

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Larissa Mariane dos Reis

Contando Curvas: Uma Aplicação da Geometria Tropical

Juiz de Fora

2024

Larissa Mariane dos Reis

Contando Curvas: Uma Aplicação da Geometria Tropical

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Orientadora: Profa. Dra. Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientadora: Profa. Dra. Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Juiz de Fora

2024

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Reis, Larissa Mariane dos.

Contando Curvas : Uma Aplicação da Geometria Tropical / Larissa
Mariane dos Reis. – 2024.

80 f. : il.

Orientadora: Flaviana Andréa Ribeiro

Coorientadora: Joana Darc Antonia Santos da Cruz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2024.

1. Fórmula de Caporaso-Harris. 2. Geometria enumerativa. 3. Geo-
metria tropical. I. Ribeiro, Flaviana Andréa, orient. II. Cruz, Joana Darc
Antonia Santos da, coorient. III. Título.

Larissa Mariane dos Reis

Contando Curvas: Uma Aplicação da Geometria Tropical

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Pura.

Aprovada em 18 de abril de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Flaviana Andréa Ribeiro - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Joana Darc Antonia Santos da Cruz - Coorientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins

Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Frederico Sercio Feitosa

Universidade Federal de Juiz de Fora



Documento assinado eletronicamente por **Flaviana Andrea Ribeiro, Professor(a)**, em 10/05/2024, às 16:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Frederico Sercio Feitosa, Professor(a)**, em 12/09/2024, às 11:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Joana Darc Antonia Santos da Cruz, Professor(a)**, em 12/09/2024, às 18:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Renato Vidal da Silva Martins, Usuário Externo**, em 18/09/2024, às 19:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1800567** e o código CRC **D74D5177**.

Dedico este trabalho à mamãe e ao papai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço aos meus pais, Marlene e João, por todo amparo, incentivo e amor. Mamãe, você é a minha pessoa favorita e a sua força me inspira todos os dias. Obrigada por todas as palavras de incentivo e por sempre se fazer presente. Papai, a minha melhor versão é fruto do seu amor e do seu cuidado. Aos demais familiares que sempre me apoiaram, o meu muito obrigada.

Agradeço à minha amiga, gêmea, companheira de disciplinas e pesquisa, Sheucier, por todo apoio e por nunca ter me deixado desistir. Você foi essencial para que eu pudesse chegar aqui, amiga, e não tem palavras nesse mundo que expressem a minha gratidão. Agradeço também à minha amiga Júlia, por ser colo e família desde o início da graduação. A Elisa tem a melhor mãe do mundo!

Agradeço ao grupo “Panelinha”, por fazerem do ambiente acadêmico um lugar mais leve e por todas as conversas e risadas compartilhadas. Agradecimentos especiais ao Walter, por nunca ter soltado a minha mão desde o início da graduação e GabiFran, por terem me dado um lar nesses últimos meses. Aos demais amigos que cruzaram o meu caminho e fizeram dessa trajetória única, sou eternamente grata a cada um de vocês.

Agradeço à minha orientadora Flaviana, carinhosamente chamada de Mãe Flavis, por ter me apresentado o mundo tropical, ter me feito apaixonar pela álgebra e por todos os conselhos, desde o início da graduação. Você é uma inspiração para mim desde o início da minha caminhada, obrigada por nunca ter me deixado desistir e por ter aceitado me orientar neste trabalho. Agradeço também à minha coorientadora Joana, por ter aceitado participar deste trabalho conosco, por todo o apoio, por sempre estar disposta a ajudar e por todo conhecimento compartilhado. Agradeço a vocês por toda paciência e por todo tempo dedicado.

Agradeço aos professores Renato e Frederico por terem aceitado participar da banca.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação e pela qualidade de ensino oferecida. Em especial, agradeço ao professor Régis por ter me apresentado a pesquisa matemática e por todo conhecimento compartilhado.

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora pelo ensino público, gratuito e de qualidade e por todos os profissionais que aqui atuam pelo excelente serviço prestado. Em particular, agradeço à secretária Paula, pela paciência e por sempre estar disposta a ajudar.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal expor algumas técnicas da geometria tropical para contar o número de curvas algébricas no plano projetivo complexo de gênero g e grau d , que passam por $3d + g - 1$ pontos em posição geral, denotado por $N_{\text{cplx}}(d, g)$. Para isso, primeiramente introduziremos algumas noções de geometria algébrica necessárias para a compreensão do trabalho. Depois, apresentaremos a fórmula de Caporaso-Harris, utilizada para calcular $N_{\text{cplx}}(d, g)$. A seguir, apresentaremos as curvas tropicais, definindo o semicorpo tropical e as hipersuperfícies tropicais, e provaremos o Teorema da Dualidade, que relaciona curvas tropicais com subdivisões do seu polígono de Newton. Ademais, exibiremos as curvas tropicais como grafos equilibrados. Posteriormente, definiremos os caminhos reticulados λ -crescente e explicaremos a relação que os mesmos possuem com o cálculo de $N_{\text{cplx}}(d, g)$, utilizando as curvas tropicais. Por fim, mostraremos que os caminhos reticulados também satisfazem a Fórmula de Caporaso-Harris, sendo esse o principal resultado do nosso trabalho.

Palavras-chave: Fórmula de Caporaso-Harris; geometria enumerativa; geometria tropical.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present some techniques from tropical geometry for counting the number of algebraic curves in the complex projective plane of genus g and degree d , which pass through $3d + g - 1$ points in general position, denoted by $N_{\text{cplx}}(d, g)$. To do this, we will first introduce some notions of algebraic geometry necessary for understanding the work. Then we will present the Caporaso-Harris formula, used to calculate $N_{\text{cplx}}(d, g)$. Next, we will introduce tropical curves, defining the tropical semibody and tropical hypersurfaces, and prove the Duality Theorem, which relates tropical curves to subdivisions of their Newton polygon. We will also show tropical curves as balanced graphs. Afterwards, we will define the λ -crescent lattice paths and explain their relationship with the calculation of $N_{\text{cplx}}(d, g)$, using tropical curves. Finally, we will show that reticulated paths also satisfy the Caporaso-Harris Formula, which is the main result of our work.

Keywords: Caporaso-Harris formula; enumerative geometry; tropical geometry.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	CURVAS ALGÉBRICAS	12
2.1	PLANO PROJETIVO	12
2.2	CURVAS ALGÉBRICAS PROJETIVAS	12
2.3	A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS	15
3	HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS E O TEOREMA DA DUALI- DADE	20
3.1	SEMICORPO TROPICAL	20
3.2	POLINÔMIOS E HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS	20
3.3	A ESTRUTURA POLIÉDRICA DE HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS	23
3.4	TEOREMA DA DUALIDADE	30
4	CURVAS TROPICAIS COMO GRAFOS EQUILIBRADOS .	39
4.1	GRAFOS	39
4.2	CURVAS TROPICAIS	41
5	CAMINHOS RETICULADOS E CURVAS TROPICAIS . . .	46
5.1	CAMINHOS RETICULADOS	46
5.1.1	Multiplicidade de caminhos reticulados λ -crescente	48
5.2	CONTANDO CURVAS	57
6	A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS PARA CAMINHOS	60
6.1	CAMINHOS RETICULADOS GENERALIZADOS	60
6.2	A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS PARA CAMINHOS RETICULA- DOS GENERALIZADOS	66
	REFERÊNCIAS	80

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentaremos importantes resultados envolvendo a aplicação da geometria tropical na geometria enumerativa. A geometria tropical é um campo relativamente novo da geometria algébrica, tendo em média 25 anos. Nela, variedades algébricas são trocadas por certos objetos em \mathbb{R}^n , lineares por partes, que podem ser estudados com ferramentas combinatórias. Por sua vez, a geometria enumerativa tem como principal objetivo contar objetos geométricos que satisfazem certas condições de incidência. Neste trabalho exploraremos o problema enumerativo de contar o número $N_{\text{cplx}}(d, g)$ de curvas algébricas em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grau d e gênero g que passam por $3d + g - 1$ pontos em posição geral. Esses números, para d e g inteiro não negativos, são conhecidos como invariantes de Gromov-Witten. Tendo como principal referência o artigo (1) dos matemáticos alemães Andreas Gathmann e Hannah Markwig, nossos objetivos são entender a tradução do problema de contar curvas no plano projetivo para o mundo tropical e como usar algumas técnicas da geometria tropical para encontrar os números $N_{\text{cplx}}(d, g)$.

Definimos a álgebra tropical, que é obtida considerando o semicorpo dos números tropicais $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ munido de duas operações tropicais: a soma, que é tomar o máximo entre os elementos e a multiplicação, que consiste em adicionar os elementos. Anteriormente, a álgebra tropical era denominada de álgebra *max-plus*, mas recebeu esse nome em homenagem ao matemático e cientista da computação húngaro-brasileiro Imre Simon, que foi pioneiro no uso da álgebra tropical na teoria de otimização. A geometria tropical é uma geometria sobre essa álgebra tropical.

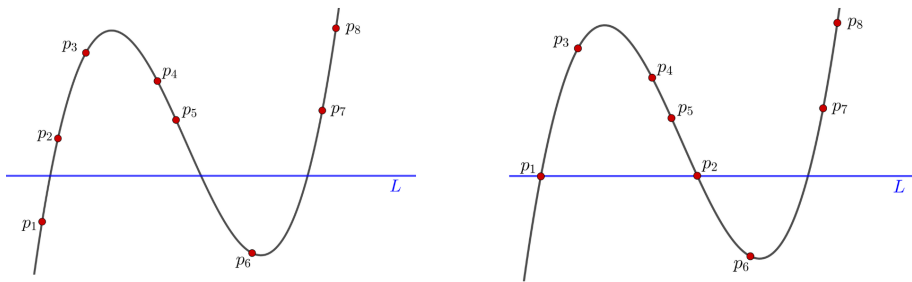
Além disso, podemos definir as curvas tropicais, que são objetos geométricas da geometria tropical no \mathbb{R}^2 , como grafos equilibrados que satisfazem uma certa condição de balanceamento. Essa condição nos permite estabelecer uma relação de dualidade entre a curva tropical e uma subdivisão regular de um polígono fechado reticulado em \mathbb{Z}^2 , chamada subdivisão dual. Esse novo objeto é de suma importância no nosso trabalho, como veremos posteriormente.

Tratando agora do nosso problema enumerativo, a década de 1990 foi marcada pelos primeiros resultados envolvendo o mesmo, ainda em uma abordagem clássica, sem aplicação da geometria tropical. Em 1994, os matemáticos russos Maxim Kontsevich e Yuri Manin (2) obtiveram uma fórmula recursiva para resolver o problema mencionado para curvas de gênero 0 usando espaço de Moduli de mapas estáveis racionais. Já em 1998, a matemática italiana Lucia Caporaso e o matemático estadunidense Joe Harris (3) obtiveram relações recursivas que permitiram o cálculo dos números $N_{\text{cplx}}(d, g)$ para gêneros arbitrários, chamada de fórmula de Caporaso-Harris.

A fórmula de Caporaso-Harris não calcula apenas os números $N_{\text{cplx}}(d, g)$, mas também consiste em um algoritmo que conta o número de curvas planas de determinado

grau e gênero que satisfazem condições de tangência a uma reta fixa L . É feito um processo de especialização, movendo os pontos um a um para a reta L , derivando durante esse processo relações recursivas que permitem calcular $N_{\text{cplx}}(d, g)$. Vamos dar uma ideia sucinta de como esse algoritmo funciona, tomando como exemplo o cálculo de $N_{\text{cplx}}(3, 0)$, que consiste em contar o número de cúbicas de gênero 0 passando pelos pontos p_1, \dots, p_8 , em posição geral. Vamos mover os pontos p_i um a um para a reta fixada L . Movendo o ponto p_1 e na sequência o ponto p_2 para a reta L , não temos degenerações, permanecemos com uma cúbica passando pelos 8 pontos. Os pontos p_1 e p_2 apenas determinam a reta L , como ilustrado na Figura 1.

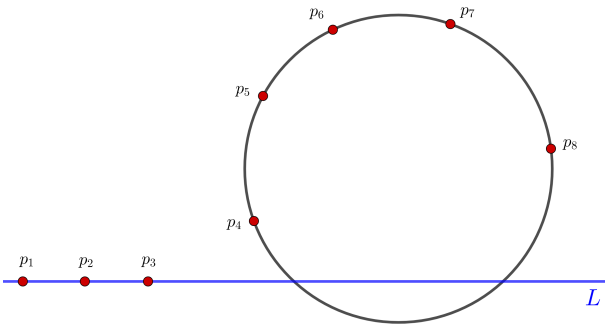
Figura 1 – Cúbica e reta L .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Agora, movendo o ponto p_3 para a reta L , necessariamente a reta L será uma componente da cúbica. A outra componente da cúbica será uma curva de grau 2 passando pelos pontos p_4, \dots, p_8 , como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Reta L e cônica



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

No próximo passo, teremos a reta L passando por 4 pontos como componente da cúbica e uma cônica passando por 4 pontos como a outra componente, onde essa cônica poderá ser irredutível ou poderá ter duas componentes, sendo cada uma delas uma reta. Com isso, a principal ideia de Caporaso e Harris fazendo esse processo de especialização é

diminuir o grau das curvas, utilizando apenas que existe uma única reta passando por 2 pontos no fim da recursividade.

Em 2005, o matemático russo Grigory Mikhalkin encontrou uma nova maneira de determinar os números $N_{\text{cplx}}(d, g)$ usando a geometria tropical. Em seu artigo (4), ele mostrou que $N_{\text{cplx}}(d, g)$ coincide com o número de curvas tropicais de grau d e gênero g que passam por $3d + g - 1$ pontos em posição geral tropical ($N_{\text{trop}}(d, g)$), chamado de Teorema da Correspondência. Além disso, Mikhalkin definiu o número $N_{\text{path}}(d, g)$, que corresponde ao número de caminhos reticulados no triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, d)$ e $(d, 0)$ que satisfazem certas condições e, utilizando a relação de dualidade entre as curvas tropicais e a sua subdivisão dual, Mikhalkin mostrou, por argumentos combinatórios e uma abordagem geométrica, que o número $N_{\text{cplx}}(d, g)$ também coincide com o número $N_{\text{path}}(d, g)$. Ambos os resultados descritos aqui utilizam a recursividade para os seus cálculos, assim como na fórmula de Caporaso-Harris.

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar que a fórmula de Caporaso-Harris também é válida para os caminhos reticulados, ou seja, trazer o algoritmo de Caporaso-Harris para o mundo tropical.

O presente trabalho está dividido em 4 capítulos. O primeiro deles (Capítulo 2), intitulado “Curvas Algébricas”, tem como objetivo introduzir alguns conceitos importantes da geometria algébrica clássica que serão utilizadas no decorrer do trabalho. Além disso, neste capítulo apresentaremos a fórmula de Caporaso-Harris (sem demonstrá-la), ilustrando a recursividade através de um exemplo.

No Capítulo 3, definiremos o semicorpo tropical, polinômios tropicais e as hipersuperfícies tropicais no \mathbb{R}^n . Depois, mostraremos que uma hipersuperfície tropical traz consigo uma estrutura de complexo poliédrico, que subdivide o \mathbb{R}^n . Por fim, definiremos a subdivisão dual de uma hipersuperfície tropical e mostraremos que essa estrutura estabelece uma relação de dualidade com a hipersuperfície tropical, por meio do Teorema da Dualidade.

O Capítulo 4, tem como principal objetivo definir curvas tropicais como grafos. Diferentemente do capítulo anterior, neste capítulo não trabalharemos com os polinômios tropicais, definiremos as curvas tropicais como grafos ponderados que satisfazem uma certa condição de balanceamento. Além disso, definiremos a subdivisão dual utilizando a imagem da curva tropical, e não mais os polinômios, o grau e o gênero de uma curva tropical. Ademais, definiremos o número $N_{\text{trop}}(d, g)$, que corresponde ao número de curvas tropicais de grau Δ_d e gênero g passando por $3d + g - 1$ pontos em posição geral tropical. Por fim, enunciaremos o Teorema da Correspondência, que traduz o nosso problema enumerativo do mundo clássico para o mundo tropical, garantindo que $N_{\text{trop}}(d, g) = N_{\text{cplx}}(d, g)$.

No Capítulo 5, definiremos os caminhos reticulados λ -crescente e a fórmula recursiva utilizada por Mikhalkin para calcular a multiplicidade desses caminhos. Depois, definiremos

o número $N_{\text{path}}(d, g)$ e enunciaremos o resultado encontrado por Mikhalkin que garante que o número $N_{\text{trop}}(d, g)$ coincide com o número $N_{\text{path}}(d, g)$ e mostraremos por meio de exemplos como esses números são encontrados.

Por fim, o Capítulo 6 tem como principal objetivo estabelecer a relação entre a fórmula de Caporaso-Harris e os caminhos reticulados que foram definidos no capítulo anterior. Para isso, generalizaremos a definição de caminhos reticulados, definindo o número $N_{\text{path}}^{\alpha, \beta}(d, g)$, e definiremos uma fórmula não-recursiva para o cálculo da multiplicidade desses caminhos, mostrando a equivalência entre essa e a que foi definida no capítulo anterior. Por fim, mostraremos que o número $N_{\text{path}}^{\alpha, \beta}(d, g)$ satisfaz a fórmula de Caporaso-Harris.

2 CURVAS ALGÉBRICAS

Neste capítulo vamos introduzir de forma sucinta alguns conceitos importantes da geometria algébrica clássica e contar um pouco sobre o problema enumerativo de nosso interesse. Depois, apresentaremos a fórmula de Caporaso-Harris, uma fórmula recursiva que será utilizada no nosso problema enumerativo. As principais referências utilizadas foram o livro do Fulton, (5), para a parte de geometria algébrica, e os artigos (1) e (3) para a fórmula de Caporaso-Harris.

