phi(d, 2)$ , onde  $k = 21$

e  $d = 4$ . Assim, existem  $\frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{6} \cdot \frac{3^2 - 1}{2} = 5320$  hiperplanos com trios de pontos. Agora, usando a Definição 3.2.4, existem

$$\left(2 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6}\right) \lambda_{993} + \cdots + \left(3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6}\right) \lambda_{777}$$

hiperplanos com trios de pontos, e explicitando cada coeficiente acima, temos

$$169\lambda_{993} + 144\lambda_{984} + 129\lambda_{975} + 124\lambda_{966} + 122\lambda_{885} + 111\lambda_{876} + 105\lambda_{777} = 5320. \quad (3.5)$$

Agora, temos 3 equações em função de 7 variáveis, e em princípio poderíamos ter infinitas soluções, mas felizmente estamos interessados apenas nas soluções inteiras não negativas. Se somarmos 693 vezes a equação (3.3) a 3 vezes a equação (3.5) e, em seguida, subtrairmos 6 vezes a equação (3.4), obtemos

$$5\lambda_{984} + 8\lambda_{975} + 9\lambda_{966} + 3\lambda_{885} + 2\lambda_{876} = 0. \quad (3.6)$$

A única solução não negativa para a equação (3.6) é  $\lambda_{984} = \lambda_{975} = \lambda_{966} = \lambda_{885} = \lambda_{876} = 0$ . Mas a equação (3.4) menos 63 vezes a equação (3.3) é

$$12\lambda_{993} + 7\lambda_{984} + 4\lambda_{975} + 3\lambda_{966} + 3\lambda_{885} + \lambda_{876} = 210. \quad (3.7)$$

Logo, chegamos em  $12\lambda_{993} = 210$ , isso contradiz  $\lambda_{993}$  ser um número inteiro. Portanto, um *cap* maximal em  $AG(4, 3)$  tem 20 pontos.  $\square$

### 3.4 CAPS MAXIMAIS EM $AG(5, 3)$

Nesta seção, vamos reunir resultados sobre os *caps* maximais em  $AG(5, 3)$  que serão importantes para o que vamos provar sobre *caps* maximais em  $AG(6, 3)$ . Nossas referências para os resultados dessa seção são os artigos [1] e [6].

O resultado a seguir é o Teorema 5 de [1].

**Teorema 3.4.1.** *A cardinalidade de um  $k$ -cap  $\mathcal{K}$  em  $AG(d, q)$ , em que hiperplanos têm no máximo  $c$  pontos, satisfaz*

$$|\mathcal{K}| \leq q^d \frac{1 + cq}{q^d + cq}.$$

Assim, tomando  $d = 5$ ,  $q = 3$  e  $c = 18$ , temos:

**Teorema 3.4.2.** *O tamanho máximo de um  $k$ -cap em  $AG(5, 3)$ , com no máximo 18 pontos em todo hiperplano, é 45.*

Em [8], é construído um *56-cap* em  $PG(5, 3)$  que contém um hiperplano com 11 pontos. Assim, deletando tal hiperplano, obtemos um *45-cap* em  $AG(5, 3)$ . Dessa forma, é

garantido que existe um  $45\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$ . O tamanho máximo de um  $cap$  em  $AG(5, 3)$  fica assegurado então pelo Teorema 3.4.2 se todo  $cap$  maximal em  $AG(5, 3)$  tem no máximo 18 pontos em todo hiperplano. Isso é garantido no Lema 3.4 de [6], cuja prova segue de uma pesquisa computacional testando todos os casos possíveis.

O resultado a seguir também está em [6] (Lema 3.3) e, além de ser usado em [6] para provar que todo  $45\text{-cap}$  é obtido de um  $56\text{-cap}$  em  $PG(5, 3)$  deletando um hiperplano com 11 pontos, nos será ainda útil várias vezes no próximo capítulo.

**Proposição 3.4.3.** *Todo hiperplano em  $AG(5, 3)$  intersecta um  $45\text{-cap}$  em 9, 15 ou 18 pontos.*

*Demonstração.* Seja  $n_i$  a quantidade de hiperplanos em  $AG(5, 3)$  que intersecta um  $k\text{-cap}$  em  $i$  pontos. No Lema 3.2 de [6], os autores provam que se

$$P(i) = (i - 11)(i - 15)(i - 6),$$

então

$$\sum_i P(i)n_i = 0.$$

Dados 3 hiperplanos paralelos com 15 pontos, temos  $3P(15) = 0$ . Ainda, dados 1 hiperplano com 9 pontos paralelo a 2 hiperplanos com 18 pontos, temos  $P(9) + 2P(18) = 0$ . As demais possibilidades de trios de hiperplanos dão somas estritamente positivas.  $\square$

O restante da demonstração do Teorema a seguir em [6] é baseada em uma série de lemas técnicos em que os autores olham para  $caps$  no fecho projetivo  $PG(5, 3)$  e removem pontos para compreender os  $caps$  em  $AG(5, 3)$ .

**Teorema 3.4.4.** *O tamanho máximo de um  $cap$  em  $AG(5, 3)$  é 45 e todo  $45\text{-cap}$  é obtido de um  $56\text{-cap}$  em  $PG(5, 3)$  deletando um hiperplano com 11 pontos. Mais ainda, todo  $45\text{-cap}$  é equivalente em  $AG(5, 3)$  e as possíveis classes paralelas de hiperplanos do  $45\text{-cap}$  são  $\{18, 18, 9\}$  e  $\{15, 15, 15\}$ .*

## 4 CAPS MAXIMAIS EM $AG(6,3)$

Chegamos ao ponto principal deste trabalho. Neste capítulo, vamos estudar *caps* maximais em  $AG(6,3)$ . Nossa estratégia será olhar para os *caps* em  $AG(5,3)$  e analisar como podem ser estendidos para dimensão 6.

As definições a seguir serão usadas neste capítulo.

**Definição 4.0.1.** Seja  $\mathcal{C}$  um *cap*, chamamos de **ponto exterior** um ponto que não pertence a  $\mathcal{C}$ .

**Definição 4.0.2.** Um *cap*  $\mathcal{C}$  é **completo** se  $\mathcal{C} \cup \{v\}$  deixa de ser um *cap*, para todo  $v \in AG(d,3) \setminus \mathcal{C}$ .

**Definição 4.0.3.** Seja  $\{x, y, z\}$  uma classe paralela de hiperplanos de um  $k$ -*cap* em  $AG(d,3)$ . Para cada ponto  $a_1$  no hiperplano com  $y$  pontos, e para cada ponto  $a_2$  no hiperplano com  $z$  pontos, definimos  $a_3 = -a_1 - a_2$ . Chamamos cada um desses  $a_3$  de **ponto fantasma**, e então, existem  $yz$  pontos fantasmas.

Vamos mostrar que não existem  $44$ -*caps* completos em  $AG(5,3)$ . Assim, provaremos que o *cap* maximal em  $AG(6,3)$  tem 112 pontos e que  $112$ -*caps* em  $AG(6,3)$  são únicos a menos de equivalência. Nossa referência principal para isso é o artigo [15] de Potechin.

### 4.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Começamos nossa análise de  $112$ -*caps* mostrando que qualquer *cap* deve admitir uma das várias decomposições em 3 hiperplanos paralelos. A classe paralela de hiperplanos  $\{45, 45, 22\}$  está associada a um  $112$ -*cap* clássico e vamos mostrar que cada uma das outras decomposições pode ser eliminada usando suposições sobre  $44$ -*caps* em  $AG(5,3)$ .

**Teorema 4.1.1.** *Qualquer  $112$ -cap em  $AG(6,3)$  deve ter uma das seguintes classes paralelas de hiperplanos:  $\{45, 45, 22\}$ ,  $\{45, 44, 23\}$ ,  $\{44, 44, 24\}$  ou  $\{45, 43, 24\}$ .*

*Demonstração.* Provamos este teorema utilizando os Lemas 3.2.5 e 3.2.6, aplicando técnicas de combinatória.

Rearranjando os termos dos Lemas 3.2.5 e 3.2.6, temos

$$\sum_h \left[ N_2(h) - \frac{k(k-1)}{2\phi(d,0)} \phi(d,1) \right] = 0$$

$$\sum_h \left[ N_3(h) - \frac{k(k-1)(k-2)}{6\phi(d,0)} \phi(d,2) \right] = 0.$$

*Observação.* Quando rearranjamos estes termos, aparece uma divisão por  $\phi(d,0)$  em ambos os somatórios para corrigir o fato de existirem  $\phi(d,0)$  hiperplanos em  $AG(d,3)$  que contêm a origem.

Como

$$\sum_h \left( \left[ N_2(h) - \frac{k(k-1)}{2\phi(d,0)}\phi(d,1) \right] - \left[ N_3(h) - \frac{k(k-1)(k-2)}{6\phi(d,0)}\phi(d,2) \right] \right) = 0,$$

então não podemos ter todos os termos negativos. Isso implica que, para todos  $a$  e  $b$  inteiros não negativos, deve existir um hiperplano definido por um vetor  $h$  adequado, tal que

$$a \left[ N_2(h) - \frac{k(k-1)}{2\phi(d,0)}\phi(d,1) \right] - b \left[ N_3(h) - \frac{k(k-1)(k-2)}{6\phi(d,0)}\phi(d,2) \right] \geq 0. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) é válida para qualquer  $k$ -cap em  $AG(d,3)$ . Aplicamos isso a um  $112$ -cap em  $AG(6,3)$ . Fazendo  $a = 377$  e  $b = 11$ , pode ser demonstrado utilizando uma busca computacional que o  $112$ -cap deve admitir uma das seguintes classes paralelas de hiperplanos:

1. Uma em que  $x \geq 46$ .
2.  $\{45, 45, 22\}$ .
3.  $\{45, 44, 23\}$ .
4.  $\{44, 44, 24\}$ .
5.  $\{45, 43, 24\}$ .

A primeira possibilidade é descartada, uma vez que não existem  $46$ -caps em  $AG(5,3)$ .  $\square$

## 4.2 ESTUDO DAS CLASSES PARALELAS

Começaremos com alguns fatos sobre o  $45$ -cap em  $AG(5,3)$ . Na Seção 4.1 de [6], os autores provam que qualquer  $45$ -cap em  $AG(5,3)$  tem  $\phi(5,0) = \frac{3^5-1}{2} = 121$  hiperplanos, sendo 55 classes paralelas de hiperplanos  $\{18, 18, 9\}$  e 66 classes paralelas de hiperplanos  $\{15, 15, 15\}$ .

**Lema 4.2.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  um  $k$ -cap em  $AG(d,3)$ . Consideremos um ponto  $p \in AG(d,3)$ . Para um hiperplano  $h_i$  fixo, seja  $s_i$  o número de pontos de  $\mathcal{C}$  que pertencem à mesma classe paralela de hiperplanos (determinada por  $h_i$ ) que  $p$ . Definimos  $s = \sum_{i=1}^{\phi(d,0)} s_i$ . Assim, temos:*

- Se  $p \in \mathcal{C}$ , então  $s = (k-1) \cdot \phi(d,1) + \phi(d,0)$ .
- Se  $p \notin \mathcal{C}$ , então  $s = k \cdot \phi(d,1)$ .