2.1 PLANO PROJETIVO

Seja k um corpo algebricamente fechado. Chamamos k^3 de espaço afim de dimensão 3 sobre k e o denotamos por $\mathbb{A}^3(k)$ ou simplesmente \mathbb{A}^3

Definimos a relação de equivalência \sim em $\mathbb{A}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ como

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \setminus \{0\}; (x_0, y_0, z_0) = \lambda(x_1, y_1, z_1).$$

Definição 2.1. O plano projetivo $\mathbb{P}^2(k)$, ou simplesmente \mathbb{P}^2 , é definido por

$$\mathbb{P}^2(k) = \mathbb{P}^2 := \frac{k^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\sim}.$$

O ponto de \mathbb{P}^2 correspondente ao ponto $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é denotado por $(x : y : z)$ e $(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$ são chamadas *coordenadas homogêneas* desse ponto.

Dado

$$U_2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; z \neq 0\} = \{(x : y : 1); (x, y) \in \mathbb{A}^2\},$$

definimos a *reta no infinito*

$$H_\infty := \mathbb{P}^2 \setminus U_2 = \{(x : y : z); z = 0\}.$$

O mesmo pode ser feito para $U_0 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; x \neq 0\}$ e $U_1 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; y \neq 0\}$.

2.2 CURVAS ALGÉBRICAS PROJETIVAS

Seja k um corpo algebricamente fechado. Denotamos por $k[x, y, z]$ o anel de polinômios em três variáveis com coeficientes em k . Dado um polinômio

$$f(x, y, z) = \sum_{i, j, l \in \mathbb{Z}_+} a_{i, j, l} x^i y^j z^l, \quad a_{i, j, l} \in k,$$

o *grau* de f é dado pela maior soma $i + j + l$ tal que $a_{i, j, l} \neq 0$.

Definição 2.2. Dizemos que um polinômio $f \in k[x, y, z]$ é homogêneo de grau d se ele é a soma de monômios de grau d , ou seja, polinômios homogêneos de grau d são da forma:

$$f(x, y, z) = \sum_{i+j+l=d} a_{i,j,l} x^i y^j z^l, a_{i,j,l} \in k.$$

Definição 2.3. Dado um polinômio homogêneo $f \in k[x, y, z]$, chamamos de curva plana projetiva, denotada por $V(f)$, o conjunto de zeros do polinômio f . Ou seja,

$$V(f) = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; f(x, y, z) = 0\}.$$

Definição 2.4. O grau de uma curva plana projetiva $V(f)$ é o grau do polinômio homogêneo f que a define. Curvas de grau 1, 2, 3 e 4 são chamadas, respectivamente, de retas, cônicas, cúbicas e quárticas.

Seja $V(f)$ uma curva plana projetiva e $P = (x_0 : y_0 : z_0)$. O ponto P é dito *simples* (ou *não-singular*) de $V(f)$ se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0.$$

Um ponto P que não é simples é chamado de ponto *múltiplo* (ou *singular*). Uma curva que possui somente pontos simples é chamada de curva *não-singular*.

Definição 2.5. Seja $f \in k[x, y, z]$ um polinômio homogêneo. Definimos a desomogenização de f com respeito a variável z como sendo o polinômio

$$f_*(x, y) = f(x, y, 1).$$

As desomogenizações do polinômio f com respeito às variáveis x e y são definidas de forma análoga.

Definição 2.6. Dado $f \in k[x, y]$, podemos reescrever esse polinômio como

$$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_d,$$

onde f_i é um polinômio homogêneo de grau i , para todo $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ e $f_d \neq 0$. O polinômio homogêneo

$$f^*(x, y, z) := z^d f_0 + z^{d-1} f_1 + \cdots + f_d$$

é dito uma homogenização do polinômio f .

Seja $V(f)$ uma curva plana projetiva. Considerando uma desomogenização f_* , podemos escrever

$$f_* = f_m + f_{m+1} + \cdots + f_n,$$

onde cada f_i é um polinômio homogêneo em x e y de grau i e $f_m \neq 0$. Chamamos m de *multiplicidade* de $V(f_*)$ em $P = (0, 0) \in \mathbb{A}^2$ e escrevemos $m = m_P(f_*)$. Se $m = 2$, P é dito um *ponto duplo*, se $m = 3$, P é dito um *ponto triplo*, e assim sucessivamente.

As definições acima podem ser estendidas a qualquer ponto $P = (a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{A}^2$, basta considerar a translação $T(x, y) = (x + a, y + b)$, onde definimos $f_*^T(x, y) = f_* \circ T(x, y)$. Definimos $m_P(f_*)$ como sendo $m_{(0,0)}(f_*^T)$.

Definição 2.7. Seja $V(f)$ uma curva plana projetiva. Definimos a multiplicidade de f em $P = (x : y : 1) \in U_2$, $m_P(f)$, como sendo $m_P(f_*)$, onde f_* é a desomogenização de f na variável z . O mesmo pode ser feito para $P = (1 : y : z) \in U_0$ e $P = (x : 1 : z) \in U_1$, desomogenizando f nas variáveis x e y , respectivamente.

Como f_m é um polinômio homogêneo, podemos escrever $f_m = \prod_i L_i^{r_i}$, onde os L_i 's são polinômios homogêneos lineares distintos. Esses polinômios geram retas que são chamadas de *retas tangentes* a f_* em P e r_i é a multiplicidade da tangente L_i . Esta análise pode ser feita para cada ponto $P \in V(f)$, bastando para isso considerar a desomogenização adequada. Dizemos que as retas L_i^* são retas tangente a curva projetiva $V(f)$. Dizemos que um ponto $P \in V(f)$ é um *ponto múltiplo ordinário* de f se $V(f)$ tem $m_P(f)$ tangentes distintas em P .

Definição 2.8. Uma curva plana projetiva é dita nodal se as suas singularidades são apenas pontos duplos ordinários (nós).

Definimos o corpo de funções de \mathbb{P}^2 , denotado por $k(\mathbb{P}^2)$ como

$$k(\mathbb{P}^2) := \left\{ \frac{f}{g}; f, g \in k[x, y, z] \text{ formas de mesmo grau} \right\}.$$

Chamamos os elementos de $k(\mathbb{P}^2)$ de funções racionais sobre \mathbb{P}^2 . Definimos o *anel local* de \mathbb{P}^2 em um ponto $P \in \mathbb{P}^2$, denotado por $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)$, como sendo o conjunto de funções racionais de \mathbb{P}^2 que estão definidas em P .

Definição 2.9. Sejam $V(f)$ e $V(g)$ curvas planas projetivas e $P \in \mathbb{P}^2$. Definimos a multiplicidade de interseção $I(P, f \cap g)$ das curvas $V(f)$ e $V(g)$ no ponto P como

$$I(P, f \cap g) := \frac{\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^2)}{\langle f_*, g_* \rangle}.$$

Definição 2.10. O gênero g de uma curva plana projetiva não-singular $V(f)$ é dada por

$$g := \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

onde d é o grau da curva $V(f)$.

Proposição 2.11. *Seja $V(f)$ curva plana projetiva de grau d cujas singularidades são pontos múltiplos ordinários. O gênero de $V(f)$ é dado por*

$$g := \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{P \in V(f)} \frac{m_P(f)(m_P(f)-1)}{2},$$

onde $m_P(f)$ é a multiplicidade do ponto P .

Demonstração. Ver (5), Proposição 5 do Capítulo 8. □

Notemos que para uma cônica (grau 2) com pontos múltiplos ordinários, o gênero g é dado por:

$$\begin{aligned} g &= \frac{(2-1)(2-2)}{2} - \sum_{P \in V(f)} \frac{m_P(f)(m_P(f)-1)}{2} \\ &= - \sum_{P \in V(f)} \frac{m_P(f)(m_P(f)-1)}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

Definição 2.12. Dizemos que uma coleção finita de pontos em \mathbb{P}^2 estão em posição geral se qualquer subcoleção contendo três (ou menos) desses pontos é linearmente independente como vetores em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.13. O número de curvas planas no plano projetivo complexo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grau d e gênero g que passam por $3d + g - 1$ pontos em posição geral é denotado por $N_{\text{cplx}}(d, g)$.

Os números $N_{\text{cplx}}(d, g)$ são chamados *invariantes de Gromov-Witten do plano complexo* e tem sido objetos de interesse de muitos geométras. Os invariantes mais simples são $N_{\text{cplx}}(1, 0) = 1$ e $N_{\text{cplx}}(2, 0) = 1$. Eles dizem que existe uma única reta passando por 2 pontos e por 5 pontos em posição geral passa uma única cônica. Também temos uma única cúbica de gênero 1 passando por 9 pontos em posição geral, isto é, $N_{\text{cplx}}(3, 1) = 1$. O primeiro invariante não trivial é $N_{\text{cplx}}(3, 0)$.

Para gênero zero, os números $N_{\text{cplx}}(d, 0)$, foram calculados por Kontsevich em 1994 usando espaço de Moduli de mapas estáveis racionais. Para gêneros arbitrários, Caporaso e Harris (em 1998) desenvolveram uma fórmula recursiva que descreveremos na próxima seção.

2.3 A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS

Antes de definirmos a fórmula de Caporaso-Harris, precisamos definir algumas operações envolvendo sequências finitas de números naturais.

Definição 2.14. Chamaremos de sequência finita, ou simplesmente de sequência, qualquer coleção enumerável $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ de números naturais onde quase todos são nulos. Se $\alpha_k = 0$ para todo $k > n$, escreveremos essa sequência como $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Definição 2.15. Dadas duas sequências $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$, definimos:

- $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots;$
- $I\alpha := 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots;$
- $I^\alpha := 1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\alpha_3} \dots;$
- $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \dots);$
- $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \binom{\alpha_3}{\beta_3} \dots$

Dizemos que $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha_n \geq \beta_n$ para todo n . Denotamos por e_k a sequência que tem a k -ésima coordenada sendo 1 e as demais 0.

Definição 2.16. Sejam $d \geq 0$ e g números inteiros, α e β duas sequências tais que $I\alpha + I\beta = d$. Fixemos uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$. Denotamos por $N_{\text{cplx}}^{\alpha, \beta}(d, g)$ o número de curvas planas projetivas nodais e não necessariamente irredutíveis, de grau d e gênero g que satisfazem as seguintes condições:

- intersectam L em α_i pontos genéricos fixados com multiplicidade i cada, para todo $i \geq 1$;
- intersectam L em β_i pontos arbitrários, com multiplicidade i cada, para todo $i \geq 1$;
- passam adicionalmente por $2d + g + |\beta| - 1$ pontos em posição geral em \mathbb{P}^2 .

Em síntese, o número $N_{\text{cplx}}^{\alpha, \beta}(d, g)$ conta a quantidade de curvas planas complexas de dado grau e gênero que têm um número de interseção fixo com uma reta L dada. É fato conhecido que se $\alpha = (0, 0, \dots)$ e $\beta = (d, 0, \dots)$, $N_{\text{cplx}}^{(0), (d)}(d, g)$ conta o número de curvas de grau d e gênero g em \mathbb{P}^2 , não necessariamente irredutíveis, cujas singularidades são no máximo nós e que intersectam L em d pontos arbitrários, com multiplicidade um e que passam adicionalmente por $2d + g + |(d)| - 1 = 3d + g - 1$ pontos em posição geral em \mathbb{P}^2 . Mas este número é justamente $N_{\text{cplx}}(d, g)$, ou seja, $N_{\text{cplx}}(d, g) = N_{\text{cplx}}^{(0), (d)}(d, g)$.

Definição 2.17. Dizemos que a coleção de números $N^{\alpha, \beta}(d, g)$ definidos para d e g inteiros, $d \geq 0$, e para todas as sequências α e β com $I\alpha + I\beta = d$ satisfazem a fórmula de Caporaso-Harris se

$$N^{\alpha, \beta}(d, g) = \sum_{k; \beta_k > 0} k \cdot N^{\alpha + e_k, \beta - e_k}(d, g) + \sum I^{\beta' - \beta} \binom{\alpha}{\alpha'} \cdot \binom{\beta'}{\beta} \cdot N^{\alpha', \beta'}(d - 1, g')$$

para todo d, g, α e β como acima com $d > 1$, onde o segundo somatório é tomado para todo α', β' e g' satisfazendo

$$\begin{aligned}
\alpha' &\leq \alpha, \\
\beta' &\geq \beta, \\
I\alpha' + I\beta' &= d - 1, \\
g - g' &= |\beta' - \beta| - 1, \\
d - 2 &\geq g - g'.
\end{aligned}$$

A importância da fórmula de Lucia Caporaso e Joe Harris é que ela permite que os números $N^{\alpha,\beta}(d, g)$ sejam calculados recursivamente. Além disso, tais números são unicamente determinados por seus valores em $d = 1$.

Teorema 2.18 (O algoritmo de Caporaso e Harris). *Os números $N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ satisfazem a fórmula de Caporaso-Harris.*

Demonstração. Ver (3). □

Observemos que o Teorema 2.18 permite calcular $N_{\text{cplx}}(d, g) = N_{\text{cplx}}^{(0),(d)}(d, g)$ a partir da informação de que existe exatamente uma reta passando por 2 pontos no plano.

Exemplo 2.19. Sejam $\alpha = (0)$, $\beta = (3)$, $d = 3$ e $g = 0$. Vamos calcular $N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0)$ utilizando a fórmula da Definição 2.17.

- **Primeiro passo:** Notemos que a primeira coordenada de β é a única diferente de zero, garantindo que o primeiro somatório é tomado apenas para $k = 1$. Além disso, não existe α' e β' tal que $\alpha' \leq (0)$, $\beta' \geq (3)$ e $I\alpha' + I\beta' = 2$, garantindo que o segundo somatório da fórmula é nulo. Logo,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = 1 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0)+(1),(3)-(1)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(1),(2)}(3, 0).$$

- **Segundo passo:** Aplicamos a fórmula agora para $N_{\text{cplx}}^{(1),(2)}(3, 0)$. Novamente, a única coordenada não nula de β é a primeira. Ademais, $\alpha' = (0)$ e $\beta' = (2)$ são as únicas sequências que satisfazem $\alpha' \leq (1)$, $\beta' \geq (2)$ e $I\alpha' + I\beta' = 2$, e, pela fórmula, $g' = 1$. Além disso, satisfaz a última condição, pois $d - 2 = 1 \geq g - g' = -1$. Com isso,

$$\begin{aligned}
N_{\text{cplx}}^{(1),(2)}(3, 0) &= 1 \cdot N_{\text{cplx}}^{(2),(1)}(3, 0) + I^{(2)-(2)} \binom{(1)}{(0)} \binom{(2)}{(2)} N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 1) \\
&= N_{\text{cplx}}^{(2),(1)}(3, 0) + N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 1).
\end{aligned}$$

Porém, não existe cônica de gênero 1, garantindo que $N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 1) = 0$. Logo, como resultado do segundo passo da recursividade, temos:

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(2),(1)}(3, 0).$$

- **Terceiro passo:** Agora, aplicaremos a fórmula para $N_{\text{cplx}}^{(2),(1)}(3, 0)$. Novamente, no primeiro somatório teremos a contribuição somente para $k = 1$. Diferentemente dos passos anteriores, neste caso temos dois pares de sequências α' e β' que satisfazem as condições $\alpha' \leq (2)$, $\beta' \geq (1)$ e $I\alpha' + I\beta' = 2$, sendo eles: $\alpha' = (0)$, $\beta' = (2)$ e $g' = 0$; $\alpha' = (1)$, $\beta' = (1)$ e $g' = 1$, ambas satisfazendo $d - 2 \geq g - g'$. Assim,

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(2),(1)}(3, 0) &= 1 \cdot N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) + I^{(2)-(1)} \binom{(2)}{(0)} \binom{(2)}{(1)} N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 0) + \\ &\quad I^{(1)-(1)} \binom{(2)}{(1)} \binom{(1)}{(1)} N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 1) \\ &= N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 0) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 1). \end{aligned}$$

Novamente, como não existe cônica de gênero 1,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 0).$$

- **Quarto passo:** Vamos aplicar a recursividade em cada uma das parcelas da soma acima. Na primeira parcela, temos que β não possui coordenada não nula, garantindo que o primeiro somatório é nulo. Já no segundo somatório, temos 4 pares de α' e β' que satisfazem as condições exigidas, juntamente com o g' de cada parcela, indicadas a seguir: $\alpha' = (0)$, $\beta' = (2)$ e $g' = -1$; $\alpha' = (0)$, $\beta' = (0, 1)$ e $g' = 0$; $\alpha' = (1)$, $\beta' = (1)$ e $g' = 0$; $\alpha' = (2)$, $\beta' = (0)$ e $g' = 1$. Com isso,

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(3),(0)}(3, 0) &= I^{(2)} \binom{(3)}{(0)} \binom{(2)}{(0)} N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, -1) + I^{(0,1)} \binom{(3)}{(0)} \binom{(0,1)}{(0)} N_{\text{cplx}}^{(0),(0,1)}(2, 0) + \\ &\quad I^{(1)} \binom{(3)}{(1)} \binom{(1)}{(0)} N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 0) + I^{(0)} \binom{(3)}{(2)} \binom{(0)}{(0)} N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, 1) \\ &= N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, -1) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(0,1)}(2, 0) + 3 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 0), \end{aligned}$$

pois $N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, 1) = 0$.