*Demonstração.* Usaremos a Proposição 2.2.4 para demonstrar este resultado.

Se  $p \in \mathcal{C}$ , existe um ponto em  $\mathcal{C}$  (o próprio  $p$ ) que está sempre na mesma classe paralela de hiperplanos que  $p$ . Agora, para cada um dos outros  $k-1$  pontos em  $\mathcal{C}$ ,

existem  $\phi(d, 1)$  classes paralelas de hiperplanos contendo tanto  $p$  quanto esse ponto. Então,  $s = (k - 1) \cdot \phi(d, 1) + \phi(d, 0)$ .

Se  $p \notin \mathcal{C}$ , então para cada um dos  $k$  pontos em  $\mathcal{C}$ , existem  $\phi(d, 1)$  classes paralelas de hiperplanos contendo tanto  $p$  quanto esse ponto. Assim,  $s = k \cdot \phi(d, 1)$ .  $\square$

Aplicando esse resultado para o  $45\text{-cap}$ , obtemos:

**Lema 4.2.2.** *Cada ponto exterior aparece em 20 dos 55 hiperplanos paralelos que intersectam o  $45\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$  em 9 pontos.*

*Demonstração.* Usando o Lema 4.2.1, temos

$$\begin{aligned} s &= k \cdot \phi(d, 1) \\ \sum_{i=1}^{\phi(5,0)} s_i &= 45 \cdot \phi(5, 1) \\ \sum_{i=1}^{121} s_i &= 45 \cdot \frac{3^4 - 1}{2} \\ \sum_{i=1}^{121} s_i &= 45 \cdot 40 = 1800. \end{aligned}$$

Agora, vamos considerar as classes paralelas de hiperplanos para calcular o lado esquerdo da equação acima.

Para as 66 classes paralelas de hiperplanos  $\{15, 15, 15\}$ , podemos afirmar que existem 15 pontos no mesmo hiperplano paralelo que um ponto  $p$  qualquer (não importa em que hiperplano paralelo o  $p$  esteja). Assim, 66 parcelas são iguais a 15.

Agora, vamos para as 55 classes paralelas de hiperplanos  $\{18, 18, 9\}$ . Seja  $x$  o número de vezes que um ponto  $p$  exterior ao  $45\text{-cap}$  aparece em um hiperplano paralelo que intersecta o  $45\text{-cap}$  em 9 pontos. Então,  $x$  é o número de parcelas iguais a 9. Restam então  $55 - x$  parcelas e, por serem hiperplanos paralelos  $\{18, 18, 9\}$ , cada uma delas vale 18.

Portanto, temos

$$\sum_{i=1}^{121} s_i = 66 \cdot 15 + 9x + 18(55 - x) = 1980 - 9x$$

$$1980 - 9x = 1800 \Rightarrow x = 20.$$

$\square$

**Lema 4.2.3.** *Cada ponto que pertence ao  $45\text{-cap}$  aparece em 11 dos 55 hiperplanos paralelos que intersectam o  $45\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$  em 9 pontos.*

*Demonstração.* Usando o Lema 4.2.1, temos

$$\begin{aligned}
 s &= (k-1) \cdot \phi(d, 1) + \phi(d, 0) \\
 \sum_{i=1}^{\phi(5,0)} s_i &= 44 \cdot \phi(5, 1) + \phi(5, 0) \\
 \sum_{i=1}^{121} s_i &= 44 \cdot \frac{3^4 - 1}{2} + \frac{3^5 - 1}{2} \\
 \sum_{i=1}^{121} s_i &= 44 \cdot 40 + 121 \\
 \sum_{i=1}^{121} s_i &= 1881.
 \end{aligned}$$

Seja  $x$  o número de vezes que um ponto  $p$  que pertence ao  $45\text{-cap}$  aparece em um hiperplano paralelo que intersecta o  $45\text{-cap}$  em 9 pontos. Como calculado no Lema 4.2.2, temos que  $\sum_{i=1}^{121} s_i = 66 \cdot 15 + 9x + 18(55 - x) = 1980 - 9x$ .

Portanto, obtemos

$$1980 - 9x = 1881 \Rightarrow x = 11.$$

□

**Teorema 4.2.4.** *Se existe uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 44, 23\}$  para um  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$ , então existe um  $44\text{-cap}$  completo em  $AG(5, 3)$ .*

*Demonstração.* Vamos usar o Lema 4.2.2 para olhar para a classe paralela de hiperplanos  $\{45, m, r\}$  em  $AG(6, 3)$ .

Pela Definição 4.0.3, temos que existem  $mr$  pontos fantasmas. Cada um desses pontos fantasmas deve ser um ponto exterior ao  $45\text{-cap}$ , caso contrário, teríamos três pontos colineares num  $cap$ .

Para facilitar, comecemos com o  $45\text{-cap}$  no espaço  $AG(5, 3)$ . Em outras palavras, se  $v$  pertence ao  $45\text{-cap}$  então  $v = (v_1, \dots, v_5, v_6 = 0)$ . Analogamente, se  $v$  pertence ao hiperplano paralelo que intersecta o  $cap$  em  $m$  pontos, então  $v_6 = 1$ . E, se  $v$  pertence ao hiperplano paralelo que intersecta o  $cap$  em  $r$  pontos, então  $v_6 = 2$ .

Agora, observemos dentro do  $45\text{-cap}$ . Seja  $h = (h_1, \dots, h_5)$  um vetor do  $45\text{-cap}$  que divide-o em um hiperplano com 9 pontos paralelo a dois hiperplanos paralelos com 18 pontos, ou seja, que determina a classe paralela  $\{18, 18, 9\}$ . Seja  $v = (v_1, \dots, v_5)$  um vetor que está no hiperplano paralelo com 9 pontos. Podemos subtrair  $v = (v_1, \dots, v_5, v_6 = 0)$  de todos os vetores do  $cap$  em  $AG(6, 3)$ , e ele continuará sendo um  $cap$ . Após fazer isso, retornando para dentro do  $45\text{-cap}$ , sejam  $u$  e  $w$  dois vetores do  $cap$  original. Sejam

$u' = u - v$  e  $w' = w - v$ . Se  $hu = hw$ , então

$$\begin{aligned} hu' &= hu - hv \\ &= hw - hv \\ &= hw'. \end{aligned}$$

Ou seja, se  $u$  e  $v$  estavam no mesmo hiperplano paralelo no antigo *cap*, então  $u'$  e  $w'$  estarão no mesmo hiperplano paralelo no novo *cap*. Mas,  $v' = v - v = 0$ , então se  $w$  estava no hiperplano paralelo com 9 pontos no antigo *cap*, temos que  $hw' = hv' = 0$ .

Retornando ao *cap* em  $AG(6, 3)$ , construímos um hiperplano  $\tilde{h} = (h_1, \dots, h_5, \gamma)$  onde escolheremos  $\gamma$  depois. Aqui,  $\tilde{h}$  é um hiperplano do *cap* em  $AG(6, 3)$  que subdivide o *45-cap* em uma classe paralela  $\{18, 18, 9\}$ , com o hiperplano com 9 pontos no topo.

Para um  $\gamma$  dado, definimos  $N(\alpha, \beta, \gamma)$  como sendo o número de pontos  $v$  no *cap* tal que  $v_6 = \alpha$  e  $\tilde{h}v = \beta$ . Podemos representar isso graficamente como:

$N(0, 0, \gamma)$	$N(1, 0, \gamma)$	$N(2, 0, \gamma)$
$N(0, 1, \gamma)$	$N(1, 1, \gamma)$	$N(2, 1, \gamma)$
$N(0, 2, \gamma)$	$N(1, 2, \gamma)$	$N(2, 2, \gamma)$

Para todo  $\gamma$ , temos  $N(0, 0, \gamma) = 9$ ,  $N(0, 1, \gamma) = 18$  e  $N(0, 2, \gamma) = 18$ . Além disso,  $N(1, \beta, \gamma) = N(1, \beta - \gamma, 0)$ , pois se  $v_6 = 1$  e  $(h_1, \dots, h_5, 0)v = \beta - \gamma$ , então  $(h_1, \dots, h_5, \gamma)v = \beta$ .

Podemos escolher  $\gamma$  de modo que  $N(1, 0, \gamma) \geq N(1, 1, \gamma)$  e  $N(1, 0, \gamma) \geq N(1, 2, \gamma)$ . Por fim, se  $N(1, 2, \gamma) \geq N(1, 1, \gamma)$ , peguemos  $\tilde{h}' = -\tilde{h}$ . Usando este hiperplano, troca-se  $N(\alpha, 1, \gamma)$  por  $N(\alpha, 2, \gamma)$  para todo  $\alpha$ , de modo que  $N(1, 1, \gamma) \geq N(1, 2, \gamma)$ , enquanto todo o restante que observamos é preservado.

Os valores candidatos para as contagens  $N(\alpha, \beta, \gamma)$  são mostrados abaixo, onde  $x \geq y \geq z$ ,  $x + y + z = m$  e  $a + b + c = r$ .

9	$x$	$a$
18	$y$	$b$
18	$z$	$c$

Definimos  $f_h = xa + yc + zb$  como sendo o número de pontos fantasmas no hiperplano paralelo com 9 pontos do *45-cap*. Usando o Lema 4.2.2, obtemos  $\sum_h f_h = 20mr$ , onde a soma é realizada sobre as 55 classes paralelas de hiperplanos  $\{18, 18, 9\}$  do hiperplano com 45 pontos. Como o valor médio de  $f_h$  é  $\frac{20}{55}mr$ , deve existir pelo menos um  $h$  tal que  $f_h \geq \frac{20}{55}mr$ .

Consideremos o caso em que  $m = 44$  e  $r = 23$ . Deve existir um  $h$  tal que

$$f_h \geq \frac{20}{55}mr = \frac{20}{55} \cdot 44 \cdot 23 = 368.$$

Lembremos que todos os  $45$ -caps em  $AG(5, 3)$  têm apenas classes paralelas de hiperplanos  $\{18, 18, 9\}$  e  $\{15, 15, 15\}$ , e que não existem  $46$ -caps em  $AG(5, 3)$ . Note que três entradas  $d, e, f$  na mesma linha ou coluna formam uma divisão de um hiperplano paralelo, e o mesmo é verdade para elementos em linhas e colunas distintas. Assumamos que não existem  $44$ -caps completos em  $AG(5, 3)$ , de modo que todo  $44$ -cap é obtido ao deletar um ponto de um  $45$ -cap. Os casos possíveis são os seguintes:

1.  $x = 18, y = 18$  e  $z = 8$ .

9	18	$a \leq 9$
18	18	$b \geq 5$
18	8	$c \leq 9$

Temos que

$$\begin{aligned}
 f_h &= 18a + 18c + 8b \\
 &= 18(a + b + c) - 10b \\
 &= 414 - 10b .
 \end{aligned}$$

Como  $b \geq 5$ , segue que  $f_h \leq 414 - 50 = 364$ , e nesse caso, não podemos ter  $f_h \geq 368$ .