Para a segunda parcela, vamos repetir os mesmos passos dos casos anteriores, obtendo:

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, 0) = N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 0).$$

Logo,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, -1) + 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0),(0,1)}(2, 0) + 5 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 0).$$

- **Quinto passo:** Vamos repetir o algoritmo para cada uma das parcelas obtidas no passo anterior, obtendo:

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(0),(2)}(2, -1) &= N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, -1) \\ N_{\text{cplx}}^{(0),(0,1)}(2, 0) &= 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0,1),(0)}(2, 0) \\ N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, 0) &= N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, 0) + N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 1). \end{aligned}$$

Sabemos que não existe reta com gênero 1, garantindo que $N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 1) = 0$. Logo,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, -1) + 4 \cdot N_{\text{cplx}}^{(0,1),(0)}(2, 0) + 5 \cdot N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, 0).$$

- **Sexto passo:** Novamente, para cada uma das parcelas anteriores, temos:

$$\begin{aligned} N_{\text{cplx}}^{(1),(1)}(2, -1) &= N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1) + N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 0) \\ N_{\text{cplx}}^{(0,1),(0)}(2, 0) &= N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 0) \\ N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, 0) &= 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(0)}(1, 1) + N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 0). \end{aligned}$$

Sabemos que por 2 pontos no plano passa exatamente uma reta, garantindo que $N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, 0) = 1$. Além disso, $N_{\text{cplx}}^{(1),(0)}(1, 1) = 0$. Logo,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1) + 1 + 4 + 5.$$

- **Sétimo passo:** Vamos aplicar novamente o algoritmo para $N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1)$.

$$N_{\text{cplx}}^{(2),(0)}(2, -1) = 2 \cdot N_{\text{cplx}}^{(1),(0)}(1, 0) + N_{\text{cplx}}^{(0),(1)}(1, -1) = 2.$$

Portanto,

$$N_{\text{cplx}}^{(0),(3)}(3, 0) = 2 + 1 + 4 + 5 = 12,$$

garantindo que existem 12 curvas de grau 3 e gênero 0 passando por 8 pontos em posição geral.

3 HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS E O TEOREMA DA DUALIDADE

Neste capítulo, definiremos os objetos geométricos da geometria tropical chamados hipersuperfícies tropicais em \mathbb{R}^n . Veremos que tais objetos determinam uma subdivisão do \mathbb{R}^n em subconjuntos que são poliedros (alguns limitados outros não) e uma subdivisão dual correspondente do polígono de Newton associado ao polinômio tropical que define a hipersuperfície. As principais referências utilizadas foram os livros (6) e (7).

3.1 SEMICORPO TROPICAL

Definição 3.1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Definimos as operações de soma e multiplicação tropical (denotadas por \oplus e \odot , respectivamente) como:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max\{a, b\} \\ a \odot b &= a + b. \end{aligned}$$

Ou seja, a soma tropical é o máximo de dois números e a multiplicação tropical é a soma usual dos mesmos.

Exemplo 3.2. • $2 \oplus 3 = \max\{2, 3\} = 3$;

- $2 \odot 3 = 2 + 3 = 5$;
- $10 \oplus 15 = \max\{10, 15\} = 15$;
- $10 \odot 15 = 10 + 15 = 25$.

Notemos que a adição tropical não possui elemento neutro em \mathbb{R} . De fato, não existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $a \oplus e = \max\{a, e\} = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, pois, nesse caso, teríamos $e < a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, contrariando o fato de que o conjunto dos reais é ilimitado inferiormente. Para resolver esse problema, definimos então o conjunto dos números tropicais como sendo $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, onde $a \oplus -\infty = a$ e $a \odot -\infty = -\infty$ para todo $a \in \mathbb{T}$.

Podemos observar ainda que a adição tropical, ao contrário da adição clássica, não possui simétrico aditivo. A menos deste último fato, o conjunto dos números tropicais munido das operações \oplus e \odot satisfaz todas as demais propriedades de um corpo. Com isso, dizemos que $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ é um semicorpo.

3.2 POLINÔMIOS E HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS

Definição 3.3. Um polinômio tropical em n variáveis é uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

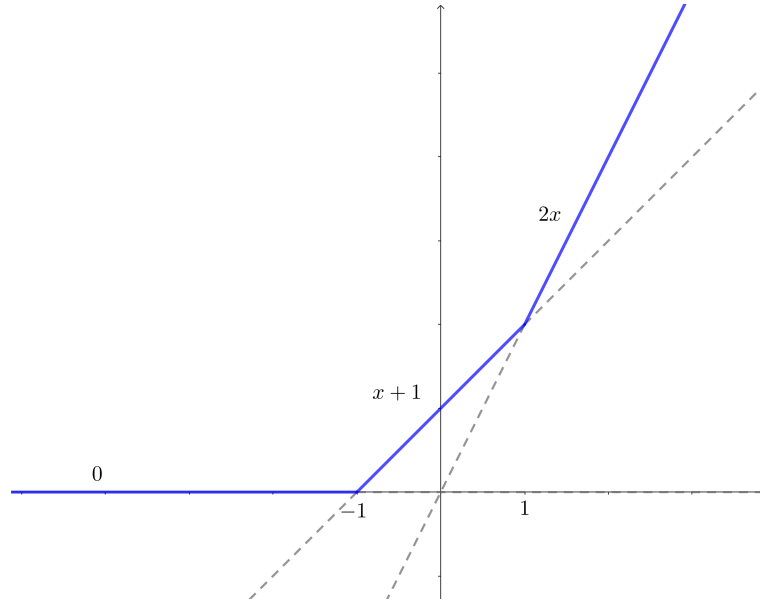
$$f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j := \max_{j \in A} \{a_j + jx\},$$

onde $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ é um conjunto finito, $a_j \in \mathbb{T}$, para todo $j \in A$, e $jx = \langle j, x \rangle = j_1x_1 + \dots + j_nx_n$.

Definição 3.4. Dado um polinômio tropical $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$, onde $j = (j_1, \dots, j_n)$, definimos o grau de f como máximo das somas $j_1 + \dots + j_n$ tais que $a_j \neq -\infty$.

Exemplo 3.5. O polinômio tropical em uma variável $f(x) = x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 0$, ou seja, a função afim por partes, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \max\{2x, 1 + x, 0\}$, tem o seu gráfico representado na Figura 3.

Figura 3 – $f(x) = x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 0$.



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Definição 3.6. Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Definimos a hipersuperfície $V(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ como o conjunto de pontos em \mathbb{R}^n onde f não é diferenciável.

Quando $n = 2$, a hipersuperfície definida por um polinômio tropical f é chamada de *curva tropical*. Curvas tropicais de graus $d = 1, 2$ e 3 são chamadas *retas*, *cônicas* e *cúbicas tropicais*, respectivamente.

No Exemplo 3.5, os pontos onde f não é diferenciável correspondem às “quinas” do gráfico de f , pois nos demais pontos f é linear, e portanto, diferenciável. Logo, $V(f) = \{-1, 1\}$.

Podemos definir a hipersuperfície $V(f)$ de uma outra forma, como segue.

Proposição 3.7. Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. A hipersuperfície $V(f)$ é igual ao conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ onde o máximo $f(x)$ é atingido pelo menos por dois monômios, ou seja,

$$V(f) = \{x \in \mathbb{R}^n; \exists i, j \in A, \text{ com } i \neq j \text{ tais que } f(x) = a_i + ix = a_j + jx\}.$$

Demonstração. Notemos que se $f(x)$ atinge o máximo apenas em um monômio, então a função é localmente afim, e, com isso, diferenciável. Logo, se $x \in V(f)$, ao menos dois monômios atingem o máximo em x .

Por outro lado, seja $x \in \mathbb{R}^n$ tal que existem $i, j \in A$, $i \neq j$, onde

$$f(x) = a_i + ix = a_j + jx.$$

Suponhamos, por absurdo, que f é diferenciável em x . Temos então que $d_x f = i$ e $d_x f = j$, com $i \neq j$. Absurdo. Logo, se $f(x)$ atinge o máximo em pelo menos dois monômios, $x \in V(f)$, provando a proposição. \square

Exemplo 3.8. Considere a reta tropical definida pelo polinômio tropical

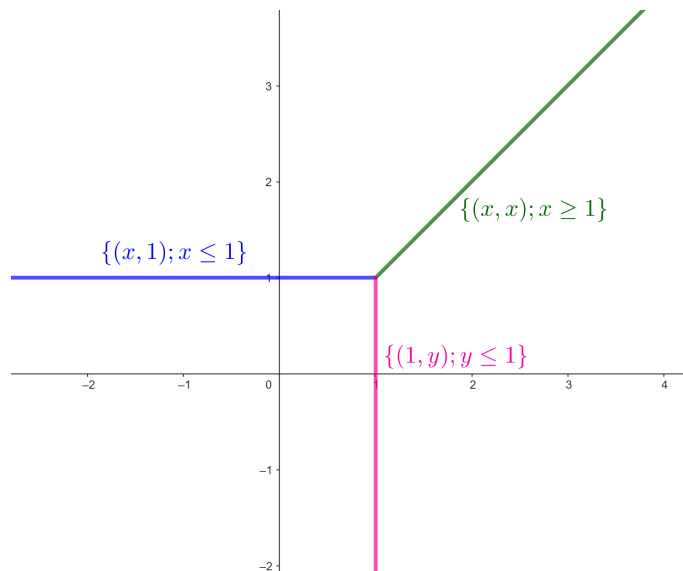
$$f(x, y) = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 1 = \max\{x, y, 1\}.$$

Então, $V(f)$ é formada pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem:

- $x = y$ e $x \geq 1 \Rightarrow \{(x, x); x \geq 1\} \subset V(f)$.
- $x = 1$ e $1 \geq y \Rightarrow \{(1, y); y \leq 1\} \subset V(f)$.
- $y = 1$ e $1 \geq x \Rightarrow \{(x, 1); x \leq 1\} \subset V(f)$.

Assim, a reta tropical $V(f)$ é a união de três semirretas, representadas na Figura 4.

Figura 4 – Reta tropical $p(x, y) = 0 \odot x \oplus 0 \odot y \oplus 1$



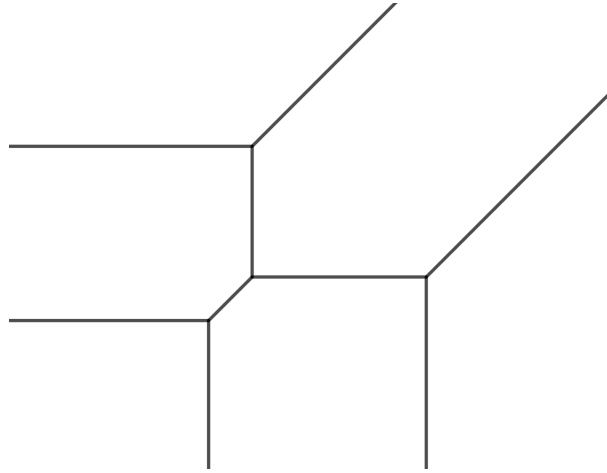
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Exemplo 3.9. A cônica tropical definida pelo polinômio tropical

$$g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 5$$

está representada na Figura 5.

Figura 5 – Cônica tropical $g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 5$.



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

3.3 A ESTRUTURA POLIÉDRICA DE HIPERSUPERFÍCIES TROPICAIS

Uma função $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $k(x) = a + jx$, onde $j \in \mathbb{Z}^n$ $a \in \mathbb{R}$ é chamada de *função inteira afim* ou monômio tropical.

Dada uma função inteira afim, $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o hiperplano H_k e os *semiespaços racionais* H_k^+ e H_k^- , respectivamente, como

$$\begin{aligned} H_k &:= \{x \in V; k(x) = 0\} = \{x \in V; jx = -a\}; \\ H_k^+ &:= \{x \in V; k(x) \geq 0\} = \{x \in V; jx \geq -a\}; \\ H_k^- &:= H_{-k}^+, \text{ onde } (-k)(x) = -k(x), \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Definição 3.10. Um subconjunto $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de poliedro racional se é uma interseção finita de semiespaços racionais.

Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Para cada $j \in A$, definimos o conjunto σ_j como sendo o lugar geométrico dos pontos onde o monômio $a_j \odot x^j$ é maximal, isto é,

$$\sigma_j := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = a_j \odot x^j\}.$$

Notemos que, para cada $j \in A$, σ_j é o subconjunto do \mathbb{R}^n onde f coincide com a função inteira afim $k_j(x) = a_j + jx$ e, portanto,

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in A} \sigma_j.$$

Além disso, se x é um ponto no interior de σ_j , então f é diferenciável em x e $d_x f = j$.

Lema 3.11. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Para cada $j \in A$, $\sigma_j := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = a_j \odot x^j\}$ é poliedro racional em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Fixado $j \in A$, definimos para cada $i \in A - \{j\}$, o semiespaço racional

$$H_{k_{ji}}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n; k_{ji}(x) = (a_j - a_i) + (j - i)x \geq 0\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} x \in \sigma_j &\Leftrightarrow f(x) = a_j \odot x^j \\ &\Leftrightarrow a_j \odot x^j \geq a_i \odot x^i, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow a_j + jx - a_i + ix \geq 0, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow x \in H_{k_{ji}}^+, \forall i \in A \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+. \end{aligned}$$

□

Definição 3.12. *Seja σ um poliedro racional em \mathbb{R}^n . Uma face τ de σ é dada por $\sigma \cap H_k$, onde k é uma função inteira afim tal que $\sigma \subset H_k^+$ ou $\sigma \subset H_k^-$. A fronteira relativa de σ , denotada por $\partial\sigma$, é definida como a união das faces próprias de σ .*

Notemos que a face de um poliedro racional também é um poliedro racional. Além disso, se $k \equiv 0$, então $H_k^+ = H_k = \mathbb{R}^n$ e $\sigma \cap \mathbb{R}^n = \sigma$, garantindo que σ é uma face dele mesmo.

Lema 3.13. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Dados $j, l \in A$ distintos, $\sigma_j \cap \sigma_l$ é vazio ou uma face comum de σ_j e σ_l .*

Demonstração. Para todo $j, l \in A$, $j \neq l$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_j \cap \sigma_l &= \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx \geq a_i + ix \text{ e } a_l + lx \geq a_i + ix, \forall i \in A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx = a_l + lx \geq a_i + ix, \forall i \in A\} = \sigma_l \cap H_{k_{lj}}. \end{aligned}$$

Mas vimos no Lema 3.11 que $\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$. Então, $\sigma_j \subset H_{k_{jl}}^+$ e, portanto, $\sigma_j \cap \sigma_l = \sigma_j \cap H_{k_{jl}}$ é uma face de σ_j . Analogamente, concluímos que $\sigma_j \cap \sigma_l = \sigma_l \cap H_{k_{lj}}$ e, portanto, $\sigma_j \cap \sigma_l$ é face de σ_l também. Logo, $\sigma_j \cap \sigma_l$, quando não for vazio, é uma face comum de σ_j e σ_l . □

Dado um poliedro σ em \mathbb{R}^n denotamos por $L(\sigma)$ o subespaço vetorial real de \mathbb{R}^n gerado por todas as diferenças $x - y$, onde $x, y \in \sigma$. Definimos a *dimensão* de σ como sendo $\dim(\sigma) := \dim(L(\sigma))$.

Uma coleção finita de poliedros $\mathcal{P} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ é chamada de *complexo poliédrico* se para cada $\sigma_i \in \mathcal{P}$ todas as suas faces também estão contidas em \mathcal{P} e se quando a

interseção $\sigma_i \cap \sigma_j$ for diferente de vazio ela produzir uma face de σ_i e de σ_j , para cada $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Os elementos $\sigma_i \in \mathcal{P}$ são chamados de células de \mathcal{P} . As células de dimensão 1 e 0 são chamadas, respectivamente, de arestas e vértices. Uma aresta que contém apenas um vértice é chamada de raio. Definimos o suporte de \mathcal{P} como

$$|\mathcal{P}| := \bigcup_i \sigma_i.$$

Se $|\mathcal{P}|$ é igual a um poliedro P (por exemplo, \mathbb{R}^n), dizemos que \mathcal{P} é uma *subdivisão poliédrica* de P (ou \mathbb{R}^n , respectivamente).

Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Pelos Lemas 3.11 e 3.13, a coleção de poliedros

$$\mathcal{S}(f) := \{\text{faces } \tau \text{ de } \sigma_j, \text{ para } j \in A\}$$

é um complexo poliédrico. Além disso, $\mathcal{S}(f)$ forma uma subdivisão poliédrica do \mathbb{R}^n . De fato, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\max\{a_i + ix_0, i \in A\} = a_j + jx_0, \text{ para algum } j \in A.$$

Logo, $x_0 \in \sigma_j$, para algum $j \in A$, garantindo assim que $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{j \in A} \sigma_j$. Por outro lado, segue da definição que $\sigma_j \subset \mathbb{R}^n$, para todo $j \in A$. Portanto,

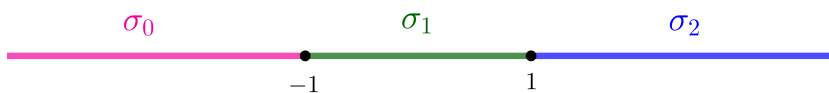
$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in A} \sigma_j.$$

Exemplo 3.14. Considere o polinômio tropical $f(x) = x^2 \oplus 1 \odot x \oplus 0$ do Exemplo 3.5. Então,

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = (-\infty, -1] \\ \sigma_1 &= \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 1 \odot x\} = [-1, 1] \\ \sigma_2 &= \{x \in \mathbb{R}; f(x) = x^2\} = [1, +\infty). \end{aligned}$$

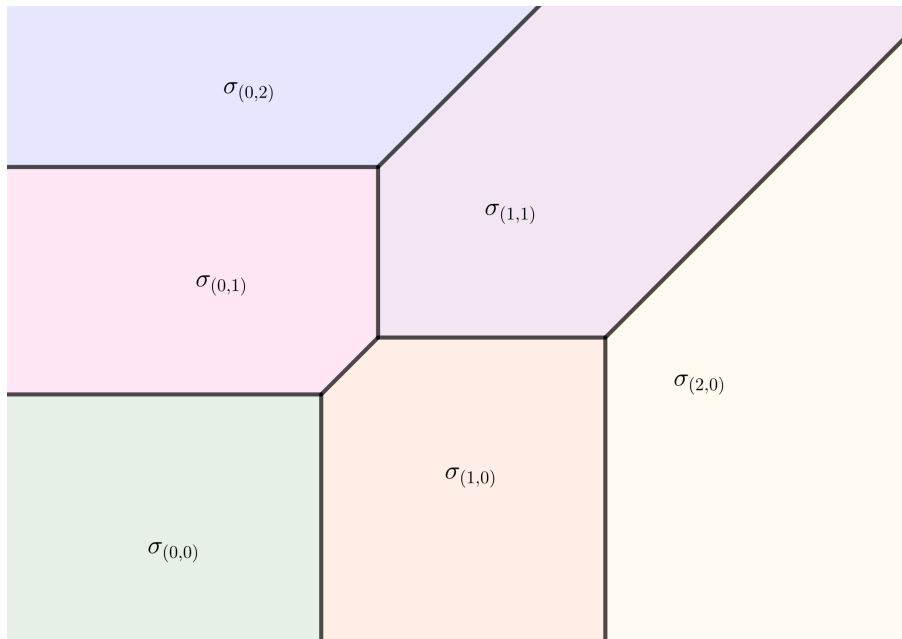
Observe na Figura 6, que os conjuntos acima de fato subdividem a reta real.

Figura 6 – Complexo poliédrico $\mathcal{S}(f)$.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Exemplo 3.15. Seja $g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 5$. A curva tropical $V(g)$ está representada na Figura 5 e as regiões σ_j estão representadas na Figura 7.

Figura 7 – Complexo poliédrico $\mathcal{S}(g)$.

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Aqui é importante chamar a atenção para o fato de que dois polinômios tropicais $f_1(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ e $f_2(x) = \bigoplus_{j \in B} b_j \odot x^j$, onde $A, B \subset \mathbb{Z}^n$ são finitos e $a_j, b_i \in \mathbb{T}$, para todo $i \in A$ e para todo $j \in B$, podem definir a mesma função em \mathbb{R}^n . Por exemplo, $f_1(x) = 0 \oplus x \oplus x^2$ e $f_2(x) = 0 \oplus (-1) \odot x \oplus x^2$ definem a mesma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} ,

$$f_1(x) = \max\{0, x, 2x\} = \max\{0, -1 + x, 2x\} = f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então devemos mostrar que a subdivisão poliédrica do \mathbb{R}^n , $\mathcal{S}(f)$, definida por um polinômio tropical em n variáveis f não depende da representação de f . Para isso, vamos definir a representação reduzida de f .

Definição 3.16. Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Definimos o suporte reduzido de f como sendo o conjunto

$$A^{\text{red}} := \{j \in A; \dim(\sigma_j) = n\}.$$

O polinômio tropical

$$f^{\text{red}}(x) = \bigoplus_{j \in A^{\text{red}}} a_j \odot x^j.$$

é chamado de representação reduzida de f .

Exemplo 3.17. Considere o polinômio tropical em duas variáveis

$$f(x, y) = x^2 \oplus x \odot y \oplus y^2 = \max\{2x, x + y, 2y\}.$$

Nesse caso, $A = \{(1, 1), (2, 0), (0, 2)\} \subset \mathbb{Z}^2$ e

$$\begin{aligned}\sigma_{(1,1)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = \max\{2x, x + y, 2y\}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\} \\ \sigma_{(2,0)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x = \max\{2x, x + y, 2y\}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq y\} \\ \sigma_{(0,2)} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2y = \max\{2x, x + y, 2y\}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x\}.\end{aligned}$$

É fácil ver que $\dim(\sigma_{(2,0)}) = 2$, $\dim(\sigma_{(0,2)}) = 2$ e $\dim(\sigma_{(1,1)}) = 1$. Assim, temos $f^{\text{red}}(x) = x^2 \oplus y^2$. Além disso, como funções em \mathbb{R}^2 ,

$$f^{\text{red}}(x) = \max\{2x, 2y\} = \max\{2x, x + y, 2y\} = f(x).$$

Vamos mostrar mais adiante que, como funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} , f e f^{red} são iguais e que $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f^{\text{red}})$. Porém, antes disso, vamos ver quais σ_j tem dimensão menor que n .

Lema 3.18. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Então, $\dim(\sigma_j) < n$ se, e somente se, $\sigma_j \subset \sigma_i$, para algum $i \in A - \{j\}$.*

Demonstração. Fixado $j \in A$, temos, pelo Lema 3.11, $\sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$, onde

$$H_{k_{ji}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; (a_j - a_i) + (j - i)x \geq 0\}.$$

Primeiro vamos mostrar que $\dim(\sigma_j) < n$ se, e somente se, σ_j está contido em algum hiperplano $H_{k_{ji}} = \{x \in \mathbb{R}^n; (a_j - a_i) + (j - i)x = 0\}$, para algum $i \in A - \{j\}$.

De fato, se $\sigma_j \subset H_{k_{ji}}$, para algum $i \in A$,

$$L(\sigma_j) \subset L(H_{k_{ji}}) = \{x \in \mathbb{R}^n; (j - i)x = 0\}$$

e, como $j \neq i$, concluímos que $\dim(\sigma_j) \leq \dim(H_{k_{ji}}) = n - 1 < n$.

Reciprocamente, suponhamos por absurdo que $\dim(\sigma_j) < n$ e que σ_j não está contido em $H_{k_{ji}}$, para todo $i \in A - \{j\}$. Então, para cada $i \in A - \{j\}$, existe $x_i \in \sigma_j$ tal que $x_i \notin H_{k_{ji}}$. Sejam m o número de elementos em $A - \{j\}$ e

$$x = \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i. \quad (3.1)$$

Se mostrarmos que $x \in \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^>$, onde $H_{k_{ji}}^>$ é o semiespaço aberto do \mathbb{R}^n definido por

$$H_{k_{ji}}^> = \{x \in \mathbb{R}^n; (a_j - a_i) + (j - i)x > 0\},$$

concluiremos que $\bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^>$ é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n não vazio. Mas todo aberto não vazio do \mathbb{R}^n contém uma base do \mathbb{R}^n como espaço vetorial. Como $\bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^> \subset \sigma_j$, teremos

$\dim(\sigma_j) = n$. Absurdo. Para ver que x definido em (3.1) pertence a $\bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^>$, considere $l \in A$ diferente de j . Então,

$$\begin{aligned} k_{jl}(x) &= k_{jl} \left(\sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i \right) = (a_j - a_l) + (j - l) \left(\sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i \right) \\ &= (a_j - a_l) + \frac{1}{m} \left[\sum_{i \in A - \{j\}} (j - l) x_i \right] = \frac{1}{m} \left[\sum_{i \in A - \{j\}} (a_j - a_l) + (j - l) x_i \right] \\ &= \frac{1}{m} \left[\sum_{i \in A - \{j\}} k_{jl}(x_i) \right] > 0, \end{aligned}$$

uma vez que $k_{jl}(x_i) \geq 0$, para todo $i \in A - \{j, l\}$ pois $x_i \in \sigma_j$, para todo $i \in A - \{j, l\}$ e $k_{jl}(x_l) > 0$ ($x_l \in \sigma_j$, logo pertence ao semiespaço fechado $H_{k_{jl}}^+$ mas não pertence ao hiperplano $H_{k_{jl}}$). Assim, $x \in \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^>$. Logo, se $\dim(\sigma_j) < n$, σ_j está contido em $H_{k_{ji}}$, para algum $i \in A$, $i \neq j$.

Finalmente, podemos concluir a demonstração do lema observando que se σ_j está contido em $H_{k_{ji}}$, para algum $i \in A$, $i \neq j$, então, pela igualdade (3.13), trocando l por i ,

$$\sigma_j = \sigma_j \cap H_{k_{ji}} = \sigma_i \cap \sigma_j \Rightarrow \sigma_j \subset \sigma_i, \text{ para algum } i \in A, i \neq j.$$

□

Com um argumento análogo ao usado na demonstração do Lema 3.18 para mostrar que os σ'_i s de dimensão menor que n são faces de σ_i , para algum $i \neq j$, vamos mostrar que as faces próprias de σ_j são interseções de σ_j com uma quantidade finita de σ'_i s.

Lema 3.19. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Então, para cada $j \in A$, as faces próprias de σ_j são interseções de σ_j com uma quantidade finita de σ'_i s.*

Demonstração. Sejam H_k^+ um semi-espço fechado contendo σ_j e $\tau = \sigma_j \cap H_k$ uma face própria de σ_j , isto é, $\tau \neq \emptyset$ e $\tau \neq \sigma_j$.

Sabendo que τ é convexo (σ_j e H_k são convexos) e que $\tau \subset \sigma_j = \bigcap_{i \in A} H_{k_{ji}}^+$, vamos mostrar que $\tau \subset H_{k_{ji}}$, para algum $i \in A$. Suponhamos $\tau \not\subset H_{k_{ji}}$, para todo $i \in A$, $i \neq j$. Então, para cada $i \in A$, $i \neq j$, existe $x_i \in \tau$ tal que $x_i \notin H_{k_{ji}}$ (logo, $x_i \in H_{k_{ji}}^>$, $\forall i \neq j$). Sejam m o número de elementos do conjunto $A - \{j\}$ e

$$x = \sum_{i \in A - \{j\}} \frac{1}{m} x_i.$$

Então, $x \in \tau$ (que é convexo) e $x \in \bigcap_{i \neq j} H_{k_{ji}}^>$ ($k_{ji}(x) > 0$, como na demonstração do Lema 3.19). Então,

$$x \in \left(\bigcap_{i \neq j} H_{k_{ji}}^> \right) \subset \sigma_j \Rightarrow x \in \text{int}(\sigma_j),$$

pois $H_{kji}^>$ é um subconjunto aberto em \mathbb{R}^n . Absurdo pois nenhum ponto de $\tau = \sigma_j \cap H_k$ pode ser ponto interior de σ_j (que está contido, por definição de face, em H_k^+). Logo, $\tau \subset H_{kji}$, para algum $i \in A$, $i \neq j$ e

$$\tau = \sigma_j \cap H_k \subset H_{kji} \Rightarrow \tau = \sigma_j \cap H_k \cap H_{kji} = \sigma_j \cap \sigma_i \cap H_k.$$

Isso mostra que τ é uma face de $\sigma_j \cap \sigma_i$, que por sua vez é uma face de σ_j . Se $\tau = \sigma_j \cap \sigma_i$, nada mais temos a fazer. Caso contrário, τ será uma face própria de

$$\sigma_j \cap \sigma_i = \sigma_j \cap H_{kji} = \left(\bigcap_{i \neq j} H_{kji}^+ \right) \cap H_{kji}.$$

Repetindo o argumento para τ como face de $(\bigcap_{i \neq j} H_{kji}^+) \cap H_{kji}$, vamos concluir que $\tau \subset H_{kjl}$, para algum $l \neq i, j$. Como σ_j é interseção de um número finito de semi-espacos fechados, o processo é finito e termina quando τ é uma interseção de σ_j com uma quantidade finita de σ_i . \square

Observação 3.20. Vimos até aqui que dado um polinômio tropical em n variáveis,

$$f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j,$$

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j \in A} \sigma_j = \bigcup_{j \in A^{\text{red}}} \sigma_j,$$

onde a última igualdade segue do Lema 3.18. Também pelo Lema 3.18, podemos concluir que todo σ_j de dimensão máxima n tem interior não vazio. Logo, para qualquer x no interior de σ_j , isto é, para qualquer $x \in \sigma_j$ tal que $x \notin V(f)$, vale que $d_x f = j$. Assim,

$$A^{\text{red}} := \{j \in A; \dim(\sigma_j) = n\} = \{d_x f; x \in \mathbb{R}^n \setminus V(f)\}.$$

Lema 3.21. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Como funções em \mathbb{R}^n , temos $f \equiv f^{\text{red}}$. Além disso, dois polinômios tropicais definem a mesma função se, e somente se, as suas representações reduzidas coincidem (como soma de monômios tropicais). Em particular, a subdivisão $\mathcal{S}(f)$ é independente da representação de f .*

Demonstração. Pela Observação 3.20, cada $x \in \mathbb{R}^n$ está contido em algum σ_j , com $\dim(\sigma_j) = n$. Com isso,

$$f(x) = a_j \odot x^j = f^{\text{red}}(x).$$

Além disso, como

$$A^{\text{red}} = \{d_x f; x \in \mathbb{R}^n \setminus V(f)\}.$$

garantimos que se dois polinômios tropicais descrevem a mesma função, então eles tem o mesmo suporte reduzido. O valor $f(x) = a_i \oplus x^i$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, com $d_x f = i$, determina o coeficiente a_i de x^i unicamente. Assim, segue dois polinômios tropicais definem

a mesma função se, e somente se, as suas representações reduzidas coincidem. Por fim, pelo Lema 3.18, cada σ_j de dimensão menor que n está contido em algum σ_i de dimensão n (A é finito) e portanto é uma face de σ_i ($\sigma_j = \sigma_j \cap \sigma_i$). Logo, $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f^{\text{red}})$, garantindo que $\mathcal{S}(f)$ é independente da representação de f . \square

3.4 TEOREMA DA DUALIDADE

Nessa seção associaremos a um polinômio tropical f um polígono $NP(f)$, chamado polígono de Newton de f . Veremos também que esse polígono vem com uma subdivisão que é dual à subdivisão poliédrica do \mathbb{R}^n definida pela hipersuperfície tropical $V(f)$.

Definição 3.22. Seja $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a envoltória convexa de X , denotada por $\text{Conv}(X)$, como

$$\text{Conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^m b_i x_i; 0 \leq b_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \sum_{i=1}^m b_i = 1 \right\}.$$

Em outras palavras, $\text{Conv}(X)$ é o menor subconjunto convexo de \mathbb{R}^n contendo X .

Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Definimos o *polígono de Newton* de f , denotado $NP(f)$, como a envoltória convexa do conjunto

$$A' := \{j \in A; a_j \neq -\infty\}.$$

Exemplo 3.23. Consideremos o polinômio tropical em duas variáveis

$$g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 5.$$

Neste caso, o conjunto $A' = \{(2, 0), (2, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$. O Polígono de Newton $NP(g)$ é a envoltória convexa de A' , ou seja, é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$, representado na Figura 8.

Definimos as *faces inferiores* de um poliedro σ como aquelas que também são faces do poliedro $\sigma + \rho$, onde $\rho := \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

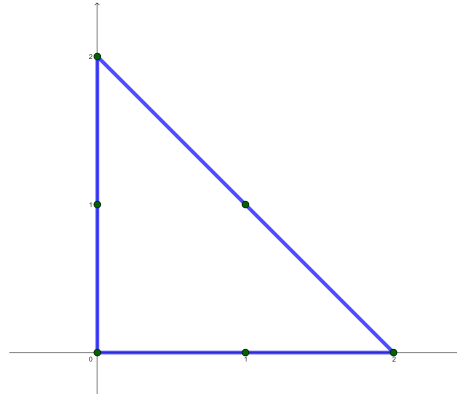
Definição 3.24. Dado $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$, um polinômio tropical em n variáveis, definimos os conjuntos

$$\tilde{A} = \{(j, -a_j) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}; j \in A'\} \text{ e } \tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A}).$$

A projeção das faces inferiores de \tilde{P} produz a subdivisão $SD(f)$ de $NP(f)$, a qual chamaremos de subdivisão dual de f .

Exemplo 3.25. Consideremos o polinômio $g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 5$. Para g , temos

Figura 8 – Polígono de Newton $NP(g)$.

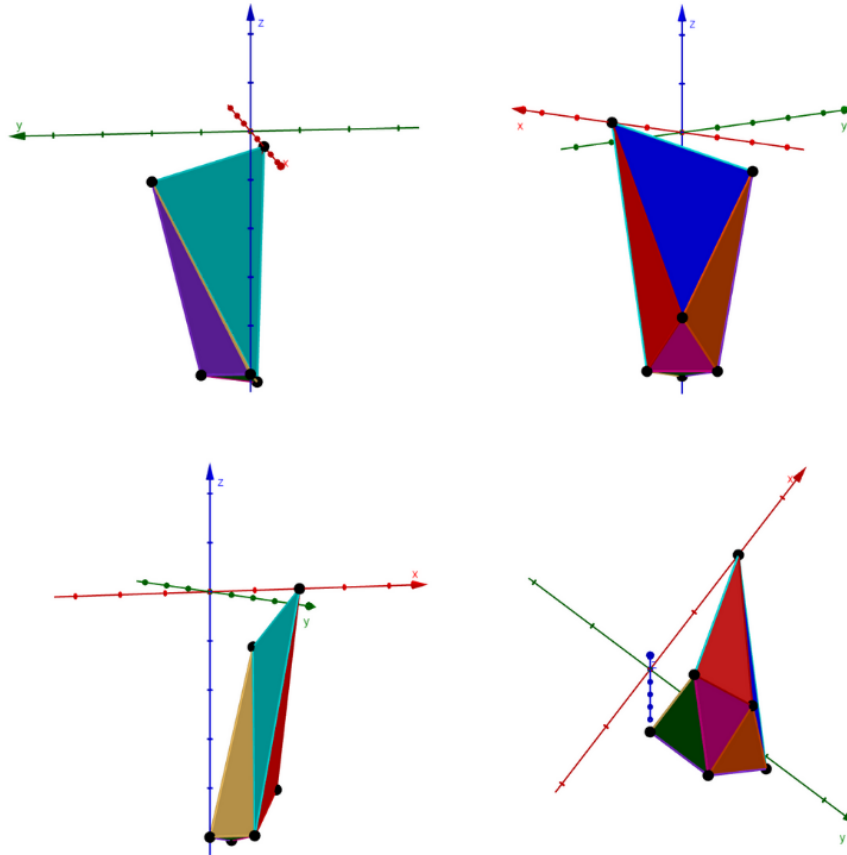


Fonte: Elaborada pela autora (2024).

$$\tilde{A} = \{(2, 0, 0), (0, 2, -1), (1, 1, -4), (1, 0, -5), (0, 1, -5), (0, 0, -5)\}.$$

A envoltória convexa de \tilde{A} , em várias perspectivas, está representado na Figura 9.