2.  $x = 18, y = 17$  e  $z = 9$ .

9	18	$a \leq 9$
18	17	$b \geq 5$
18	9	$c \leq 9$

Temos que

$$\begin{aligned}
 f_h &= 18a + 17c + 9b \\
 &= 17(a + b + c) + a - 8b \\
 &= 391 + a - 8b .
 \end{aligned}$$

Como  $a \leq 9$  e  $b \geq 5$ , segue que  $f_h \leq 391 + 9 - 40 = 360$ , e também nesse caso, não podemos ter  $f_h \geq 368$ .

3.  $x = 15, y = 15$  e  $z = 14$ .

Temos que  $f_h = 15a + 15c + 14b \leq 15(a + b + c) = 15 \cdot 23 = 345$ , e então concluímos que não podemos ter  $f_h \geq 368$ .

*Observação.* Note que nos casos 1. e 2. acima temos que  $a \leq 9, b \geq 5$  e  $c \leq 9$ . A razão para isso é a seguinte. Suponhamos que  $b < 5$ , como  $a + b + c = 23$  então  $a + c \geq 19$ . Mas isso implicaria em  $a \geq 10$  ou  $c \geq 10$ , e então seria criado um  $46$ -cap, o que é uma contradição pois não existem  $46$ -caps em  $AG(5, 3)$ . Logo, temos  $b \geq 5 \Rightarrow a + c \leq 18 \Rightarrow a \leq 9$  e  $c \leq 9$ .

Assim, se não existem  $44$ -caps completos, não podemos ter um  $112$ -cap com uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 44, 23\}$ .  $\square$

Na demonstração do Teorema 4.2.6, vamos precisar considerar caps como conjuntos ponderados. Por enquanto, em vez de cada ponto ter um peso de 0 (ponto fora do conjunto) ou 1 (ponto dentro do conjunto), permitamos que cada ponto tenha qualquer peso que seja um número inteiro não-negativo.

Aqui, o número total de pontos passa a ser a soma de todos esses pesos, e cada classe paralela de hiperplanos é agora determinada pela soma dos pesos dentro de cada hiperplano paralelo.

**Lema 4.2.5.** *Para qualquer conjunto ponderado, se o número total de pontos for congruente a 1 (mod 3), existe um ponto tal que adicionar 2 ao seu valor cria-se um novo conjunto ponderado em que, para qualquer classe paralela de hiperplanos  $\{x, y, z\}$ , tem-se  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ . De maneira semelhante, se o número total de pontos for congruente a 2 (mod 3), existe um ponto tal que adicionar 1 ao seu valor cria-se um novo conjunto ponderado em que, para qualquer classe paralela de hiperplanos  $\{x, y, z\}$ , tem-se  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ .*

*Demonstração.* Olharemos para os pontos como sendo as colunas de uma matriz com multiplicidades. A condição que estabelece que para qualquer classe paralela de hiperplanos  $\{x, y, z\}$ , tem-se  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$  é equivalente a seguinte condição: para todos vetores  $v$ , se  $x$  é o número de colunas  $c$  tal que  $v \cdot c = 0$ ,  $y$  é o número de colunas  $c$  tal que  $v \cdot c = 1$  e  $z$  é o número de colunas  $c$  tal que  $v \cdot c = 2$ , então  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ .

Seja  $s$  a soma de todas as colunas. Então,  $s \cdot v = y + 2z$ . Se houver  $3n$  pontos, temos que  $x + y + z \equiv 0 \pmod{3}$ . Assim  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$  se, e somente se,  $y \equiv z \pmod{3}$ , o que ocorre exatamente quando  $s \cdot v = y + 2z \equiv 0 \pmod{3}$ .

Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , adicionamos duas vezes a coluna  $s$  ao conjunto ponderado. Se  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , adicionamos uma vez a coluna  $-s$  ao conjunto ponderado.

Portanto, podemos sempre escolher o ponto de forma que adicioná-lo uma vez (ou duas vezes) torne  $s \equiv 0 \pmod{3}$  para o novo conjunto ponderado. Como mostrado acima, isso é suficiente para garantir que, para qualquer classe paralela de hiperplanos  $\{x, y, z\}$  do novo conjunto ponderado, tem-se  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ .  $\square$

**Teorema 4.2.6.** *Se existe uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 43, 24\}$  para um  $112$ -cap em  $AG(6, 3)$ , então existe um  $44$ -cap completo em  $AG(5, 3)$ .*

*Demonstração.* Assumamos que não existem  $44$ -caps completos em  $AG(5, 3)$ . Assim, todo  $44$ -cap é obtido através de um  $45$ -cap menos 1 ponto. Nesse caso, como na demonstração do Teorema 4.2.4, observamos que o  $44$ -cap só pode ter as seguintes classes paralelas de hiperplanos:  $\{18, 18, 8\}$ ,  $\{18, 17, 9\}$  e  $\{15, 15, 14\}$ .

Agora, o valor médio de  $f_h$  é  $f_{med} = \frac{20}{55}mr = \frac{20}{55} \cdot 43 \cdot 24 = \frac{20640}{55} = \frac{4128}{11}$ . Entretanto, como será mostrado, isso não é suficiente para excluir essa classe paralela de hiperplanos, então precisamos de outra condição. Seja  $p$  o ponto descrito no Lema 4.2.5 no hiperplano paralelo do meio de alguma classe paralela no espaço todo, esse ponto pode ou não estar no  $cap$ .

Agora, consideremos os pontos no hiperplano paralelo à esquerda da mesma classe que  $p$  e que são colineares com  $p$  (esses pontos podem ou não estarem no  $cap$ ) e um ponto no hiperplano paralelo à direita da mesma classe que  $p$  e que está no  $cap$ . Pelos Lemas 4.2.2 e 4.2.3, em  $AG(5, 3)$  um ponto que pertence ao  $45-cap$  aparece em 11 hiperplanos paralelos que intersectam o  $45-cap$  em 9 pontos e um ponto que não pertence ao  $45-cap$  aparece em 20 hiperplanos paralelos que intersectam o  $45-cap$  em 9 pontos. Em ambos os casos, esses pontos aparecem no máximo 20 vezes nos hiperplanos paralelos com 9 pontos.

Seja  $g_h$  a quantidade desses pontos no hiperplano paralelo à direita da mesma classe paralela do hiperplano com 9 pontos. Este hiperplano com 9 pontos é o que subdivide o hiperplano à esquerda para uma dada classe paralela de hiperplanos. Temos que  $g_{med} \leq \frac{20}{55} \cdot 24 = \frac{96}{11}$ .

Aplicando as mesmas transformações, se necessário, como na demonstração do Teorema 4.2.4, as contagens  $N(\alpha, \beta, \gamma)$  são mostradas abaixo, onde  $x \geq y \geq z$ ,  $x+y+z = 43$  e  $a + b + c = 24$ .

9	$x$	$a$
18	$y$	$b$
18	$z$	$c$

Note que  $x \geq 15$ . Caso contrário, como  $x + y + z = 43$ , então teríamos que ter  $y$  ou  $z$  maior que  $x$ , o que é uma contradição. Agora, vamos analisar os possíveis casos:

1. Vamos considerar os casos quando  $x \leq 18$ .

Primeiro, vamos provar que  $a \geq 3$ ,  $b \geq 3$  e  $c \geq 3$ . Para tal, suponhamos que  $a \leq 2$ ,  $b \leq 2$  ou  $c \leq 2$ . Então,  $a \geq 11$ ,  $b \geq 11$  ou  $c \geq 11$ . Agora, como  $15 \leq x \leq 18$  então a única possibilidade é  $a \geq 11$ , caso contrário,  $b \geq 11$  ou  $c \geq 11$ , o que pode criar um  $44-cap$  em que a classe paralela difere das únicas possíveis (isto é,  $\{18, 18, 8\}$ ,  $\{18, 17, 9\}$  ou  $\{15, 15, 14\}$ ), ou seja, teríamos um  $44-cap$  completo. Entretanto, se  $a = 11$  então precisamos que  $b \geq 11$  ou  $c \geq 11$ , o que é uma contradição (pelo mesmo motivo acima). E também, se  $a \geq 13$ , então  $y \leq 12$  e  $z \leq 12$ , dando  $x \geq 19$ , que é uma contradição. Assim,  $a = 12$  e precisamos que  $b = 10$  ou  $c = 10$ , entretanto, em ambos casos precisamos que  $x = 15$ . Mas isso implica  $y \geq 14$ , que é uma contradição pois novamente seria criado um  $44-cap$  completo. Assim, nossa suposição inicial é um absurdo, então temos que  $a \geq 3$ ,  $b \geq 3$  e  $c \geq 3$ , logo,  $g_h \geq 3$ . Agora, olhando para  $f_h$ , os casos possíveis são os seguintes:

a)  $x = 15$ .

Temos que  $f_h \leq 15 \cdot 24 = 360$ .

b)  $x \geq 16$  e  $y \geq 16$ .

Temos que  $a \leq 9$ ,  $c \leq 9$  e  $b \geq 6$ . Como maximizar  $a$  e  $c$  maximiza  $f_h$ , então  $f_h \leq 9x + 9y + 6z = 9(x + y + z) - 3z = 387 - 3z$ . Entretanto,  $z \geq 7$ , caso contrário, teríamos que ter  $x + y > 36$ , daí  $x > 18$  ou  $y > 18$ , mas estamos considerando os casos em que  $x \leq 18$ , logo devemos ter  $y > 18$ , que também é uma contradição, pois temos que  $x \geq y$ . Então,  $f_h \leq 387 - 21 = 366$ .

c)  $x \geq 16$  e  $y \leq 15$ .

Temos que  $a \leq 25 - y$ ,  $c \leq 9$  e  $b \geq y - 10$ , caso contrário, é criado um  $44$ -*cap* completo ou um *cap* inadmissível. Como maximizar  $a$  e  $c$  maximiza  $f_h$ , então

$$\begin{aligned} f_h &\leq (25 - y)x + 9y + (y - 10)z \\ &\leq 25x - yx + 9y + (y - 10)(43 - x - y) \\ &\leq 25x - yx + 9y + 43y - xy - y^2 - 430 + 10x + 10y \\ &\leq (35 - 2y)x + 62y - y^2 - 430. \end{aligned}$$

Mas  $y \leq 15$ , então independentemente do valor de  $y$  devemos escolher  $x$  maior possível, que é  $x = 18$ . Então,  $f_h \leq 630 - 36y + 62y - y^2 - 430 = 200 + 26y - y^2$ , que atinge o valor máximo quando  $y = 13$ . Assim,  $f_h \leq 369$ .

Em todos esses casos,  $f_h \leq 369$ .

2. Vamos considerar os casos quando  $x \geq 19$ .

a) Para  $x = 20$ , temos que  $b \leq 5$  e  $c \leq 5$ , caso contrário, é criado um  $44$ -*cap* completo. Assim  $a \geq 14$ , e então,  $y \leq 11$  e  $z \leq 11$ . Com isso,  $x + y + z \leq 42$ , o que é uma contradição.

b) Para  $x = 19$  e  $a \geq 14$ , temos que  $y \leq 11$  e  $z \leq 11$ . Então,  $x + y + z \leq 41$ , o que novamente é uma contradição.

c) Para  $x = 19$  e  $a = 13$ , como precisamos que  $y + z = 24$ , então  $y = z = 12$ . Caso contrário, ou seja, se  $y > 12$  ou  $z > 12$ , é criado um  $44$ -*cap* completo. Além disso, temos que  $b = 6$  e  $c = 5$  ou  $b = 5$  e  $c = 6$ . Entretanto, como mostrado antes, trocar duas linhas é uma transformação afim válida, então ambas possibilidades são equivalentes a

9	19	13
18	12	6
18	12	5

com  $f_h = 19 \cdot 13 + 12 \cdot 6 + 12 \cdot 5 = 247 + 72 + 60 = 379$ . Como o ponto  $p$ , que é o ponto descrito no Lema 4.2.5, está no hiperplano com 19 pontos, temos que  $g_h = 13$ . Chamaremos este quadrado de interseção de  $I_1$ .

- d) Para  $x = 19$  e  $a = 12$ , como precisamos que  $b + c = 12$ , então  $b = c = 6$ . Caso contrário, ou seja, se  $b > 6$  ou  $c > 6$ , é criado um  $44$ -cap completo. Adicionalmente, temos que  $y$  pode ser 12 ou 13. Assim, temos as seguintes possibilidades

9	19	12
18	12 ou 13	6
18	12 ou 11	6

com  $f_h = 19 \cdot 12 + 12 \cdot 6 + 12 \cdot 6$  ou  $f_h = 19 \cdot 12 + 13 \cdot 6 + 11 \cdot 6$ , em ambos os casos temos  $f_h = 372$ , e  $g_h = 12$  ou 6, respectivamente. Chamaremos esses quadrados de interseção de  $I_2$  e  $I_3$ , respectivamente.

- e) Para  $x = 19$  e  $a \leq 11$ , suponha, sem perda de generalidade, que  $y \leq 14$ , então  $z \geq 10$ . Como  $b + c \geq 13$ , então  $b \geq 7$  ou  $c \geq 7$ , mas em ambos os casos obtemos um  $44$ -cap completo, o que é uma contradição.

Agora, precisamos de uma combinação linear dos quadrados de interseção tal que  $f_{med} = \frac{4128}{11}$  e  $g_{med} \leq \frac{96}{11}$ . Apenas o quadrado de interseção  $I_1$  tem  $f_h > \frac{4128}{11}$ , então os números desse quadrado são completamente determinados pelos outros. Criando uma base para o espaço com  $f_{med} = \frac{4128}{11}$ , temos:

- 1) se apenas os quadrados de interseção  $I_1, I_2$  e  $I_3$  ocorrerem, temos  $\frac{4128}{11} - 372 = \frac{36}{11}$  de  $I_1$  e  $379 - \frac{4128}{11} = \frac{41}{11}$  de  $I_2$  ou  $I_3$ . Isso nos dá

$$g_{med} \geq \frac{\frac{36}{11} \cdot 13 + \frac{41}{11} \cdot 6}{7} = \frac{102}{11}.$$

- 2) se alguns quadrados de interseção diferentes de  $I_1, I_2$  e  $I_3$  ocorrerem, temos  $379 - \frac{4128}{11} = \frac{41}{11}$  de alguns outros quadrados de interseção e pelo menos  $\frac{4128}{11} - 369 = \frac{69}{11}$  de  $I_1$ . Isso nos dá

$$g_{med} \geq \frac{\frac{69}{11} \cdot 13 + \frac{41}{11} \cdot 3}{10} = \frac{102}{11}.$$

Assim, não existem tais combinações.

Portanto, se não existem  $44$ -caps completos, não existem  $112$ -caps em  $AG(6, 3)$  que possuem uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 43, 24\}$ .  $\square$

**Teorema 4.2.7.** *Se existe uma classe paralela de hiperplanos  $\{44, 44, 24\}$  para um  $112$ -cap em  $AG(6, 3)$ , então existe um  $44$ -cap completo em  $AG(5, 3)$ .*

*Demonstração.* Assumamos que não existem  $44$ -caps completos em  $AG(5, 3)$ , então todo  $44$ -cap é obtido ao deletar um ponto de um  $45$ -cap.

Sem perda de generalidade, suponhamos que o  $45^{\circ}$  ponto é adicionado ao hiperplano paralelo da esquerda (em  $\{44, 44, 24\}$ ). Depois, contamos o número de vezes que um ponto fantasma está em um hiperplano paralelo com 9 pontos. Pelo Lema 4.2.2, se o ponto fantasma é um ponto exterior então ele aparece em 20 hiperplanos paralelos que intersectam o  $45$ -cap em 9 pontos.

Se o ponto fantasma coincide com o ponto que estende o  $44$ -cap, pelo Lema 4.2.3, ele aparece em 11 hiperplanos paralelos que intersectam o  $45$ -cap em 9 pontos. Seja  $\lambda$  o número de pontos fantasmas que coincide com o ponto que estende o  $44$ -cap e seja  $N$  o número total de vezes que um ponto fantasma está em um hiperplano paralelo com 9 pontos.

Então,  $N = (44 \cdot 24 - \lambda) \cdot 20 + 11\lambda = 21120 - 9\lambda$ . Agora,  $\lambda \leq 24$  assim  $N \geq 21120 - 9 \cdot 24 = 20904$ , e deve existir pelo menos um hiperplano paralelo com 8 ou 9 pontos do  $44$ -cap que tem pelo menos  $\frac{N}{55} > \frac{20904}{55} \cong 380,07$  pontos fantasmas. Assim, o número de pontos fantasmas no hiperplano paralelo com 8 ou 9 pontos é

$$f_h \geq 381. \quad (4.2)$$

Seja  $h$  o hiperplano do  $44$ -cap que define uma classe paralela de hiperplanos que divide o  $44$ -cap nesse hiperplano paralelo com 8 ou 9 pontos e em dois hiperplanos paralelos com 17 ou 18 pontos.

Aplicando as transformações descritas acima, as contagens  $N(\alpha, \beta, \gamma)$  são da forma:

8 ou 9	$x$	$a$
17 ou 18	$y$	$b$
17 ou 18	$z$	$c$

onde  $x \geq y \geq z$ ,  $x + y + z = 44$  e  $a + b + c = 24$ .

Como o  $44$ -cap é obtido removendo um ponto de um  $45$ -cap, ele só pode ter classes paralelas de hiperplanos  $\{15, 15, 14\}$ ,  $\{18, 17, 9\}$  e  $\{18, 18, 8\}$ .

Se  $x = 15, y = 15$  e  $z = 14$ , então

$$f_h = 15a + 15c + 14b = 15(a + b + c) - b = 15 \cdot 24 - b = 360 - b,$$

logo  $f_h \leq 360$ , o que contradiz (4.2).

Se  $x = 18$  e  $y \geq 17$ , então  $a \leq 9$ ,  $6 \leq b \leq 9$  e  $c \leq 9$ . Caso contrário, será criado um  $44$ -cap completo ou um cap inadmissível. Agora, como maximizar  $a$  e  $c$  maximiza  $f_h$ , então

$$f_h \leq 9x + 9y + 6z = 9(x + y + z) - 3z = 9 \cdot 44 - 3z = 396 - 3z.$$

Entretanto,  $z \geq 8$ , então  $f_h \leq 396 - 3 \cdot 8 = 372$ , novamente contradizendo (4.2).

Portanto, se existe uma classe paralela de hiperplanos  $\{44, 44, 24\}$  para um  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$ , então existe um  $44\text{-cap}$  completo em  $AG(5, 3)$ .  $\square$

Se não houver  $44\text{-caps}$  completos em  $AG(5, 3)$ , eliminamos as classes paralelas de hiperplanos  $\{45, 44, 23\}$ ,  $\{45, 43, 24\}$  e  $\{44, 44, 24\}$  para  $112\text{-caps}$  em  $AG(6, 3)$ .

**Corolário 4.2.8.** *Se não houver  $44\text{-caps}$  completos em  $AG(5, 3)$ , então qualquer  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$  deve ter pelo menos uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 45, 22\}$ .*

Na próxima seção, vamos mostrar que, de fato, não há  $44\text{-caps}$  completos em  $AG(5, 3)$ .

### 4.3 ESTUDO DOS $44\text{-CAPS}$ EM $AG(5, 3)$

Nessa seção, estamos interessados em provar que não existem  $44\text{-caps}$  completos em  $AG(5, 3)$ . Para isso, vamos estudar as possíveis classes paralelas de hiperplanos do  $44\text{-cap}$ . Mas, primeiro, vamos lembrar algumas propriedades de  $\text{caps}$  em  $AG(4, 3)$ .

Sabemos que o  $\text{cap}$  maximal em  $AG(4, 3)$  tem cardinalidade 20 e que é único a menos de transformações afins. Além disso, existem 30 classes paralelas de hiperplanos  $\{8, 6, 6\}$  e 10 classes paralelas de hiperplanos  $\{9, 9, 2\}$ .

Ainda, todo  $19\text{-cap}$  em  $AG(4, 3)$  pode ser estendido para um  $20\text{-cap}$  e o  $20\text{-cap}$  é único a menos de transformações afins. Assim, é possível concluir que o  $19\text{-cap}$  tem 1 classe paralela de hiperplanos  $\{9, 9, 1\}$ , 9 classes paralelas de hiperplanos  $\{9, 8, 2\}$ , 12 classes paralelas de hiperplanos  $\{7, 6, 6\}$  e 18 classes paralelas de hiperplanos  $\{8, 6, 5\}$ .

O Teorema a seguir foi provado em [15] usando tais observações para proceder uma busca computacional analisando os possíveis quadrados de interseção das possíveis classes paralelas  $\{20, m, r\}$  e  $\{19, m, r\}$  de um  $44\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$ .

**Teorema 4.3.1.** *Nenhum  $44\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$  possui um hiperplano com 19 ou 20 pontos.*

Assim, excluímos a possibilidade de um  $44\text{-cap}$  que contenha um hiperplano paralelo com 19 ou 20 pontos. Portanto, qualquer  $44\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$  pode ter, no máximo, hiperplanos paralelos com 18 pontos. Esse é o ponto de partida do Teorema principal dessa seção.

**Teorema 4.3.2.** *Não existem  $44\text{-caps}$  completos em  $AG(5, 3)$ .*

*Demonstração.* A demonstração prossegue em várias etapas.

As possíveis classes paralelas de hiperplanos são:

$$\{18, 18, 8\}, \{18, 17, 9\}, \{18, 16, 10\}, \{18, 15, 11\}, \{18, 14, 12\}, \{18, 13, 13\}, \{17, 17, 10\},$$

$\{17, 16, 11\}, \{17, 15, 12\}, \{17, 14, 13\}, \{16, 16, 12\}, \{16, 15, 13\}, \{16, 14, 14\}$  e  $\{15, 15, 14\}$ .