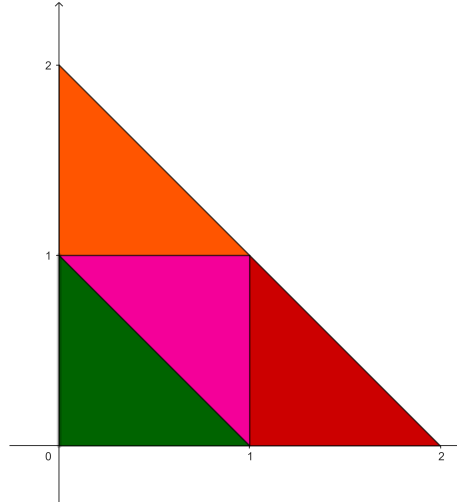
Figura 9 – Envoltória convexa de \tilde{A} .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Projetando as faces inferiores de \tilde{P} , temos a subdivisão dual $SD(g)$, indicada na

Figura 10.

Figura 10 – Subdivisão dual
 $SD(g)$.

Fonte: Elaborada pela autora
(2024).

Lema 3.26. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Para cada célula $\sigma \in \mathcal{S}(f)$, definimos o conjunto*

$$A_\sigma := \{j \in A; \sigma \subseteq \sigma_j\}.$$

$$\text{Temos } \sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j.$$

Demonstração. Uma inclusão é clara, pois se $\sigma \subseteq \sigma_j$ para todo $j \in A_\sigma$, então $\sigma \subseteq \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$. Observemos que, como $\sigma \in \mathcal{S}(f)$, σ é uma face de σ_i para algum $i \in A$. Logo, $\sigma = \bigcap_{j \in A'} \sigma_j$, para algum subconjunto $A' \subset A$ (Lema 3.19). Assim, $A' \subseteq A_\sigma$. Portanto,

$$\sigma \subseteq \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j \subseteq \bigcap_{j \in A'} \sigma_j = \sigma.$$

□

Proposição 3.27. *Seja $f(x) = \bigoplus_{j \in A} a_j \odot x^j$ um polinômio tropical em n variáveis. Para cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, definimos o conjunto*

$$A_x := \{j \in A; x \in \sigma_j\}.$$

Então, dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma \in \mathcal{S}(f)$, $x \in \text{int}(\sigma)$ se, e somente se, $A_x = A_\sigma$.

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ e $x \in \text{int}(\sigma)$. Primeiramente, vamos mostrar que $A_\sigma \subseteq A_x$. Sabemos que, em particular, $x \in \sigma$, garantindo que $A_\sigma \subseteq A_x$.

Agora, suponhamos, por absurdo, que $A_x \not\subseteq A_\sigma$. Assim, existe $j \in A_x$ tal que $\sigma \not\subseteq \sigma_j$. Então, $\sigma \cap \sigma_j$ é uma face própria de σ e σ_j não vazia, já que $x \in \sigma \cap \sigma_j$. Logo, $\sigma \cap \sigma_j \subseteq \partial\sigma$, o que é um absurdo, pois $x \in \text{int}(\sigma)$. Portanto, $A_x = A_\sigma$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, sejam $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tais que $A_x = A_\sigma$. Então, $x \in \sigma_j$ para todo $j \in A_x$ e, como $\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$, temos $x \in \sigma$. Suponhamos, por absurdo, que $x \in \partial\sigma$. Então, x pertence a alguma face própria de σ , digamos $\sigma \cap \sigma_l$, onde $\sigma \not\subseteq \sigma_l$ ou, equivalentemente, $l \notin A_\sigma$. Isso implica que $l \in A_x$, contrariando o fato de que $A_x = A_\sigma$. Portanto, $x \in \text{int}(\sigma)$, como queríamos. \square

O teorema a seguir nos dá a relação entre a subdivisão poliédrica definida por uma hipersuperfície tropical $V(f)$, que denotamos por $\mathcal{S}(f)$ e a sua subdivisão dual, $SD(f)$ de $NP(f)$.

Teorema 3.28 (Teorema da Dualidade). *As subdivisões $\mathcal{S}(f)$ de \mathbb{R}^n e $SD(f)$ de $NP(f)$ são duais no seguinte sentido: existe uma bijeção invertendo inclusões de células dada por*

$$\begin{aligned} D : \mathcal{S}(f) &\longrightarrow SD(f) \\ \sigma &\longmapsto D_\sigma := \text{Conv}(A_\sigma) \end{aligned} \tag{3.2}$$

tal que $\dim(\sigma) + \dim(D(\sigma)) = n$ e $L(\sigma)^\perp = L(D(\sigma))$. Além disso, $SD(f)$ é independente da representação de f e o conjunto de vértices de $SD(f)$ é igual ao suporte reduzido de f .

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a função D está bem definida, ou seja, que D_σ é uma célula de $SD(f)$. Seja $\sigma \in \mathcal{S}(f)$ e $x \in \text{int}(\sigma)$. Consideremos a forma linear $(x, -1) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, restrita a \tilde{P} , definida por $(x, -1)(m, b) = -b + mx$, onde $mx := \langle m, x \rangle$ é o produto escalar canônico do \mathbb{R}^n . Para cada vértice $(j, -a_j)$ de \tilde{P} , temos

$$(x, -1)(j, -a_j) = a_j + jx.$$

Vamos mostrar que os pontos de \tilde{P} nos quais $(x, -1)$ atinge o valor máximo são exatamente os pontos da envoltória convexa de

$$\tilde{A}_\sigma := \{(j, -a_j); j \in A_\sigma\}.$$

Como $A \in \mathbb{Z}^n$ é um conjunto finito, $A' = \{j \in A; a_j \neq -\infty\}$ também o é. Denotando $A_\sigma = \{j_1, \dots, j_m\}$, podemos escrever $A' = \{j_1, j_2, \dots, j_m, j_{m+1}, \dots, j_k\}$. Sabemos que

$$\sigma = \bigcap_{j=1}^m \sigma_{j_i} \Rightarrow x \in \sigma_{j_i}, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Logo,

$$f(x) = a_{j_1} + j_1x = \cdots = a_{j_m} + j_mx > a_{j_i} + j_ix, \forall i \in \{m+1, \dots, k\}.$$

Notemos que essa desigualdade é estrita, pois, caso contrário, existiria $l \notin A_\sigma$ tal que $l \in A_x$, contrariando fato de que $x \in \text{int}(\sigma)$.

Para simplificar a notação, denotemos $L := a_{j_1} + j_1x = \cdots = a_{j_m} + j_mx$ e $L_i := a_{j_i} + j_ix, \forall i \in \{m+1, \dots, k\}$. Então, $(x, -1)(j_i, -a_{j_i}) = L$ para todo $(j, -a_j) \in \tilde{A}_\sigma$. Como $\tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A})$, podemos escrever

$$\tilde{P} = \left\{ \sum_{i=1}^k b_i(j_i, -a_{j_i}); 0 \leq b_i \leq 1, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k b_i = 1 \right\}.$$

Assim, dado $z \in \tilde{P}$, temos:

$$\begin{aligned} (x, -1)z &= (x, -1)(b_1j_1 + \cdots + b_kj_k, -b_1a_{j_1} - \cdots - b_ka_{j_k}) \\ &= b_1j_1x + \cdots + b_kj_kx + b_1a_{j_1} + \cdots + b_ka_{j_k} \\ &= b_1(a_{j_1} + j_1x) + \cdots + b_m(a_{j_m} + j_mx) + \\ &\quad b_{m+1}(a_{j_{m+1}} + j_{m+1}x) + \cdots + b_k(a_{j_k} + j_kx) \\ &= (b_1 + \cdots + b_m)L + b_{m+1}L_{m+1} + \cdots + b_kL_k \end{aligned}$$

Como $L_i < L$ e $0 \leq b_i \leq 1, \forall i \in \{m+1, \dots, k\}$, temos

$$(x, -1)z \leq L(b_1 + \cdots + b_k) = L.$$

Logo, para todo $z \in \tilde{P}$, temos $(x, -1)z \leq L$. Ademais, podemos notar que a igualdade só é atingida se $b_{m+1} = \cdots = b_k = 0$, ou seja, se $b_1 + \cdots + b_m = 1$. Consequentemente, a igualdade só é atingida se $z \in \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$. Portanto, $(x, -1)|_{\tilde{P}}$ atinge o valor máximo exatamente nos pontos da envoltória convexa de \tilde{A}_σ .

Agora, vamos mostrar que $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ é uma face inferior de \tilde{P} . Para isso, consideremos a função

$$\begin{aligned} k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto xa - b - L. \end{aligned}$$

Notemos que, dado $(a, b) \in \tilde{P}$,

$$k(a, b) = xa - b - L = (x, -1)(a, b) - L \leq L - L = 0,$$

ou seja, $\tilde{P} \subset H_k^-$. Além disso,

$$k(a, b) = 0 \Leftrightarrow xa - b = L \Leftrightarrow (x, -1)(a, b) = L \Leftrightarrow (a, b) \in \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma).$$

Logo, $H_k \cap \tilde{P} = \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$. Portanto, $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ é uma face de \tilde{P} .

O poliedro $\tilde{P} + \rho$, pode ser descrito como $\tilde{P} + \rho = \{(a, b + \lambda); (a, b) \in \tilde{P}, \lambda \geq 0\}$. Assim, dado $(a, b + \lambda) \in \tilde{P} + \rho$, temos,

$$k(a, b + \lambda) = xa - b - \lambda - L \leq L - \lambda - L = -\lambda \leq 0 \Rightarrow \tilde{P} + \rho \subset H_k^-$$

Além disso, para todo $(a, b + \lambda) \in \tilde{P} + \rho$

$$k(a, b + \lambda) = 0 \Leftrightarrow xa - b - \lambda - L = 0 \Leftrightarrow xa - b = L \text{ e } \lambda = 0 \Leftrightarrow (a, b) \in \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma).$$

Logo, $H_k \cap (\tilde{P} + \rho) = \text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$, garantindo que $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ é também uma face de $\tilde{P} + \rho$. Portanto, $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ é uma face inferior de \tilde{P} . Como a projeção de $\text{Conv}(\tilde{A}_\sigma)$ em \mathbb{R}^n é D_σ , garantimos que D_σ é, de fato, uma célula de $SD(f)$.

Ademais, D é uma bijeção bem definida com inversa

$$\begin{aligned} D^{-1} : SD(f) &\longrightarrow \mathcal{S}(f) \\ C &\longmapsto \bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} D(D^{-1}(C)) &= D\left(\bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j\right) = \text{Conv}(C \cap A) = C \\ D^{-1}(D(\sigma)) &= D^{-1}(\text{Conv}(A_\sigma)) = \bigcap_{j \in \text{Conv}(A_\sigma) \cap A} \sigma_j = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j = \sigma. \end{aligned}$$

Além disso, a bijeção acima inverte inclusão, pois dados $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}(f)$, tais que $\sigma \subset \sigma'$, temos

$$\sigma \subset \sigma' \Rightarrow A_{\sigma'} \subset A_\sigma \Rightarrow \text{Conv}(A_{\sigma'}) \subset \text{Conv}(A_\sigma) \Rightarrow D(\sigma') \subset D(\sigma).$$

Também, dados $C, C' \in SD(f)$, tais que $C \subset C'$, temos

$$C \subset C' \Rightarrow C \cap A \subset C' \cap A \Rightarrow \bigcap_{j \in C' \cap A} \sigma_j \subset \bigcap_{j \in C \cap A} \sigma_j \Rightarrow D^{-1}(C') \subset D^{-1}(C).$$

Agora, vamos mostrar que $L(\sigma)^\perp \subset L(D(\sigma))$. Seja $\sigma \in \mathcal{S}(f)$. Para todo $i \in A_\sigma$, $i \in \text{Conv}(A_\sigma) = D_\sigma$, garantindo que

$$A_\sigma \subseteq D_\sigma \Rightarrow L(A_\sigma) \subseteq L(D_\sigma).$$

Dados $\alpha, \beta \in D_\sigma$, podemos escrever,

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 j_1 + \cdots + a_m j_m; 0 \leq a_k \leq 1, \forall k \in \{1, \dots, m\} \text{ e } \sum_{k=1}^m a_k = 1, \\ \beta &= b_1 j_1 + \cdots + b_m j_m; 0 \leq b_k \leq 1, \forall k \in \{1, \dots, m\} \text{ e } \sum_{k=1}^m b_k = 1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= a_1 j_1 + \cdots + a_m j_m - (b_1 j_1 + \cdots + b_m j_m) \\ &= ((1 - a_2 - \cdots - a_m) - (1 - b_2 - \cdots - b_m)) j_1 + (a_2 - b_2) j_2 + \cdots + (a_m - b_m) j_m \\ &= (j_2 - j_1)(a_2 - b_2) + \cdots + (j_m - j_1)(a_m - b_m).\end{aligned}$$

Como $L(D_\sigma) = \langle \alpha - \beta; \alpha, \beta \in D_\sigma \rangle$, temos $L(A_\sigma) \supseteq L(D_\sigma)$, garantindo que o espaço vetorial gerado por A_σ é igual ao espaço vetorial gerado por D_σ , ou seja, $L(A_\sigma) = L(D_\sigma)$.

Além disso, como $\sigma = \bigcap_{j \in A_\sigma} \sigma_j$, podemos escrever

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; a_j + jx = a_i + ix > a_l + lx, \forall i, j \in A_\sigma \text{ e } l \in A - A_\sigma\}.$$

Assim, dados $x, y \in \sigma$,

$$\begin{aligned}(a_j - a_i) + (j - i)x &= 0 \text{ e} \\ (a_j - a_i) + (j - i)y &= 0, \forall i, j \in A_\sigma \\ \Rightarrow (j - i)(x - y) &= 0, \forall i, j \in A_\sigma.\end{aligned}$$

Ou seja, todo vetor de $L(\sigma) = \langle x - y; x, y \in \sigma \rangle$ é ortogonal a todo vetor de $L(A_\sigma) = L(D_\sigma)$. Portanto, $L(\sigma) \subset L(D_\sigma)^\perp$. Para a inclusão contrária, vamos citar a Proposição 1.67 em (7).

Ademais, sabemos que

$$\dim(L(D_\sigma)^\perp) + \dim(L(D_\sigma)) = n \Rightarrow \dim(L(\sigma)) + \dim(L(D_\sigma)) = n,$$

como queríamos.

Por fim, vamos mostrar que o conjunto de vértices de $SD(f)$ está em bijeção com A^{red} . Se $j \in A^{\text{red}}$, $\dim(\sigma_j) = n$, garantindo que $A_{\sigma_j} = \{j\}$. Assim, para todo $j \in A^{\text{red}}$, $D(\sigma_j) := \text{Conv}(A_{\sigma_j}) = \{j\}$ é a projeção de uma face inferior de \tilde{P} , o que implica que $\{j\} \in SD(f)$ e, portanto $\{j\}$ é um vértice de $SD(f)$. Reciprocamente, suponhamos que $\sigma \in SD(f)$ seja um vértice. Então, $\sigma = \{i\}$, para algum $i \in \mathbb{Z}^n$ e $\{i\}$ é a projeção de uma face inferior σ' de \tilde{P} . Nesse caso, σ' deve ter a forma

$$\{(j, -a_j + \lambda); \lambda \geq 0, \text{ para algum } j \in A\}$$

, pois, do contrário, a projeção teria outro índice além de j que deve ser igual a i , e

$$(x, -1)(j, -a_j) = a_j + jx > a_l + lx, \text{ para todo } l \in A, l \neq j.$$

Assim, $x \in \text{int}(\sigma_j)$ e $j \in A^{\text{red}}$. Portanto, $SD(f)$ é independente da representação de f e o conjunto de vértices de $SD(f)$ é igual a A^{red} .

□

Exemplo 3.29. Consideremos o polinômio tropical

$$g(x, y) = x^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 4 \odot x \odot y \oplus 5 \odot x \oplus 5 \odot y \oplus 5.$$

A cônica tropical $V(g)$ está representada na Figura 5.

O conjunto

$$A = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}.$$

Assim, a subdivisão do \mathbb{R}^2 associada a g é dada por

$$\mathcal{S}(g) = \{\text{faces de } \sigma_{(i,j)}; (i, j) \in \{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}\},$$

onde as faces dos $\sigma_{(i,j)}$'s são os próprios $\sigma_{(i,j)}$'s e as interseções não vazias entre eles, que são justamente as arestas e os vértices da curva tropical $V(g)$, representada na Figura 7.