Consideremos os Lemas 3.2.5 e 3.2.6. Essas equações fornecem os valores médios de  $N_2$  e  $N_3$ . Para cada classe paralela de hiperplanos, analisemos quanto esses valores diferem das médias.

Por exemplo, para a classe  $\{18, 18, 8\}$ , que é determinada por algum  $h_j$ ,  $1 \leq j \leq 121$ , temos o seguinte. Primeiro, vamos usar a Definição 3.2.4 e o Lema 3.2.6:

$$N_3(h_j) = 2 \cdot \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 1688$$

$$\sum_{j=1}^{121} N_3(h_j) = \frac{44 \cdot 43 \cdot 42}{6} \cdot \frac{3^3 - 1}{2} = 172172.$$

Como temos 121 classes no total, obtemos

$$N_{3_{med}} = \frac{172172}{121},$$

e assim, temos

$$121(N_3(h_j) - N_{3_{med}}) = 121 \left( 1688 - \frac{172172}{121} \right) = 121 \left( \frac{204248 - 172172}{121} \right) = 32076.$$

Agora, vamos usar a Definição 3.2.3 e o Lema 3.2.5:

$$N_2(h_j) = 2 \cdot \frac{18 \cdot 17}{2} + \frac{8 \cdot 7}{2} = 334$$

$$\sum_{j=1}^{121} N_2(h_j) = \frac{44 \cdot 43}{2} \cdot \frac{3^4 - 1}{2} = 37840.$$

Como temos 121 classes no total, obtemos

$$N_{2_{med}} = \frac{37840}{121},$$

e assim, temos

$$121(N_2(h_j) - N_{2_{med}}) = 121 \left( 334 - \frac{37840}{121} \right) = 121 \left( \frac{40414 - 37840}{121} \right) = 2574.$$

Fazendo isso para todas as classes, os resultados são:



Se existe um vetor que satisfaz os Lemas 3.2.5 e 3.2.6, ele deve ser uma combinação linear dos vetores acima.

Para um  $cap$  em  $AG(5, 3)$ , também temos a condição de que  $\sum_{i=1}^{14} \delta_i = 121$ , uma vez que existem 121 classes paralelas de hiperplanos. Essa condição pode ser usada para reduzir o espaço de soluções para um espaço vetorial de 11 dimensões. Contudo, isso não oferece uma simplificação substancial. Assim, vamos precisar, mais uma vez, considerar o  $cap$  como um conjunto ponderado.

Pelo Lema 4.2.5, para qualquer  $44-cap$  possível em  $AG(5, 3)$ , existe um ponto tal que, ao adicionar 1 ao seu peso, cria-se um conjunto ponderado (não necessariamente um  $cap$ ) em que, para qualquer uma de suas classes paralelas de hiperplanos  $\{x, y, z\}$ , tem-se  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ . Chamaremos esse ponto de  $c$ .

Para cada classe paralela de hiperplanos possível, vamos ver onde  $c$  deve estar. Para isso, dada uma classe paralela  $\{x, y, z\}$ , como queremos que  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ , basta ver qual entre  $x, y, z$  não é congruente e colocar o ponto nesse hiperplano.

Classe	hiperplano que $c$ deve estar
$\{18, 18, 8\}$	hiperplano com 8 pontos
$\{15, 15, 14\}$	hiperplano com 14 pontos
$\{18, 17, 9\}$	hiperplano com 17 pontos
$\{18, 16, 10\}$	hiperplano com 18 pontos
$\{18, 15, 11\}$	hiperplano com 11 pontos
$\{18, 14, 12\}$	hiperplano com 14 pontos
$\{18, 13, 13\}$	hiperplano com 18 pontos
$\{17, 17, 10\}$	hiperplano com 10 pontos
$\{17, 16, 11\}$	hiperplano com 16 pontos
$\{17, 15, 12\}$	hiperplano com 17 pontos
$\{17, 14, 13\}$	hiperplano com 13 pontos
$\{16, 16, 12\}$	hiperplano com 12 pontos
$\{16, 15, 13\}$	hiperplano com 15 pontos
$\{16, 14, 14\}$	hiperplano com 16 pontos

Agora, vamos combinar isso com o Lema 4.2.1. Aplicando-o a um  $44-cap$  em  $AG(5, 3)$ , temos:

- Se  $c$  não estiver no  $44-cap$ ,  $s = 44 \cdot \phi(5, 1) = 1760$  e o número médio de pontos do  $cap$  que estão no mesmo hiperplano que  $c$  é  $\frac{s}{\phi(5,0)} = \frac{1760}{121} = \frac{160}{11}$ .
- Se  $c$  estiver no  $44-cap$ ,  $s = 43 \cdot \phi(5, 1) + \phi(5, 0) = 1841$  e o número médio de pontos do  $44-cap$  que estão no mesmo hiperplano que  $c$  é  $\frac{s}{\phi(5,0)} = \frac{1841}{121}$ .



9. O vetor  $(28, 33, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 27, 0, 0, 0)$  possui 28 classes  $\{18, 18, 8\}$ , 33 classes  $\{15, 15, 14\}$  e 27 classes  $\{17, 14, 13\}$ . A média é

$$\frac{28 \cdot 8 + 33 \cdot 14 + 27 \cdot 13}{88} = \frac{1037}{88}.$$

10. O vetor  $(3, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0)$  possui 3 classes  $\{18, 18, 8\}$ , 2 classes  $\{15, 15, 14\}$  e 6 classes  $\{16, 16, 12\}$ . A média é

$$\frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 14 + 6 \cdot 12}{11} = \frac{124}{11}.$$

11. O vetor  $(7, -18, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 72, 0)$  possui 7 classes  $\{18, 18, 8\}$ ,  $-18$  classes  $\{15, 15, 14\}$  e 72 classes  $\{16, 15, 13\}$ . A média é

$$\frac{7 \cdot 8 - 18 \cdot 14 + 72 \cdot 15}{61} = \frac{884}{61}.$$

12. O vetor  $(7, -12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 27)$  possui 7 classes  $\{18, 18, 8\}$ ,  $-12$  classes  $\{15, 15, 14\}$  e 27 classes  $\{16, 14, 14\}$ . A média é

$$\frac{7 \cdot 8 - 12 \cdot 14 + 27 \cdot 16}{22} = \frac{160}{11}.$$

Todos esses valores são menores que  $\frac{160}{11}$ , exceto para o vetor com  $\{18, 17, 9\}$  e o vetor com  $\{16, 14, 14\}$ . Note que não pode haver um número negativo de qualquer um desses vetores da base, pois isso implicaria um número negativo de alguma classe. Como não existem valores maiores que  $\frac{160}{11}$ , a única maneira de obter um valor igual a  $\frac{160}{11}$  é ter apenas o 1º e o 12º vetores da base, que envolvem as classes  $\{18, 17, 9\}$  e  $\{16, 14, 14\}$ , respectivamente. Assim, é impossível obter um valor maior que  $\frac{160}{11}$ .

Portanto, as únicas classes paralelas de hiperplanos possíveis para um  $44$ -cap são  $\{18, 18, 8\}$ ,  $\{18, 17, 9\}$ ,  $\{15, 15, 14\}$  e  $\{16, 14, 14\}$ . E também, como o número médio de pontos que estão no mesmo hiperplano que  $c$  deve ser  $\frac{160}{11}$ ,  $c$  deve ser um ponto exterior ao  $44$ -cap.

Agora, vamos olhar para os quadrados de interseção de um  $k$ -cap em  $d$  dimensões. Para um quadrado de interseção, cada letra representa um espaço de dimensão  $d - 2$ .

$a$	$e$	$h$
$b$	$f$	$i$
$c$	$g$	$j$

Vamos olhar para os hiperplanos que contêm o espaço de dimensão  $d - 2$  com  $a$  pontos (vale o mesmo resultado para os demais espaços desse tipo). Esses hiperplanos têm  $a + e + h$ ,  $a + f + j$ ,  $a + g + i$  e  $a + b + c$  pontos. Chamemos a soma desses pontos de  $s$ . Então, temos

$$s = 4 \cdot a + b + c + e + f + g + h + i + j = 3 \cdot a + k,$$

portanto  $s \equiv k \pmod{3}$ .

Aplicaremos isso a um quadrado de interseção de um  $44$ -*cap*. Um dos nove espaços de dimensão  $d - 2$  conterá o ponto  $c$  que estende o  $44$ -*cap* para um conjunto de 45 pontos de forma que para cada trio de hiperplanos  $\{x, y, z\}$ , tem-se  $x \equiv y \equiv z \pmod{3}$ . Este ponto  $c$  só pode pertencer

1. ao hiperplano com 8 pontos da classe  $\{18, 18, 8\}$ ,
2. ou ao hiperplano com 17 pontos da classe  $\{18, 17, 9\}$ ,
3. ou ao hiperplano com 14 pontos da classe  $\{15, 15, 14\}$ ,
4. ou ao hiperplano com 16 pontos da classe  $\{16, 14, 14\}$ .

Nos 3 primeiros casos, a contribuição do hiperplano que contém  $c$  é  $-1 \pmod{3}$ ; já no último caso, a contribuição é  $1 \pmod{3}$ . Assim, se  $u$  é o número de classes paralelas de hiperplanos  $\{16, 14, 14\}$  em um quadrado de interseção específico e  $s$  é a soma das classes paralelas de hiperplanos que contêm o espaço de dimensão  $d - 2$  contendo  $c$ , como  $s \equiv k = 44 \equiv -1 \pmod{3}$ , temos

$$\begin{aligned} 1 \cdot u - 1 \cdot (4 - u) &\equiv -1 \pmod{3} \\ \Rightarrow 2u - 4 &\equiv -1 \pmod{3}, \end{aligned}$$

o que implica  $u = 0$  ou  $u = 3$ . Agora, como cada classe aparece em 40 quadrados de interseção, e qualquer par de classes aparece junto exatamente uma vez em um quadrado, podemos concluir que se existe uma classe  $\{16, 14, 14\}$ , então existem 81 dessas tais classes.

Assumamos que existe uma classe paralela  $\{16, 14, 14\}$ . Olhando para os vetores da base, apenas

$$(7, -12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 27) \quad \text{e} \quad (1, 6, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

podem pertencer ao *cap*. Sejam  $x$  a quantidade do primeiro vetor e  $y$  a quantidade do segundo vetor. Temos que  $22x + 11y = 121$  (para termos 121 classes no total), e  $x \geq 3$  (para termos pelo menos 81 trios do tipo  $\{16, 14, 14\}$ ). O número de trios  $\{15, 15, 14\}$  é  $-12x + 6y$  e como esse número deve ser não-negativo, então  $y \geq 6$ . Assim,  $22x + 11y > 121$ , o que é uma contradição. Logo, não existem trios do tipo  $\{16, 14, 14\}$ .

Concluimos que  $x = 0$ , então  $y = 11$ . Isso implica que qualquer  $44$ -*cap* em  $AG(5, 3)$  deve ter 44 classes paralelas de hiperplanos  $\{18, 17, 9\}$ , 11 classes  $\{18, 18, 8\}$  e 66 classes  $\{15, 15, 14\}$ . Além disso,  $c$  deve ser um ponto exterior, e adicioná-lo ao *cap* deve resultar em 55 classes  $\{18, 18, 9\}$ , pois na classe  $\{18, 18, 8\}$   $c$  é adicionado no hiperplano com 8 pontos e na classe  $\{18, 17, 9\}$   $c$  é adicionado no hiperplano com 17 pontos, e 66 classes  $\{15, 15, 15\}$ . Isso satisfaz as condições para contagem de pares de pontos e a contagem de trios de pontos e, portanto, deve formar um *cap*.

Assim, não existem  $44$ -*caps* completos em  $AG(5, 3)$ . □

#### 4.4 MAXIMALIDADE DO 112-CAP EM $AG(6, 3)$

Até o momento, já sabemos que todo 112-cap em  $AG(6, 3)$  admite uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 45, 22\}$ . O Teorema a seguir afirma que esse é o tamanho máximo para um cap em  $AG(6, 3)$  e, mais ainda, todo 112-cap é equivalente.

**Teorema 4.4.1.** *Um cap maximal em  $AG(6, 3)$  tem 112 pontos. E todos os 112-caps em  $AG(6, 3)$  são equivalentes afins.*

*Demonstração.* Considere uma classe paralela de hiperplanos  $\{45, 45, 22\}$  de um 112-cap em  $AG(6, 3)$ .

Pelo Lema 4.2.2,  $\sum_h f_h = 20mr$ , onde  $f_h$  é o número de pontos fantasmas em um hiperplano com 9 pontos do 45-cap à esquerda. Além disso,  $m = 45$  e  $r = 22$ , ou seja,

$$\sum_h f_h = 19800. \quad (4.3)$$

Dado um quadrado de interseção relacionado a essa classe paralela, podemos realizar transformações afins de forma que ele se pareça com o que se segue (similar ao que foi feito ao examinar a possibilidade de uma classe paralela  $\{45, 44, 23\}$  no Teorema 4.2.4):

9	$x$	$a$
18	$y$	$b$
18	$z$	$c$

onde  $x \geq y \geq z$ ,  $x + y + z = 45$  e  $a + b + c = 22$ .

Como o hiperplano do meio é um 45-cap, sabemos que as únicas possibilidades são  $x = y = z = 15$  ou  $x = y = 18$  e  $z = 9$ .

- Se  $x = y = z = 15$ , então  $f_h = 15a + 15c + 15b = 15(a + b + c) = 15 \cdot 22 = 330$ .
- Se  $x = y = 18$  e  $z = 9$ , então  $f_h = 18a + 18c + 9b$  e maximizamos  $f_h$  ao maximizar  $a$  e  $c$ . No entanto,  $a, b$  e  $c$  devem ser todos menores ou iguais a 9, pois caso contrário, é criado um cap em  $AG(5, 3)$  com pelo menos 46 pontos. Assim,  $f_h$  é máximo quando  $a = c = 9$  e  $b = 4$ . Isso nos fornece  $f_h = 18 \cdot 9 + 18 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 360$ . Nenhuma outra possibilidade fornece este valor.

Se assumirmos que  $f_h$  atinge esse máximo para todas as 55 classes paralelas onde o hiperplano à esquerda é dividido na classe  $\{18, 18, 9\}$ , obtemos  $\sum_h f_h = 55 \cdot 360 = 19800$ , que é exatamente o valor necessário por (4.3). Assim,  $f_h$  deve atingir esse máximo para todas as 55 classes paralelas de hiperplanos. Se a classe do hiperplano à esquerda for  $\{18, 18, 9\}$ , o quadrado de interseção (ou um quadrado de interseção equivalente) deve ter essa aparência:

9	18	9
18	18	4
18	9	9

Tabela 4 – Possível quadrado de interseção.

Agora, note que dados um ponto  $c_1$  do  $112\text{-cap}$  na classe do hiperplano à esquerda e um ponto  $c_2$  do  $112\text{-cap}$  na classe do hiperplano do meio, temos que  $-c_1 - c_2$  é o ponto fantasma necessário para completar a reta. Cada ponto fantasma está na classe do hiperplano à direita, embora muitos pontos fantasmas possam coincidir.

Considere agora um ponto  $p$  no hiperplano à direita. Para cada classe paralela de hiperplanos, definimos  $f_h$  como o número de pontos fantasmas no mesmo espaço 4-dimensional que  $p$ . Para o Lema a seguir, lembramos que um cone  $K$  em  $PG(d, q)$ , com vértice  $V \subset K$ ,  $m$ -dimensional é um conjunto de pontos tais que para qualquer par de pontos  $p \in K$  e  $q \in V$ , todos os pontos da reta passando por  $p$  e  $q$  estão em  $K$ . Para mais informações sobre o tema sugerimos [9].

**Lema 4.4.2.** *Seja  $\mu$  o número de pontos fantasmas iguais a  $p$ , então*

$$\sum_h f_h = 40 \cdot 45 \cdot 45 + 81\mu = 81000 + 81\mu,$$

onde a soma é tomada sobre todas as classes paralelas, não apenas aquelas em que os hiperplanos com 45 pontos são divididos nas classes  $\{18, 18, 9\}$ .

*Demonstração.* Se um ponto fantasma for igual a  $p$ , ele estará no mesmo espaço 4-dimensional que  $p$  para todas as  $(3^5 - 1)/2 = 121$  classes em  $AG(5, 3)$ . Caso contrário, ele estará no mesmo espaço 4-dimensional que  $p$  para 40 das 121 classes (já que são 40 os planos no infinito no fecho projetivo  $PG(5, 3)$ ). Existem  $45 \cdot 45$  pontos fantasmas, então isso pode ser expresso como

$$\sum_h f_h = 40(45 \cdot 45 - \mu) + 121\mu = 81000 + 81\mu,$$

como queríamos demonstrar. □

Se as classes paralelas que dividem o hiperplano com 45 pontos forem  $\{15, 15, 15\}$ , então  $f_h = 2 \cdot 15 \cdot 18 + 15 \cdot 9 = 675$ .

Agora, olhando para a Tabela 4, se as classes paralelas que dividem o hiperplano com 45 pontos forem  $\{18, 18, 9\}$  e  $p$  estiver no espaço 4-dimensional com 4 pontos, então  $f_h = 2 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 9 = 729$ . Caso contrário,  $f_h = 18 \cdot 18 + 2 \cdot 9 \cdot 18 = 648$ .

Considerando apenas as 55 subdivisões onde as classes paralelas que dividem o hiperplano com 45 pontos são  $\{18, 18, 9\}$ , seja  $n$  o número de vezes que  $p$  está no espaço

4-dimensional com 4 pontos. Temos

$$\begin{aligned} \sum_h f_h &= 66 \cdot 675 + (55 - n) \cdot 648 + 729n = 44550 + 35640 - 648n + 729n = 80190 + 81n \\ &\Rightarrow 80190 + 81n = 81000 + 81\mu \\ &\Rightarrow 81n = 810 + 81\mu \Rightarrow n = 10 + \mu. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Agora, pelo Lema 4.2.5, deve existir um ponto  $c$  na classe do hiperplano com 22 pontos tal que, ao adicionar 2 ao seu peso, cria-se um arranjo tal que para todas as classes  $\{x', y', z'\}$  tem-se  $x' \equiv y' \equiv z' \pmod{3}$ . Para todas as classes paralelas de hiperplanos  $\{9, 9, 4\}$  do  $22\text{-cap}$ ,  $c$  deve estar no hiperplano com 4 pontos. Assim, para  $c$ , na equação (4.4), temos que  $n = 55$  pois estamos considerando apenas as 55 subdivisões. Logo,  $\mu = 45$ .

Há 45 pontos fantasmas iguais a  $c$ . Isso significa que, se um ponto  $p$  na classe do hiperplano à esquerda está no  $112\text{-cap}$ , o ponto  $-c - p$ , que está na classe do hiperplano do meio, também deve estar no  $112\text{-cap}$ . Assim, o hiperplano à esquerda e  $c$  determinam completamente o hiperplano do meio.

Usando essa visão dos pontos fantasmas, segue que é possível ver que, em  $PG(6, 3)$ ,  $c$  é o vértice de um cone tendo como base o  $56\text{-cap}$  em  $PG(5, 3)$ . O  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$  é, então, todos os pontos do cone, exceto pelo vértice  $c$  e pelos pontos em um hiperplano que não passa por  $c$ . Dessa forma, temos a unicidade do  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$ .

Vamos ver brevemente essa questão do cone em  $PG(6, 3)$ . Escolha dois pontos  $p_1$  e  $p_2$  na classe do hiperplano com 45 pontos à esquerda e estenda isso para  $PG(5, 3)$ . Agora, seja  $a$  o ponto no infinito colinear a  $p_1$  e  $p_2$ . O ponto fantasma a partir de  $p_1$  e  $-c - p_2$  é  $-p_1 + c + p_2$ . O ponto fantasma a partir de  $p_2$  e  $-c - p_1$  é  $-p_2 + c + p_1$ . Esses são os dois pontos colineares com  $a$  e  $c$ .

Note que todo ponto fantasma pode ser descrito dessa forma. Assim, para um ponto  $p$  na classe do hiperplano à direita, se  $a$  é o ponto no infinito colinear com  $p$  e  $c$ ,  $p$  não tem pontos fantasmas iguais a ele se, e somente se,  $a$  não for colinear com nenhum par de pontos da classe do hiperplano à esquerda.

Segue de [6] que existem 11 tais pontos  $a$  no hiperplano no infinito de  $AG(5, 3)$ , já que todo  $45\text{-cap}$  em  $AG(5, 3)$  é obtido deletando 11 pontos de um  $56\text{-cap}$  em  $PG(5, 3)$ . Agora, como para cada  $a$  no hiperplano no infinito de  $AG(5, 3)$  existem exatamente 2 pontos colineares com  $a$  e  $c$ , temos exatamente 22 pontos sem pontos fantasmas iguais a eles. Dessa forma, os outros 22 pontos do  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$  também estão determinados. Assim, para qualquer  $112\text{-cap}$  em  $AG(6, 3)$ , os pontos restantes estão completamente determinados.

Note, ainda, que este  $112\text{-cap}$  deve ser completo, por que não há lugar nele para um ponto adicional. De fato, não há lugar para adicionar um ponto nos hiperplanos com

45 pontos, pois esses são *caps* completos em  $AG(5, 3)$ . Ademais, não é possível adicioná-lo ao hiperplano com 22 pontos, pois vimos que tais 22 pontos estão completamente determinados.