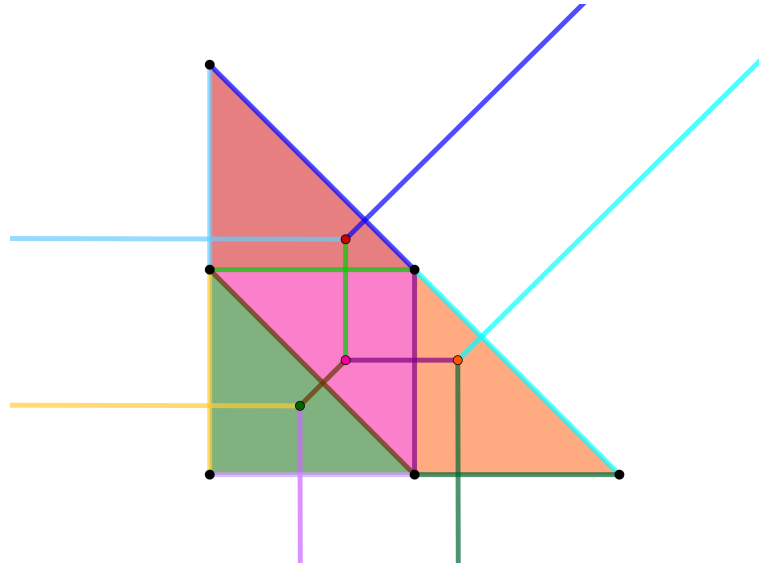
Notemos que para cada célula $\sigma_{(i,j)} \in \mathcal{S}(g)$, o conjunto $A_{\sigma_{(i,j)}} = \{(i, j)\}$, pois, como $\sigma_{(i,j)}$ é uma célula de dimensão 2, não está contida em nenhuma outra célula. Pelo Teorema da Dualidade, cada célula $\sigma_{(i,j)}$ é dual a $\text{Conv}(A_{\sigma_{(i,j)}}) = \{(i, j)\}$, ou seja, a um vértice da subdivisão dual $SD(g)$.

Por outro lado, se a célula de $\mathcal{S}(f)$ for uma aresta a_l da curva tropical $V(g)$, então ela será a interseção das duas regiões que essa aresta pertence, digamos $\sigma_{(i,j)} \cap \sigma_{(n,o)}$. Neste caso, $A_{a_l} = \{(i, j), (n, o)\} \Rightarrow \text{Conv}(A_{a_l})$ é o segmento de reta que liga (i, j) a (n, o) . Ou seja, se a célula for uma aresta, ela se relaciona com uma aresta da subdivisão dual.

Agora, se a célula é um vértice v_m da curva tropical $V(g)$, ela é a interseção de três regiões $\sigma_{(i,j)}$, digamos, $\sigma_{(i,j)}$, $\sigma_{(n,o)}$ e $\sigma_{(p,q)}$. Neste caso, $A_{v_m} = \{(i, j), (n, o), (p, q)\} \Rightarrow \text{Conv}(A_{v_m})$ é o triângulo de vértices (i, j) , (n, o) e (p, q) . Isto é, se a célula de $\mathcal{S}(g)$ é um vértice, ela se relaciona com um triângulo na subdivisão dual.

Essa relação de dualidade está representada geometricamente na Figura 11, onde

- os vértices da curva tropical e os triângulos correspondentes estão da mesma cor;
- as arestas da curva tropical, que são duais às arestas da subdivisão dual estão representadas na mesma cor e elas são perpendiculares;
- os vértices em preto da subdivisão dual são duais as regiões $\sigma_{(i,j)}$.

Figura 11 – Curva $V(g)$ e subdivisão dual $SD(g)$.

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Observação 3.30. Seja $V(f)$ uma curva tropical e $SD(f)$ a sua subdivisão dual. Seja v um vértice da curva tropical. Sabemos, pelo Teorema 3.28, que o vértice v corresponde a um polígono P na subdivisão dual $SD(f)$. Além disso, as arestas que constituem a fronteira desse polígono P são duais às arestas adjacentes a v na curva tropical $V(f)$. Denotemos essas arestas na curva tropical $V(f)$ de a_1, \dots, a_m e as suas arestas duais na subdivisão dual de A_1, \dots, A_m . Lidando com essas arestas A_i como vetores e tendo que P é um polígono fechado, garantimos que

$$\sum_{i=1}^m A_m = 0.$$

Além disso, cada aresta A_i possui um comprimento inteiro (quantidade de pontos inteiros na aresta menos 1), que vamos denotar por w_i . Seja u_i o vetor inteiro primitivo que inicia no vértice v e aponta na direção da aresta a_i . Notemos que esse vetor é ortogonal a A_i , garantindo que

$$\sum_{i=1}^m w_i u_i = 0.$$

Assim, podemos associar a cada aresta a_i da curva tropical $V(f)$ um inteiro w_i , que chamamos de *peso*, e garantir que cada vértice da curva tropical $V(f)$ satisfaz a condição de que a soma ponderada dos vetores inteiros primitivos de todas as arestas adjacentes ao vértice v somam 0. Chamamos essa condição de *condição de balanceamento*.

Pela Observação 3.30, podemos definir as curvas tropicais como grafos equilibrados no \mathbb{R}^2 que satisfazem essa condição de balanceamento, como veremos no próximo capítulo.

4 CURVAS TROPICAIS COMO GRAFOS EQUILIBRADOS

O nosso principal objetivo é contar o número de curvas complexas de grau d e gênero g no plano projetivo passando por um determinado número de pontos. Apesar das definições do capítulo anterior serem todas para hipersuperfícies tropicais (\mathbb{R}^n), a partir de agora vamos nos restringir apenas às curvas tropicais. Introduziremos uma nova definição de curvas tropicais utilizando grafos ponderados, tendo como referência principal o artigo (1).

4.1 GRAFOS

Definição 4.1. Sejam I_1, \dots, I_k uma coleção de k intervalos reais fechados (limitados ou ilimitados). No conjunto

$$I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k := \bigcup_{i=1}^k (I_i \times \{i\}) \text{ (união disjunta dos intervalos)}$$

escolhemos P_1, \dots, P_r e Q_1, \dots, Q_r pontos de fronteira não necessariamente distintos, isto é, pontos da forma $(x, j) \in I_j \times \{j\}$ tais que x é extremo do intervalo I_j . Considere em $I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k$ a relação de equivalência \sim que identifica P_i e Q_i , para todo $i = 1, \dots, r$, ou seja ,

$$P \sim Q \Leftrightarrow P = P_i \text{ e } Q = Q_i, \text{ para algum } i = 1, \dots, r.$$

Chamamos de grafo o conjunto $\Gamma = (I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k) / \sim$, com a topologia induzida pela aplicação quociente $\pi : I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k \rightarrow (I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k) / \sim$ (chamada topologia quociente).

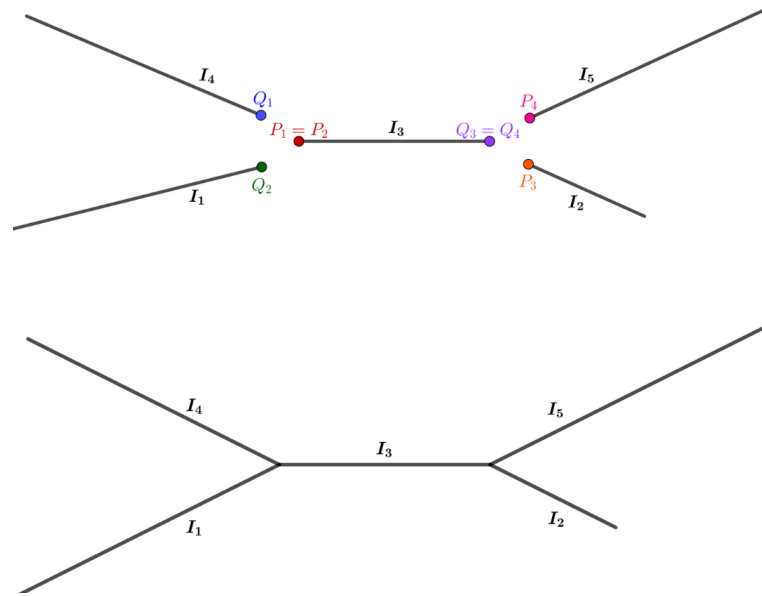
Exemplo 4.2. Dados os intervalos

$$I_1 = (-\infty, 0], I_2 = [0, 2], I_3 = [1, 4], I_4 = [4, 8] \text{ e } I_5 = [1, +\infty)$$

consideremos seguintes pontos na fronteira de $I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_5$:

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 &= (1, 3), P_3 = (0, 2) \text{ e } P_4 = (1, 5) \\ Q_1 &= (8, 4), Q_2 = (0, 1) \text{ e } Q_3 = Q_4 = (4, 3) \end{aligned}$$

Os intervalos I_i para $i = 1, \dots, 5$ e o grafo $\Gamma = (I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_5) / \sim$ estão na Figura 12.

Figura 12 – Intervalos I_i e grafo Γ .

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para o que segue, faremos as seguintes convenções e definições:

- identificamos o conjunto $I_i \times \{i\}$ com o intervalo I_i , para todo $i = 1, \dots, k$.
- chamamos os pontos de fronteira dos intervalos I_1, \dots, I_k de *flags* de Γ . O conjunto de *flags* é denotado por Γ' .
- as imagens dos *flags* de Γ , em Γ , são chamados de *vértices* de Γ . Dado F um *flag*, denotamos por ∂F o vértice de Γ que é imagem de F . O conjunto de vértices de Γ é denotado por Γ^0 .
- para cada vértice $V \in \Gamma^0$, definimos a *valência* de V , denotada por $val(V)$, como o número de *flags* F tais que $\partial F = V$. O conjunto dos vértices de valência 1 de Γ é denotado por Γ_∞^0 .
- os intervalos abertos $\text{int}(I_1), \dots, \text{int}(I_k)$ são subconjuntos abertos de Γ e são chamados de *arestas* de Γ . O conjunto de arestas de γ é denotado por Γ^1 . Cada *flag* é ponto de fronteira de exatamente uma aresta de Γ , que será denotada por $[F]$.
- uma aresta é dita limitada se seu intervalo aberto correspondente é limitado, e ilimitado caso contrário. O conjunto de arestas limitadas é denotada por Γ_0^1 e o conjunto de arestas ilimitadas é denotado por Γ_∞^1 . As arestas ilimitadas também são chamadas de raios de Γ .
- definimos o conjunto

$$\mathbb{F}\Gamma := \{(\partial F, [F]) \in \Gamma^0 \times \Gamma^1; F \in \Gamma'\}.$$

Definição 4.3. Um grafo Γ é chamado conexo se Γ é conexo como espaço topológico. O gênero de um grafo é definido como

$$g(\Gamma) := 1 - \#\Gamma^0 + \#\Gamma_0^1.$$

Definição 4.4. Um grafo Γ , com uma função $w : \Gamma^1 \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, chamada função peso, é dito ponderado. Para cada aresta $E \in \Gamma^1$, $w(E)$ é chamado peso da aresta.

Nas representações geométricas de um grafo Γ , indicaremos em cada aresta o seu respectivo peso, quando este for diferente de 1.

4.2 CURVAS TROPICAIS

Seja $\bar{\Gamma}$ um grafo ponderado sem vértices de valência 2. Removendo os vértices de valência 1 de $\bar{\Gamma}$, definimos $\Gamma := \bar{\Gamma} \setminus \Gamma_\infty^0$.

Seja $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua tal que, para uma aresta $E \in \Gamma^1$, a imagem $h(E)$ está contida em uma reta afim com inclinação racional. Então, podemos definir uma aplicação $u : \mathbb{F}\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^2$ que leva o par ordenado $(\partial F, [F])$ ao vetor inteiro primitivo (isto é, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$), que inicia em $h(\partial F)$ e aponta na direção de $h([F])$.

Definição 4.5. Uma curva tropical plana parametrizada é um par (Γ, h) , onde Γ e h são como acima, tal que

- (a) Para cada aresta $E \in \Gamma^1$, a restrição $h|_E$ é injetiva;
- (b) Para cada vértice $V \in \Gamma^0$, vale a condição de balanceamento

$$\sum_{F \in \Gamma^1; \partial F = V} w([F]) \cdot u(\partial F, [F]) = 0.$$

Uma curva tropical C em \mathbb{R}^2 é a imagem $h(\Gamma)$ de uma curva tropical parametrizada. Nesse caso, dizemos $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de C .

Notemos que uma curva tropical C em \mathbb{R}^2 também é um grafo e que diferentes curvas tropicais parametrizadas podem definir a mesma curva $C \subset \mathbb{R}^2$.

Dada uma curva tropical C em \mathbb{R}^2 , veremos como definir o polígono de Newton e a subdivisão dual só usando o grafo, ou seja, sem depender do polinômio tropical, como na capítulo anterior.

Sejam $C = h(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$ uma curva tropical e V um vértice de Γ com valência r . Então V possui r arestas adjacentes, digamos E_1, \dots, E_r , enumeradas no sentido anti-horário. No \mathbb{Z}^2 -reticulado, desenhamos um segmento $l(E_i)$, ortogonal a $h(E_i)$, de comprimento inteiro $w(E_i) = \#(\mathbb{Z}^2 \cap l(E_i)) - 1$, onde $l(E_1)$ começa em qualquer ponto do reticulado e $l(E_i)$ começa onde o $l(E_{i-1})$ termina. Sejam F_1, \dots, F_r os *flags* de Γ tais que $\partial F_i = V$ e

$[F_i] = E_i$, para todo $i = 1, \dots, r$ e $u(\partial F_i, [F_i]) = (a_i, b_i)$ para todo $i = 1, \dots, r$. Sabemos que $(-b_i, a_i)$ é um vetor perpendicular ao vetor (a_i, b_i) , em uma rotação anti-horária. Assim, suponhamos que o segmento $l(E_1)$ comece no ponto $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Fazendo o processo descrito acima, o segmento $l(E_1)$ terminará em $(m, n) + w(E_1)(-b_1, a_1)$, onde começará o $l(E_2)$. O segmento $l(E_2)$ terminará em $(m, n) + w(E_1)(-b_1, a_1) + w(E_2)(-b_2, a_2)$, onde começará o segmento $l(E_3)$, e assim por diante. Usando condição de balanceamento em Γ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r w([F_i]) \cdot (a_i, b_i) &= (w([F_1])a_1 + \dots + w([F_r])a_r, w([F_1])b_1 + \dots + w([F_r])b_r) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

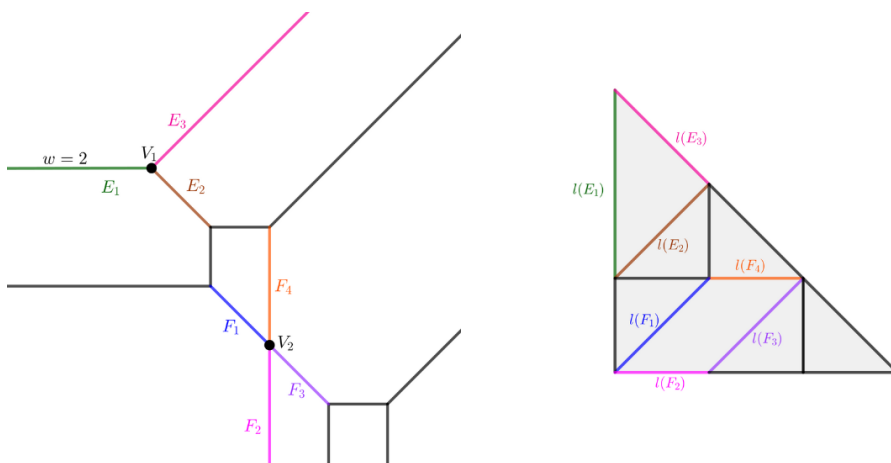
temos que o segmento $l(E_r)$ terminará no ponto:

$$\begin{aligned} &(m, n) + w(E_1)(-b_1, a_1) + \dots + w(E_r)(-b_r, a_r) \\ &= (m - (b_1w(E_1) + \dots + b_rw(E_r)), n + (a_1w(E_1) + \dots + a_rw(E_r))) \\ &= (m, n). \end{aligned}$$

Ou seja, os segmentos $l(E_i)$, para $i = 1, \dots, r$, formam um polígono fechado de r lados. Fazendo esse processo em todos os vértices e mantendo os segmentos perpendiculares às arestas comuns a dois vértices, desenhamos um polígono $NP(C)$ em \mathbb{R}^2 , chamado *polígono de Newton* de C , subdividido em polígonos menores, chamada *subdivisão dual* de C . Note que raios da curva C não estão entre dois vértices e, portanto, não são arestas comuns de dois polígonos na subdivisão dual, logo correspondem a segmentos na fronteira do polígono de Newton de C .

Exemplo 4.6. A Figura 13 representa uma curva tropical C e a sua subdivisão dual.

Figura 13 – Curva tropical C e a sua subdivisão dual.



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

A definição de curva tropical dada neste capítulo é equivalente à definição apresentada no capítulo anterior, como mostra o Teorema a seguir.