Como este *112-cap* é completo, isso também prova que o tamanho máximo de um *cap* em  $AG(6, 3)$  é 112, e que todos os *112-caps* em  $AG(6, 3)$  são equivalentes afim.  $\square$

## 5 GENERALIZAÇÕES E VARIANTES DO *SET*

O *SET* tem levantado muito interesse na comunidade dos jogos de cartas bem como na comunidade matemática. Muitas pessoas têm pensado em variantes e generalizações do jogo, seja com o mesmo baralho (veja, por exemplo, [12]), seja propondo novos baralhos. Uma maneira óbvia de variar é aumentar o número de atributos ou a quantidade de valores que eles podem receber.

Nessa seção, apresentamos brevemente uma variante do *SET* com o mesmo baralho e uma generalização com um novo baralho. Ambos jogos têm relação com *caps* em  $AG(d, q)$ .

### 5.1 O JOGO *SUPERSET*

Sabemos pelo Teorema Fundamental do *set* (Teorema 2.1.4) que dado um par de cartas, existe exatamente uma única carta que completa um *set*. A questão é que toda carta serve como complemento para mais do que um par (na verdade, para 40 pares).

**Exemplo 5.1.1.** As duas duplas a seguir formam um *superset*, já que cada uma delas torna-se um *set* com adição da carta com 3 figuras onduladas verdes listradas.



Assim, no *SUPERSET*, o objeto que os jogadores devem procurar não é um *set*, mas sim um *superset*: um conjunto de 4 cartas formadas por duplas que podem ser completadas pela mesma carta faltante. Observe que um conjunto de quatro cartas que contenha um *set*, curiosamente não pode ser um *superset*. Uma pergunta análoga à que fizemos para o *SET* seria: qual o máximo de cartas que podemos ter na mesa sem ter um *superset*? Ou melhor, quantas cartas devemos ter na mesa para garantir que haja um *superset*?

Vamos fazer algumas definições um pouco mais formais.

**Definição 5.1.2.** Um conjunto  $S = \{a, b, c, d\}$  de pontos de  $AG(d, 3)$  é dito um ***superset*** se existem  $z \in AG(d, 3)$  e  $x, y \in S$  tais que  $\{x, y, z\}$  e  $(S \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$  são *sets*.

**Definição 5.1.3.** Uma coleção de pontos de  $AG(d, 3)$  é dita um ***supercap*** se não contém um *superset*.

**Definição 5.1.4.** Dizemos que dois pares  $\{a_1, b_1\}$  e  $\{a_2, b_2\}$  em  $AG(d, 3)$  são **paralelos** se

$$a_2 - b_2 = \pm(a_1 - b_1).$$

**Lema 5.1.5.** *Um conjunto  $S$  com 4 elementos distintos em  $AG(d, 3)$  é um superset se, e somente se, existem  $x, y \in S$  tais que  $\{x, y\}$  e  $S \setminus \{x, y\}$  são paralelos.*

*Demonstração.* Seja  $S = \{a, b, c, d\}$  de forma que  $\{a, c\}$  e  $\{b, d\}$  são paralelos. Os elementos  $x_{a,b} = -(a + b)$  e  $x_{c,d} = -(c + d)$  são os (únicos) que completam os sets  $\{a, b, x_{a,b}\}$  e  $\{c, d, x_{c,d}\}$ . Como  $\{a, c\}$  e  $\{b, d\}$  são paralelos, podemos assumir  $b - d = -(a - c)$ , caso contrário,  $b - d = a - c$ , e trocamos  $a$  com  $c$ . Assim:

$$b - d = -(a - c) \Rightarrow -(c + d) = -(a + b) \Rightarrow x_{a,b} = x_{c,d},$$

ou seja,  $S$  é um *superset*.

Por outro lado, se  $S = \{a, b, c, d\}$  é um *superset*, podemos assumir sem perda de generalidade que existe  $z$  em  $AG(d, 3)$  tal que  $\{a, b, z\}$  e  $\{c, d, z\}$  são *sets*. Assim:

$$a + b + z = 0 = c + d + z \Rightarrow a + b = c + d \Rightarrow a - c = d - b.$$

Desta forma,  $\{a, c\}$  e  $\{b, d\}$  são paralelos. □

**Teorema 5.1.6.** *Em  $AG(2, 3)$ , uma coleção de 4 pontos é um supercap se, e somente se, contém um set.*

*Demonstração.* Seja  $S$  um conjunto de 4 pontos distintos de  $AG(2, 3)$ . Para cada par  $a, b \in S$ , existe um único  $x_{ab} \in AG(2, 3)$  tal que  $\{a, b, x_{ab}\}$  é um *set*.

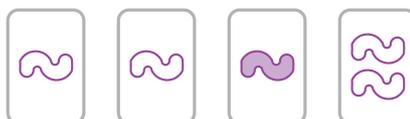
Se  $S$  não contém um *set*, então  $x_{ab} \notin S$  para todo par  $a, b \in S$ . Agora, com os 4 elementos de  $S$  podemos formar 6 pares e há apenas 5 elementos em  $AG(2, 3) \setminus S$ , então devem existir dois pares  $a, b$  e  $c, d$  tais que  $x_{ab} = x_{cd}$ . Assim,  $S$  contém um *superset*.

Por outro lado, se  $S$  contém um *set*, digamos  $\{a, b, c\}$  e um quarto elemento  $d$ . Se  $S$  é um *superset*, então existe  $x \in AG(2, 3)$  tal que, sem perda de generalidade,  $\{a, b, x\}$  e  $\{c, d, x\}$  são *sets*. Daí, devemos ter  $x = c$ , já que o elemento que completa o *set* é único. Logo,  $\{c, d, x\} = \{c, d\}$  não é um *set*. □

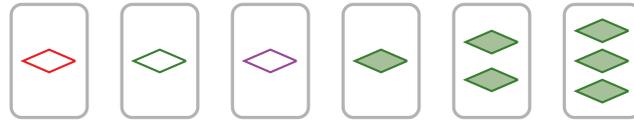
Em [3], usando a caracterização do Lema 5.1.5 e o Teorema 5.1.6, os autores provam uma série de teoremas sobre *supercaps* maximais em  $AG(d, 3)$  com  $d = 2, 3, 4$  que reunimos no Teorema a seguir:

**Teorema 5.1.7.** *Um supercap maximal em dimensão  $d = 2$  tem cardinalidade 4. Para  $d = 3$ , um supercap maximal tem 6 elementos. Para  $d = 4$ , essa cardinalidade é 9.*

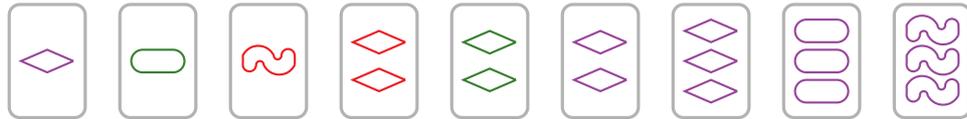
**Exemplo 5.1.8.** Pelo Teorema 5.1.6, para obter um exemplo de *supercap* (maximal) em  $AG(2, 3)$  basta encontrar 4 cartas contendo um *set*:



**Exemplo 5.1.9.** Um exemplo de *supercap* maximal em  $AG(3, 3)$ :



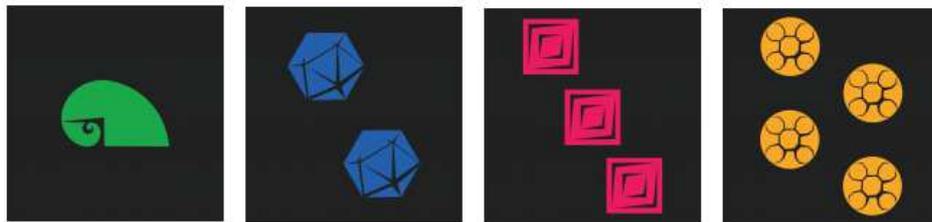
**Exemplo 5.1.10.** Agora, um exemplo de *supercap* maximal em  $AG(4, 3)$ :



## 5.2 O JOGO *EVENQUADS*

*EvenQuads* também é um jogo de cartas, introduzido pela *Association for Women in Mathematics*. O jogo é uma versão de *Quads*, que foi desenvolvido pela Dra. Lauren Rose e Jeffrey Pereira. Como o *SET*, o *EvenQuads* também tem relação com *caps* em espaços afins finitos  $AG(d, q)$ .

Figura 5 – *AWM*, *MAA*, *NAM* e *WME*, respectivamente.



Fonte: <https://awm-math.org/publications/playing-cards/history/>

O baralho de *EvenQuads* consiste em  $4^3 = 64$  cartas, onde cada carta tem um dos quatro símbolos (espiral, poliedro, quadrado ou círculo), que aparecem de 1 a 4 vezes, em uma das quatro cores (verde, azul, rosa ou amarelo). Os símbolos foram inspirados nos logotipos de quatro associações matemáticas: *Association for Women in Mathematics* (*AWM*), *Mathematical Association of America* (*MAA*), *National Association of Mathematicians* (*NAM*) e *Women and Mathematics Education* (*WME*), que podemos ver na Figura 5. Um fato interessante é que um lado de cada carta no baralho de *EvenQuads* apresenta o perfil de uma mulher matemática que fez contribuições significativas para o campo da matemática, como podemos ver na Figura 6.

Todas as variações deste jogo giram em torno de formar *quads*. Um *quad* é um conjunto de 4 cartas que simultaneamente, e para cada atributo, devem apresentar uma das opções a seguir:

Figura 6 – Exemplos de cartas com mulheres notáveis da matemática.



Fonte: <https://awm-math.org/publications/playing-cards/>

- o mesmo valor do atributo;
- valores distintos do atributo;
- meio a meio - duas cartas com um valor de um atributo e as outras duas cartas com um valor diferente do mesmo atributo.

Podemos misturar e combinar estes para cada um dos diferentes atributos. Na Figura 5 temos um exemplo de *quad* onde todas as cartas têm valores distintos dos atributos.

Para jogar, distribua oito cartas com os símbolos voltado para cima. Todos os jogadores procuram por *quads*, sem tocar nas cartas. Alguém que encontra um *quad* grita “*Quad!*” e indica as quatro cartas para os outros jogadores. Se o jogador estiver correto, ele retira as quatro cartas para si e repõe com quatro cartas que estão no baralho. Se o jogador estiver incorreto, as cartas continuam na mesa. Se nenhum jogador encontrar um *quad*, uma carta adicional é colocada na mesa. O jogo termina quando o baralho estiver vazio e todos concordarem que não há mais *quads*. O vencedor é o jogador que coletou mais *quads*. É possível jogar o *Quads* clássico *online* em [16].

A ligação entre *EvenQuads* e matemática reside no fato de que podemos encontrar uma relação entre as cartas do baralho com os elementos de  $AG(6, 2)$ . A Tabela 5 exibe a relação arbitrária que usaremos dos atributos do baralho *EvenQuads* para elementos de  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ .

Atributo	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
Quantidade	1	2	3	4
Cor	amarelo	azul	rosa	verde
Símbolo	círculo	espiral	poliedro	quadrado

Tabela 5 – Atributos das cartas do *EvenQuads* relacionados com  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ .

Por exemplo, a carta com três espirais amarelos corresponde ao elemento

$$((1, 0), (0, 0), (0, 1)) \in (\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)^3.$$

Assim, cada carta do baralho deve corresponder a um elemento de  $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)^3 \cong AG(6, 2)$ .

Mas por que mapear as cartas de *EvenQuads* para  $AG(6, 2)$ ? O primeiro motivo, e mais crucial, é a propriedade de que se temos quaisquer quatro cartas formando um *quad* então a soma dos pontos correspondentes em  $AG(6, 2)$ , que representam as cartas, é o vetor nulo.

**Teorema 5.2.1.** *Sejam  $a, b, c, d \in AG(6, 2)$  distintos. Então  $\{a, b, c, d\}$  é um quad se, e somente se,  $a + b + c + d = 0$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Sejam  $x, y, z, w \in \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ . Temos 3 possibilidades:

- 1) Suponha que os elementos sejam todos iguais. Então, usando a propriedade de que os elementos de  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$  são seus próprios inversos aditivos, temos que

$$x + y + z + w = x + x + x + x = x + (-x) + x + (-x) = (0, 0).$$

- 2) Suponha que os elementos sejam todos diferentes. Então, como existem apenas quatro elementos distintos em  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ , um será igual a (0,0), um será (0,1), um será (1,0) e um será (1,1). Assim, temos

$$x + y + z + w = (0, 0) + (0, 1) + (1, 0) + (1, 1) = (0 + 0 + 1 + 1, 0 + 1 + 0 + 1) = (0, 0).$$

- 3) Suponha que os elementos consistem em dois conjuntos de elementos repetidos. Então, existem dois conjuntos de elementos iguais, digamos  $\{x, y\}$  e  $\{z, w\}$ . Assim, temos

$$x + y + z + w = x + x + z + z = (0, 0).$$

Portanto, usando o isomorfismo  $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2)^3 \cong AG(6, 2)$ , podemos concluir que se cada um dos três atributos de  $a, b, c$  e  $d$  aderirem às propriedades de um *quad*, então  $a + b + c + d = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Análogo.

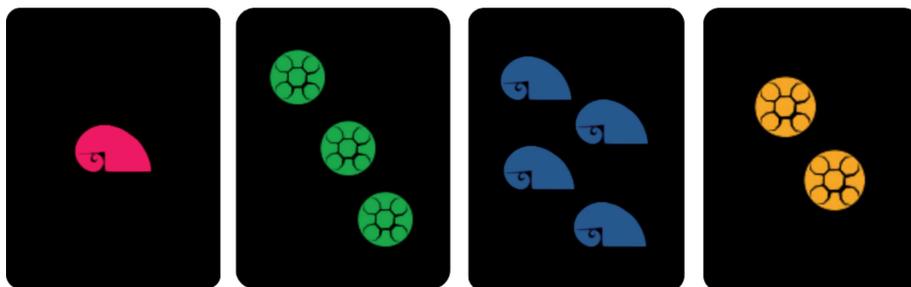
□

**Exemplo 5.2.2.** Observe os seguintes elementos de  $AG(6, 2)$ :

$$\{(0, 0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0)\}.$$

Note que a soma deles resulta no vetor nulo, indicando assim que eles formam um *quad*. Na Figura 7, usamos nosso mapeamento para determinar as cartas representadas por esses vetores, respectivamente. As quantidades e as cores são todas diferentes e os símbolos são meio a meio (espiral e círculo). Em outras palavras, de fato temos um *quad*.

Figura 7 – Cartas formando um *quad*.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Podemos nos questionar de maneira semelhante ao que foi feito para os outros jogos, ou seja, qual o máximo de cartas que podemos ter na mesa sem ter um *quad*? Ou melhor:

*Pergunta 5.2.3.* Quantas cartas devemos ter na mesa para garantir que haja pelo menos um *quad*?

Para responder essa questão, vamos precisar de algumas definições mais formais.

**Definição 5.2.4.** Um conjunto  $S \subset AG(d, 2)$  é um **cap** se  $S$  não contém *quads*, isto é, se  $a, b, c, d \in S$  são distintos, então  $a + b + c + d \neq 0$ . Se  $S$  é um *cap* com  $k$  elementos, então é dito um ***k-cap***.

**Definição 5.2.5.** Um *cap*  $S$  é **completo** se  $S \cup \{v\}$  deixa de ser um *cap*, para todo  $v \in AG(d, 2) \setminus S$ .

**Definição 5.2.6.** Um *cap*  $S$  é **maximal** se ele é completo e possui a maior cardinalidade entre todos os *caps* completos.

Note que, dado um conjunto  $S \subset AG(d, 2)$ , se ele possuir menos que 4 pontos, então segue direto que  $S$  é um *cap*.

**Proposição 5.2.7.** *Seja  $S \subset AG(d, 2)$ , então  $S$  é um *cap* se, e somente se, para todos  $a, b, c, d \in S$  distintos temos  $a + b \neq c + d$ .*

*Demonstração.* Note que para todos  $a, b, c, d \in S$  distintos, temos que

$$\{a, b, c, d\} \text{ formam um } quad \iff a + b + c + d = 0 \iff a + b = c + d.$$

Sendo assim,  $S$  não contém *quads* se, e somente se, não houver elementos distintos  $a, b, c, d \in S$  para os quais  $a + b = c + d$ .  $\square$

Distinguimos *caps* maximais de *caps* completos porque existem *caps* completos que não são maximais.

**Exemplo 5.2.8.** Em  $AG(6, 2)$ , existem *8-caps* que são completos, mas não são maximais, pois um *cap* maximal em  $AG(6, 2)$  tem 9 pontos (ver tabela abaixo). Segue um exemplo de um *8-cap* completo em  $AG(6, 2)$ :

$$\{(0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}.$$

Ao adicionar qualquer outro elemento de  $AG(6, 2)$  no conjunto acima, teremos um *quad*, ou seja, esse é um *cap* completo.

Em [4], os autores provam uma série de resultados sobre o tamanho máximo de *caps* maximais  $S$  em  $AG(d, 2)$ , além de classificá-los. Denotamos essa cardinalidade por  $|S|$  e reunimos esses valores na tabela a seguir:

$d$	1	2	3	4	5	6
$ S $	2	3	4	6	7	9

Sabemos que as cartas do *EvenQuads* representam os pontos do espaço  $AG(6, 2)$ , sendo assim, a resposta para a nossa Pergunta 5.2.3 é que devemos ter 10 cartas na mesa para garantir a presença de pelo menos um *quad*.

## 6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, através da geometria finita, exploramos uma área da Matemática extremamente interessante. Abordamos uma série de resultados intrigantes sobre *caps* maximais, os quais se tornam cada vez mais complexos a medida que aumentamos a dimensão do espaço. Esse comportamento é, sem dúvida, matematicamente estimulante, especialmente ao considerarmos que não existem resultados provados para a cardinalidade de *caps* maximais em dimensões superiores a 6. Além disso, observamos que é possível, além de variar a dimensão, explorar o problema dos *caps* maximais em espaços sobre corpos finitos maiores motivados pelo jogo *EvenQuads*. Dessa forma, a possibilidade de continuidade dos estudos sobre esse tema, com base no que foi apresentado, é instigante, e esperamos contribuir para algumas respostas no futuro.

## REFERÊNCIAS

- 1 BIERBRAUER, J.; EDEL, Y. Bounds on affine caps. **Journal of Combinatorial Designs**, v. 10, p. 111-115, 2002.
- 2 BOSE, R.C. Mathematical Theory of the Symmetrical Factorial Design. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics**, v. 8, p. 107-166, 1947.
- 3 BOTLER, F.; CRISTI A.; HOEKSMAN, R.; SCHEWIOR, K.; TONNIS, A. SUPERSET: A (Super)Natural Variant of the Card Game SET. **9th International Conference on Fun with Algorithms (FUN 2018)**, v. 100, p. 12:1-12:17, 2018. <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FUN.2018.12>
- 4 CRAGER, J.; FLORES, F.; GOLDBERG, T. E.; ROSE, L. L.; ROSE-LEVINE, D.; THORNBURGH, D.; WALKER, R. How Many Cards Should You Lay Out in a Game of EvenQuads: A Detailed Study of Caps in  $AG(n, 2)$ . **La Matematica**, v. 2, p. 382-419, 2023. <https://doi.org/10.1007/s44007-023-00047-0>
- 5 DAVIS, B.L.; MACLAGAN, D. The card game set. **The Mathematical Intelligencer**, v. 25, p. 33-40, 2003. <https://doi.org/10.1007/BF02984846>
- 6 EDEL, Y.; FERRET, S.; LANDJEV, I.; STORME, L. The Classification of the Largest Caps in  $AG(5, 3)$ . **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, v. 99, p. 95-110, 2002. <https://doi.org/10.1006/jcta.2002.3261>
- 7 FOLLETT, M.; KALAIL, K.; MCMAHON, E.; PELLAND, C.; WON, R. Partitions of  $AG(4, 3)$  into maximal caps, **Discrete Mathematics**, V. 337, p. 1-8, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.08.002>.
- 8 HILL, R. Caps and codes. **Discrete Mathematics**, v. 22, p. 111-137, 1978. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(78\)90120-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(78)90120-6)
- 9 HIRSCHFELD, J.W.P. **Projective Geometries over Finite Fields**. Oxford Mathematical Monographs Series. 2a ed. Oxford: 1998. ISBN: 0-19-850295-8.
- 10 HIRSCHFELD, J.W.P.; STORME, L. The Packing Problem in Statistics, Coding Theory and Finite Projective Spaces: Update 2001. **Finite Geometries: Proceedings of the Fourth Isle of Thorns Conference**, Blokhuis, A., Hirschfeld, J.W.P., Jungnickel, D., Thas, J.A. (eds), v. 3, p. 201-246, 2001. [https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0283-4\\_13](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0283-4_13)
- 11 KOTEROV, D. *Set Online*. Disponível em: <https://smart-games.org/en/set/>. Acesso em: 12 fev. 2025.
- 12 MAGLIERY, T. *Set Variants*. Disponível em: <http://magliery.com/Set/SetVariants.html>. Acesso em: 13 fev. 2025.
- 13 PAWELEK, O. *Finding Maximal Cap Sizes for Quad Card Decks Using Share Strings*. Senior Projects Spring 2024. 223. Disponível em: <https://digitalcommons.bard.edu/senprojs2024/223>. Acesso em: 12 fev. 2025.
- 14 PELLEGRINO, G. Sul massimo ordine delle calotte in  $S_{4,3}$ . **Le Matematiche**, v. 25, p. 149-157, 1971.

- 15 POTECHIN, A. Maximal caps in  $AG(6, 3)$ . **Designs, Codes and Cryptography**, v. 46, p. 243-259, 2008. <https://doi.org/10.1007/s10623-007-9132-z>
- 16 ROSE, L.; VAN HUYCK, C. *Quads App*. 2021. Disponível em: <https://drlaurenrose.github.io/QUADS/>. Acesso em: 12 fev. 2025.
- 17 WHIELDON, G. *Pacote LaTeX setdeck*. Disponível em: <https://ctan.org/pkg/setdeck>. Acesso em: 13 fev. 2025