Teorema 4.7. *Qualquer curva tropical $C \subset \mathbb{R}^2$ é uma hipersuperfície tropical para algum polinômio f . Reciprocamente, toda hipersuperfície tropical $V(f) \subset \mathbb{R}^2$ pode ser parametrizada por uma curva tropical, isto é, $V(f) = h(\Gamma)$, para alguma curva tropical parametrizada $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Ver (4), Corolário 3.16. □

Definição 4.8. Uma curva tropical plana parametrizada (Γ, h) é dita simples se:

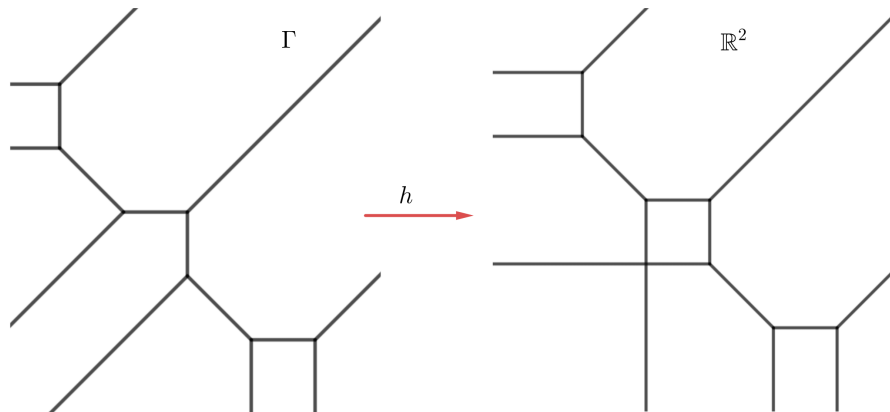
- todos os vértices de Γ tem valência 3,
- a aplicação h é injetiva no conjunto de vértices,
- dados um vértice V e uma aresta E , temos $h(V) \cap h(E) = \emptyset$,
- dados duas arestas E_1 e E_2 , temos $\#\{h(E_1) \cap h(E_2)\} \leq 1$,
- para todo $p \in \mathbb{R}^2$, temos $\#h^{-1}(p) \leq 2$.

Uma curva tropical plana C é dita simples se admite uma parametrização simples.

Observação 4.9. Na linguagem dual, uma curva é simples se, e somente se, sua subdivisão dual contém apenas triângulos e paralelogramos.

Exemplo 4.10. A Figura 14 mostra uma curva tropical parametrizada simples.

Figura 14 – Curva tropical parametrizada simples.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Definição 4.11. O gênero g de uma curva tropical parametrizada (Γ, h) é definida como o gênero do grafo Γ , ou seja, é dado por

$$g = 1 - \#\Gamma^0 + \#\Gamma_0^1,$$

onde Γ^0 é o conjunto de vértices de Γ e Γ_0^1 é o conjunto de arestas finitas de Γ . O gênero de uma curva tropical plana simples é o menor gênero de todas as parametrizações que a curva permite.

Proposição 4.12. *Uma curva tropical simples $C \subset \mathbb{R}^2$ admite uma única parametrização tropical simples. Além disso, qualquer outra parametrização não simples de C tem gênero estritamente maior que o gênero da parametrização simples.*

Demonstração. Ver (4) Proposição 4.3. □

Observação 4.13. Na linguagem dual, o gênero de uma curva plana tropical simples é o número de pontos do reticulado internos na subdivisão dual menos o número de paralelogramos.

Definição 4.14. O grau Δ de uma curva tropical plana C é o conjunto de direções dos raios juntamente com a soma dos pesos para cada direção. Na linguagem dual, o grau é apenas o polígono de Newton.

Para facilitar a notação, se o grau de uma curva C consistir nos vetores $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e $(1, 1)$ cada um d vezes (contados com os respectivos pesos), dizemos que o grau da curva C é d .

Exemplo 4.15. Consideremos a curva tropical C representada na Figura 13. Observemos que temos dois raios na direção $(-1, 0)$, mas um deles tem peso 2, três raios na direção $(1, 1)$ e três raios na direção $(0, -1)$. Logo, o grau Δ desta curva é dado por

$$\Delta = \{3 \cdot (-1, 0), 3 \cdot (1, 1), 3 \cdot (0, -1)\}.$$

Neste caso, dizemos que o grau da curva C é 3.

Definição 4.16. O tipo combinatório de uma curva tropical parametrizada (Γ, h) é dado pelo grafo ponderado Γ junto com a função $u : \mathbb{F}\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^2$. O tipo combinatório de uma curva tropical C é o tipo combinatório de qualquer parametrização de menor gênero possível.

Observação 4.17. Na linguagem dual, o tipo combinatório de uma curva tropical parametrizada (Γ, h) corresponde à sua subdivisão dual.

Dizemos que as curvas tropicais $C = h(\Gamma)$ e $C' = h'(\Gamma)$ são do mesmo tipo combinatório se para qualquer aresta $E \in \Gamma^1$, os segmentos $h(E)$ e $h'(E)$ são paralelos.

Definição 4.18. Seja (Γ, h) uma curva tropical parametrizada, V um vértice de Γ de valência 3 e E_1 , E_2 e E_3 as arestas adjacentes a V . A multiplicidade de V é definida por $w(E_1)w(E_2)|u(V, E_1) \wedge u(V, E_2)|$, onde $|u(V, E_1) \wedge u(V, E_2)|$ é a área do paralelogramo gerado por $u(V, E_1)$ e $u(V, E_2)$.

Note que a definição de multiplicidade de um vértice V de valência 3 de uma curva tropical parametrizada (Γ, h) está bem definida pois, pela condição de balanceamento, $w(E_1)u(V, E_1) + w(E_2)u(V, E_2) + w(E_3)u(V, E_3) = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} w(E_1)w(E_2)|u(V, E_1) \wedge u(V, E_2)| &= w(E_2)w(E_3)|u(V, E_2) \wedge u(V, E_3)| \\ &= w(E_1)w(E_3)|u(V, E_1) \wedge u(V, E_3)|. \end{aligned}$$

Observação 4.19. Na subdivisão dual, a multiplicidade de um vértice de valência 3 de uma curva tropical parametrizada (Γ, h) é 2 vezes a área do seu triângulo dual.

Definição 4.20. A multiplicidade $mult(C)$ de uma curva tropical plana simples C é o produto das multiplicidades de todos os vértices de valência 3 de Γ , onde (Γ, h) é uma parametrização simples de C .

Observação 4.21. Na linguagem dual, a multiplicidade de uma curva tropical plana simples C é o produto de todos os dobros das áreas dos triângulos da subdivisão dual.

Definição 4.22. Dizemos que os pontos $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{R}^2$ estão em posição tropical geral se para qualquer curva tropical $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ de gênero g e com x raios tal que $p_1, p_2, \dots, p_k \in h(\Gamma)$ e $k \geq g + x - 1$ valem as seguintes condições:

- (i) a curva $C = h(\Gamma)$ é simples;
- (ii) as imagens inversas $h^{-1}(p_1), \dots, h^{-1}(p_k)$ são disjuntas dos vértices de Γ ;
- (iii) $k = g + x - 1$.

Definição 4.23. Sejam $d \geq 0$ e g inteiros, $\Delta_d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq d\}$ e $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{3d+g-1}\} \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto de pontos em posição tropical. Denotamos por $N_{\text{trop}}(d, g)$ o número de curvas tropicais (simples) de grau Δ_d e gênero g passando por todos os pontos de \mathcal{P} , contadas com multiplicidade.

Observação 4.24. Em (4), Lema 4.22, G. Mikhalkin mostra que o número $N_{\text{trop}}(d, g)$ é finito e que tais curvas são todas curvas simples. Em (8), A. Gathmann e H. Markwig mostram que a definição de $N_{\text{trop}}(d, g)$ não depende da escolha dos pontos em posição geral.

Agora, vamos enunciar um resultado de G. Mikhalkin que traduz o problema enumerativo clássico de contar das curvas planas complexas de grau d e gênero g passando por $3d - g + 1$ pontos para o mundo tropical.

Teorema 4.25 (Teorema da Correspondência). *Para todo $d \geq 0$ e g inteiros, temos $N_{\text{trop}}(d, g) = N_{\text{cplx}}(d, g)$.*

Demonstração. Ver (4), Teorema 1. □

5 CAMINHOS RETICULADOS E CURVAS TROPICAIS

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de caminhos reticulados λ -crescente e mostrar como são calculadas as suas multiplicidades. Depois, apresentaremos a relação que esses caminhos possuem com o nosso problema enumerativo. As principais referências utilizadas foram o artigo (1) e a tese de doutorado (9).

5.1 CAMINHOS RETICULADOS

Definição 5.1. Um caminho $\gamma : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamado de caminho reticulado se $\gamma|_{[j-1, j]}$, $j = 1, \dots, n$, é função afim e $\gamma(j) \in \mathbb{Z}^2$, $\forall j = 0, \dots, n$.

Observação 5.2. A imagem de um caminho reticulado $\gamma : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma poligonal e, portanto, $\gamma|_{[j, j+1]}$ fica completamente determinado por $\gamma(j)$ e $\gamma(j+1)$, para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Vamos fixar uma aplicação linear $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\lambda(x, y) = x - \varepsilon y$, onde ε é um número irracional positivo e pequeno. Com essa escolha, $\lambda|_{\mathbb{Z}^2}$ é injetiva, pois ε é irracional.

Definição 5.3. Um caminho reticulado γ é dito λ -crescente se $\lambda \circ \gamma$ é estritamente crescente.

Definição 5.4. Dado um caminho reticulado γ λ -crescente, definimos como um passo de nosso caminho a imagem de um intervalo entre dois números inteiros consecutivos, ou seja, um passo é dado por $\gamma|_{[j-1, j]}$, $j = 1, \dots, n$.

Seja $\Delta_d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq d\}$, o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, d)$ e $(d, 0)$. Vamos analisar as possibilidades de passos em um caminho reticulado λ -crescente $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$. Para cada $k \in [0, n-1]$, com $k \in \mathbb{Z}$, usaremos a notação $\gamma(k) = (x_k, y_k)$. Como o caminho γ é reticulado, sabemos que $\gamma|_{[k, k+1]}$ é linear e que as imagens $\gamma(k)$ e $\gamma(k+1)$ estão em \mathbb{Z}^2 . Para esse caminho ser λ -crescente, $\lambda \circ \gamma$ deve ser estritamente crescente. Logo, $\lambda \circ \gamma(k) < \lambda \circ \gamma(k+1)$, ou seja, $x_k - \varepsilon y_k < x_{k+1} - \varepsilon y_{k+1}$. Como as imagens de k e $k+1$ estão em \mathbb{Z}^2 , temos duas possibilidades:

- (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}) estão em uma mesma coluna $\{x = i\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} -\varepsilon y_k &< -\varepsilon y_{k+1} \\ y_k &> y_{k+1}. \end{aligned}$$

Logo, quando mantemos a primeira coordenada, a segunda coordenada diminui.

- (x_k, y_k) e (x_{k+1}, y_{k+1}) estão em colunas diferentes, digamos que $x_k = i$ e $x_{k+1} = j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Com isso,

$$\begin{aligned} i - \varepsilon y_k &< j - \varepsilon y_{k+1} \\ i - j &< \varepsilon(y_k - y_{k+1}) \end{aligned}$$

Como ε é um número irracional pequeno, podemos supor que $\varepsilon < \frac{1}{d}$. Além disso, $|y_k - y_{k+1}| < d$, pois y_k e y_{k+1} estão em Δ_d . Com isso,

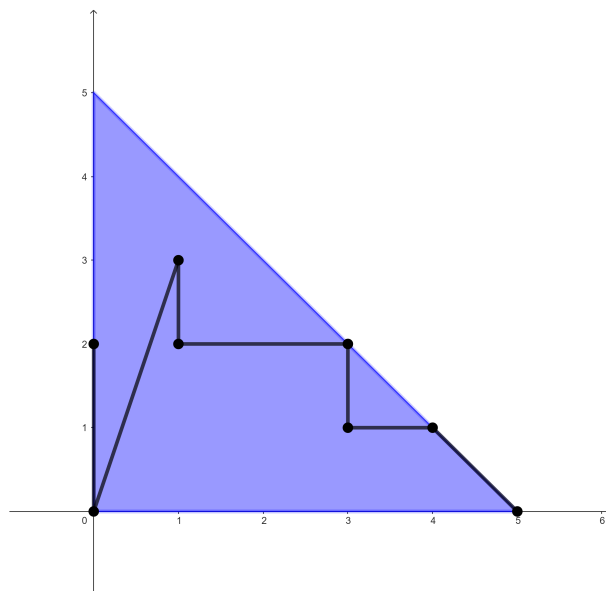
$$\varepsilon(y_k - y_{k+1}) < \varepsilon|y_k - y_{k+1}| < 1 \Rightarrow i - j < 1.$$

Sabemos ainda que $i, j \in \mathbb{Z}$ e $i \neq j$. Assim, $i - j < 0$, garantindo que $i = x_k < x_{k+1} = j$. Logo, a relação entre y_k e y_{k+1} é irrelevante neste caso.

Portanto, podemos ter dois tipos de passos: um que desce verticalmente e outro que começa na reta $\{x = i\}$ e termina na reta $\{x = j\}$, com $j - i \geq 1$ (com a variação em y podendo ser crescente ou decrescente).

Exemplo 5.5. A Figura 15 representa um caminho reticulado λ -crescente no triângulo Δ_5 , onde podemos observar os passos mencionados acima. Exemplificando, o passo $\gamma|_{[0,1]}$ desce verticalmente na reta $x = 0$, e o passo $\gamma|_{[1,2]}$ começa na reta $x = 0$ e termina na reta $x = 1$.

Figura 15 – Caminho reticulado λ -crescente.



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

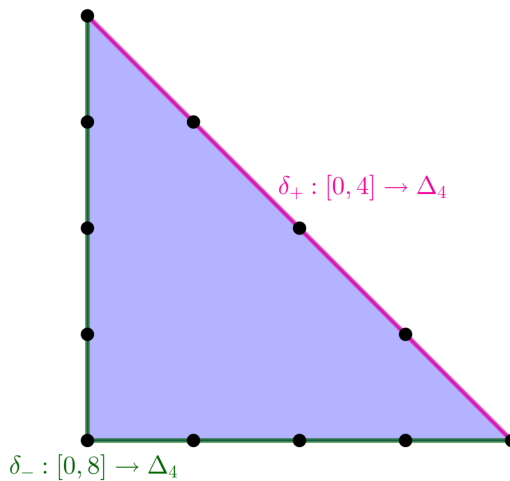
5.1.1 Multiplicidade de caminhos reticulados λ -crescente

Consideremos o triângulo Δ_d . Denotemos por p o ponto onde $\lambda|_{\Delta_d}$ atinge o mínimo, ou seja, $p = (0, d)$ e q o ponto onde $\lambda|_{\Delta_d}$ atinge o máximo, ou seja, $q = (d, 0)$. Os pontos p e q dividem a fronteira $\partial\Delta_d$ em dois caminhos reticulados λ -crescentes, a saber:

- um caminho que liga p a q e que percorre $\partial\Delta_d$ no sentido horário, denotado por $\delta_+ : [0, n_+] \rightarrow \partial\Delta_d$, onde n_+ é o número de pontos inteiros nessa parte da fronteira menos um;
- um caminho que liga p a q e que percorre $\partial\Delta_d$ no sentido anti-horário, denotado por $\delta_- : [0, n_-] \rightarrow \partial\Delta_d$, onde n_- representa o número de pontos inteiros nessa parte da fronteira menos um.

Exemplo 5.6. A Figura 16 representa os caminhos δ_+ e δ_- para $d = 4$.

Figura 16 – Caminhos δ_+ e δ_- em $\partial\Delta_4$.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Seja $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ um caminho reticulado λ -crescente tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(n) = q$. Definimos recursivamente as *multiplicidades positiva e negativa*, denotadas, respectivamente, por $\mu_+(\gamma)$ e $\mu_-(\gamma)$ como:

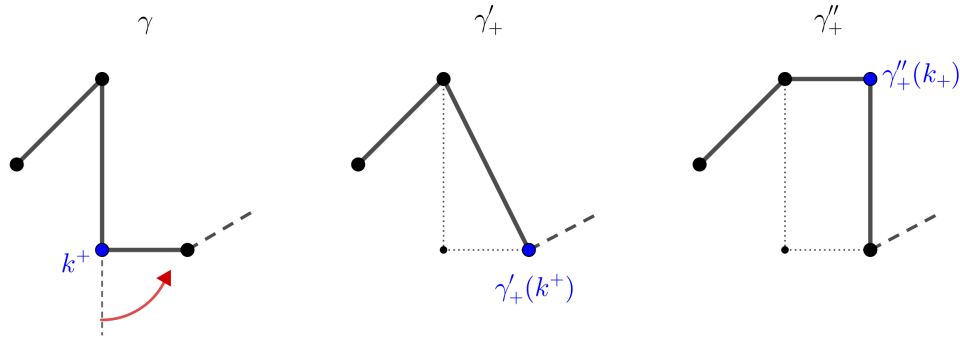
- $\mu_+(\delta_+) = 1$, $\mu_+(\delta_-) = 1$, $\mu_-(\delta_+) = 1$ e $\mu_-(\delta_-) = 1$.
- Se $\gamma \neq \delta_+$, seja $k^+ \in [0, n]$ o menor inteiro tal que γ vira à esquerda em $\gamma(k^+)$. Usando esse k^+ , definimos agora dois caminhos reticulados λ -crescentes:

- $\gamma'_+ : [0, n-1] \rightarrow \Delta_d$ tal que $\gamma'_+(j) := \gamma(j)$, para todo inteiro não negativo $j < k^+$ e $\gamma'_+(j) := \gamma(j+1)$, para todo inteiro não negativo $j \geq k^+$;

- $\gamma''_+ : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ tal que $\gamma''_+(j) := \gamma(j)$, para todo inteiro não negativo $j \neq k^+$ e $\gamma''_+(k^+) := \gamma(k^+ - 1) + \gamma(k^+ + 1) - \gamma(k^+)$.

Os caminhos γ'_+ e γ''_+ estão representados na Figura 17.

Figura 17 – Caminhos γ'_+ e γ''_+ .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Seja T o triângulo com vértices $\gamma(k^+ - 1)$, $\gamma(k^+ + 1)$ e $\gamma(k^+)$. Definimos a multiplicidade positiva $\mu_+(\gamma)$ como:

$$\mu_+(\gamma) := 2 \cdot \text{área de } T \cdot \mu_+(\gamma'_+) + \mu_+(\gamma''_+).$$

Se a imagem de γ''_+ não está em Δ_d , definimos $\mu_+(\gamma''_+) := 0$.

Por fim, se não existir $k^+ \in [0, n]$ inteiro tal que γ vira à esquerda em $\gamma(k^+)$, definimos $\mu_+(\gamma) = 0$.

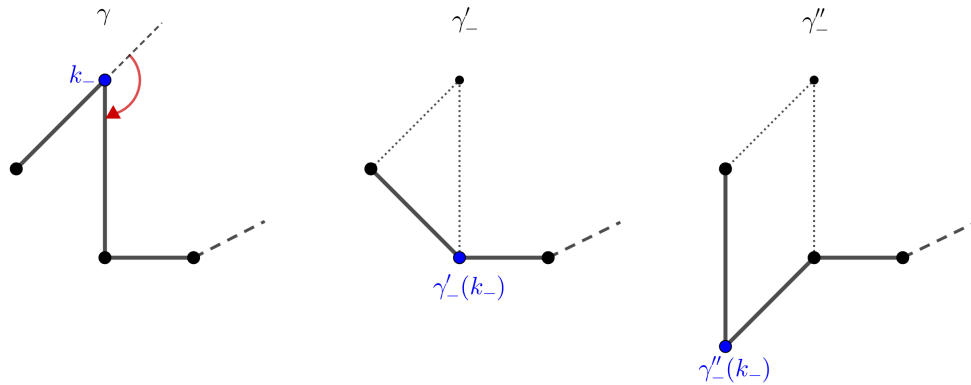
- (c) Se $\gamma \neq \delta_-$, o cálculo da multiplicidade negativa irá seguir os mesmos passos da multiplicidade positiva, porém consideraremos $k^- \in [0, n]$ como o menor inteiro tal que γ vira à direita em $\gamma(k^-)$. Neste caso, definiremos:

- $\gamma'_- : [0, n - 1] \rightarrow \Delta_d$ tal que $\gamma'_-(j) := \gamma(j)$, para todo inteiro não negativo $j < k^-$, $\gamma'_-(j) := \gamma(j + 1)$, para todo inteiro não negativo $j \geq k^-$;
- $\gamma''_- : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ tal que $\gamma''_-(j) := \gamma(j)$, para todo inteiro não negativo $j \neq k^-$ e $\gamma''_-(k^-) := \gamma(k^- - 1) + \gamma(k^- + 1) - \gamma(k^-)$.

Os caminhos γ'_- e γ''_- estão representados na Figura 18.

Seja T o triângulo de vértices $\gamma(k^- - 1)$, $\gamma(k^- + 1)$ e $\gamma(k^-)$. Definimos a multiplicidade negativa $\mu_-(\gamma)$ utilizando a mesma fórmula da multiplicidade positiva:

$$\mu_-(\gamma) := 2 \cdot \text{área de } T \cdot \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-).$$

Figura 18 – Caminhos γ'_- e γ''_- .

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

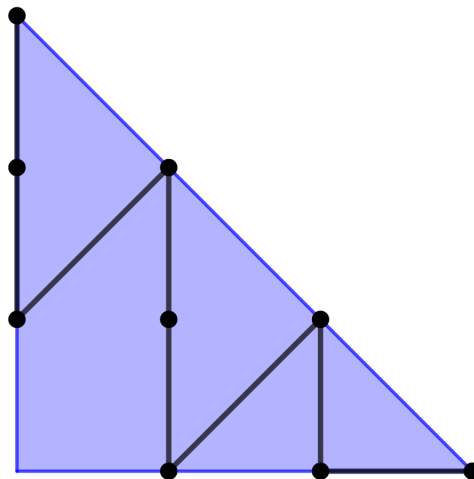
Se a imagem de γ''_- não está em Δ_d , definimos $\mu_-(\gamma''_-) := 0$.

E se não existir $k^- \in [0, n]$ inteiro tal que γ vira à direita em $\gamma(k^-)$, definimos $\mu_-(\gamma) = 0$.

A multiplicidade μ do caminho γ é dada por:

$$\mu(\gamma) := \mu_+(\gamma)\mu_-(\gamma).$$

Exemplo 5.7. Seja $\gamma : [0, 8] \rightarrow \Delta_3$ indicada na Figura 19.

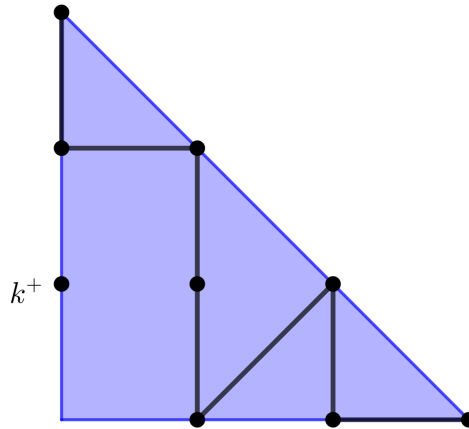
Figura 19 – Caminho γ em Δ_3 .

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Vamos calcular a multiplicidade deste caminho. Primeiramente, vamos calcular a multiplicidade positiva. Observando o caminho, temos que o primeiro ponto em que γ vira à esquerda é em $k^+ = 2$. Vamos construir os caminhos γ'_+ e γ''_+ .

- $\gamma'_+(j) := \gamma(j)$, para todo $j < 2$ e $\gamma'_+(j) := \gamma(j+1)$, para $j \geq 2$, como representado na Figura 20.

Figura 20 – Caminho γ'_+ .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

- Notemos que

$$\gamma''_+(2) = \gamma(1) + \gamma(3) - \gamma(2) = (0, 2) + (1, 2) - (0, 1) = (1, 3) \notin \Delta_3.$$

Logo, a multiplicidade do caminho γ''_+ é nula.

Notemos que o triângulo T , neste caso, é o triângulo de vértices $(0, 2)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$, tendo assim área $\frac{1}{2}$. Com isso, a multiplicidade positiva de γ é dada por

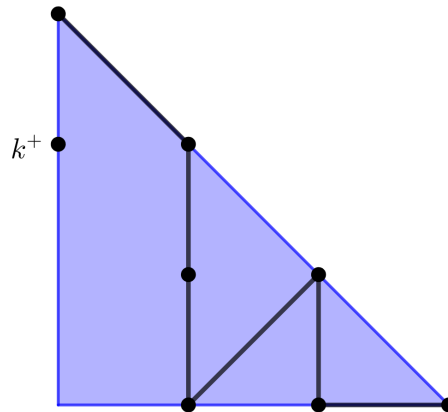
$$\begin{aligned} \mu_+(\gamma) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_+(\gamma'_+) + \mu_+(\gamma''_+) \\ &= \mu_+(\gamma'_+) \end{aligned}$$

Vamos repetir esse processo para o caminho γ'_+ . O primeiro ponto k^+ tal que γ'_+ faz uma curva à esquerda é em $k^+ = 1$. Para facilitar a notação, vamos escrever $(\gamma'_+)'_+$ como $(\gamma'_+)'$, omitindo o sinal “+” na notação à partir de agora. O caminho $(\gamma'_+)'$ está representado na Figura 21. Já o caminho $(\gamma'_+)'_+$ tem multiplicidade nula, pois

$$(\gamma'_+)'_+(1) = (0, 3) + (1, 2) - (0, 2) = (1, 3) \notin \Delta_3.$$

Como o triângulo T tem vértices $(0, 3)$, $(0, 2)$ e $(1, 2)$, temos que a área de T é dada por $\frac{1}{2}$. Logo,

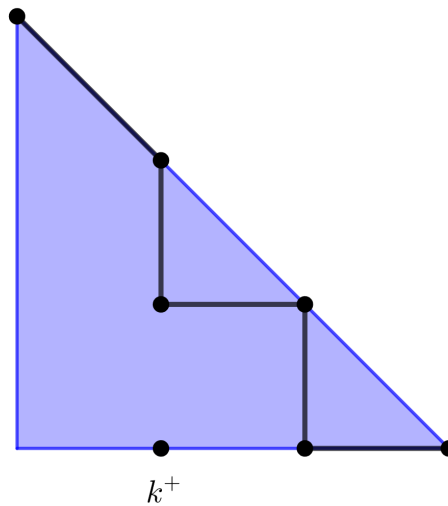
$$\begin{aligned} \mu_+(\gamma) = \mu_+(\gamma'_+) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_+((\gamma'_+)'_+) + \mu_+((\gamma'_+)'_+)' \\ &= \mu_+((\gamma'_+)'_+)' \end{aligned}$$

Figura 21 – Caminho (γ'_+) '.

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Vamos repetir o processo para o caminho (γ'_+) ', representado na Figura 21. O primeiro k^+ tal que (γ'_+) ' faz uma curva à esquerda é em 3. A Figura 22 representa o caminho $((\gamma'_+))'$ '. Novamente, temos a multiplicidade do caminho $((\gamma'_+))''$ como nula, pois

$$((\gamma'_+))''(3) = (1, 1) + (2, 1) - (1, 0) = (2, 2) \notin \Delta_3.$$

Figura 22 – Caminho $((\gamma'_+))'$ '.

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

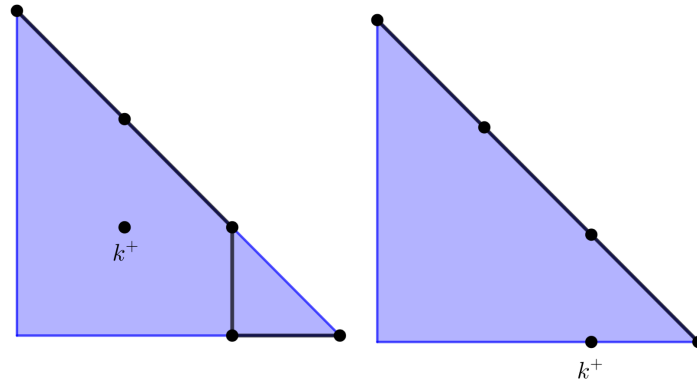
Novamente a área do triângulo T é $\frac{1}{2}$. Logo,

$$\mu_+(\gamma) = \mu_+((\gamma'_+))' = \mu_+(((\gamma'_+))')'.$$

Vamos repetir esse processo para o caminho $((\gamma'_+))'$ ', tendo mais dois passos na recursividade. Nos próximos passos ainda teremos a multiplicidade do segundo caminho

construído como nula (pela mesma justificativa do caso anterior) e a área do triângulo T como sendo $\frac{1}{2}$. Representamos os caminhos resultantes dos próximos passos na Figura 23.

Figura 23 – Próximos caminhos da recursividade.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

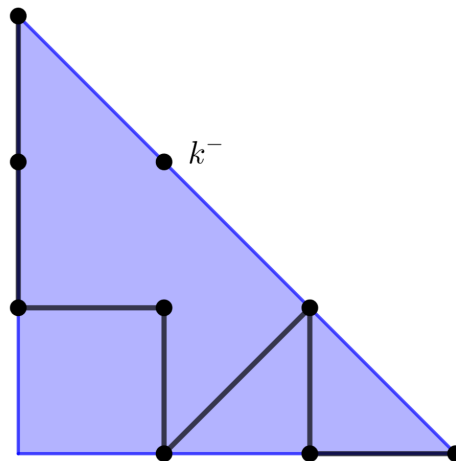
Notemos que o último caminho encontrado na recursividade é o caminho δ_+ , que possui multiplicidade 1. Portanto, a multiplicidade positiva do caminho γ é dada por:

$$\mu_+(\gamma) = \mu_+(\delta_+) = 1.$$

Agora, vamos calcular a multiplicidade negativa do caminho γ . Observando o caminho da Figura 19, temos que o primeiro $k^- \in [0, 8]$ tal que γ vira à direita é em $k^- = 3$. Construindo os caminhos γ'_- e γ''_- , temos:

- O caminho γ'_- é construído “esquecendo” o ponto k^- e mantendo os demais. Ele está representado na Figura 24.

Figura 24 – Caminho γ'_- .



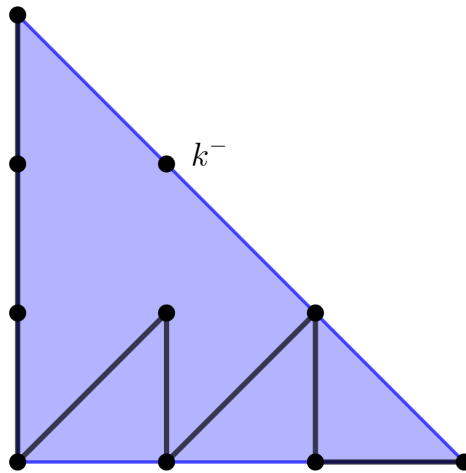
Fonte: Elaborada pela autora (2024).

- O caminho γ''_- é construído mantendo todas as imagens, exceto de k^- , que é substituído por:

$$\gamma''_-(3) = \gamma(2) + \gamma(4) - \gamma(3) = (0, 1) + (1, 1) - (1, 2) = (0, 0).$$

Este caminho está representado na Figura 25.

Figura 25 – Caminho γ''_- .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

O triângulo T é formado pelos vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$ e $(1, 1)$, tendo assim área $\frac{1}{2}$. Logo,

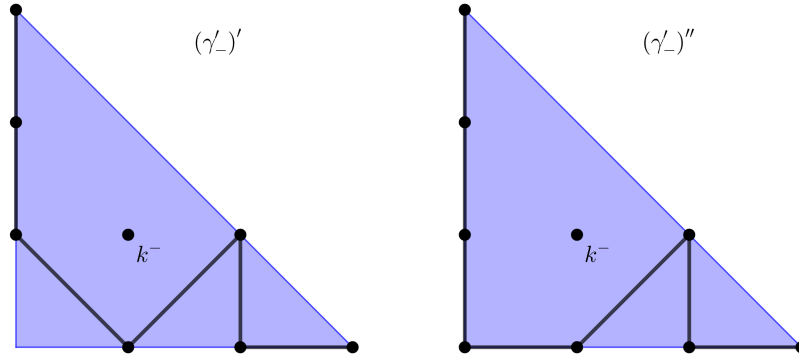
$$\begin{aligned} \mu_-(\gamma) &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-) \\ &= \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-). \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo passo a passo, temos que calcular a multiplicidade negativa de γ'_- e γ''_- . Primeiramente, vamos calcular a multiplicidade negativa de γ'_- . Os caminhos $(\gamma'_-)'$ e $(\gamma'_-)^{\prime\prime}$ estão representados na Figura 26.

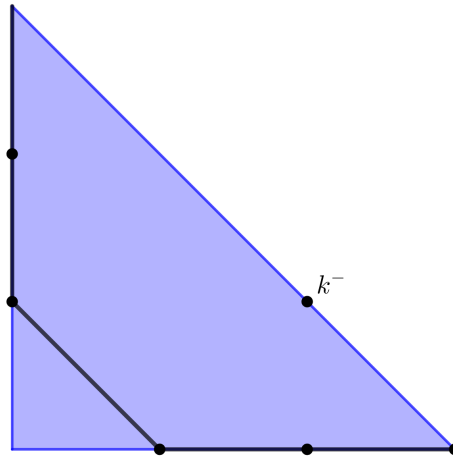
Primeiramente, vamos analisar o caminho $(\gamma'_-)'$. Seguindo o mesmo passo a passo para o caminho $(\gamma'_-)'$, temos que o próximo ponto em que o caminho vira à direita é em $k_- = 4$. O caminho $((\gamma'_-)')'$ está representado na Figura 27 e o caminho $((\gamma'_-)')^{\prime\prime}$ possui multiplicidade negativa nula, pela mesma justificativa dos casos anteriores. Além disso, a área do triângulo T é $\frac{1}{2}$. Assim,

$$\mu_-((\gamma'_-)') = \mu(((\gamma'_-)')')$$

Observemos que no caminho $((\gamma'_-)')'$ não existem mais pontos em que o caminho vira à direita e também não encontramos o caminho δ_- . Com isso, a multiplicidade negativa de $((\gamma'_-)')'$ é nula, garantindo que $\mu_-((\gamma'_-)') = 0$. Logo,

Figura 26 – Caminhos $(\gamma'_-)'$ e $(\gamma'_-)^{\prime\prime}$.

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Figura 27 – Caminho $((\gamma'_-)')'$.

Fonte: Elaborada pela autora (2024).

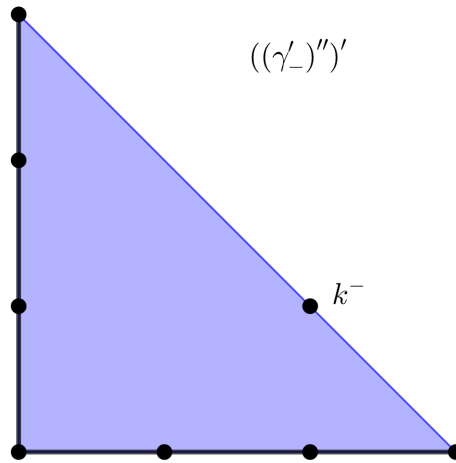
$$\mu_-(\gamma'_-) = \mu_-((\gamma'_-)^{\prime\prime}).$$

Repetindo o processo para o caminho $(\gamma'_-)^{\prime\prime}$, encontramos que a multiplicidade negativa de $((\gamma'_-)^{\prime\prime})'$ é nula e que o caminho $((\gamma'_-)^{\prime\prime})'$ é o representado na Figura 28. Como $((\gamma'_-)^{\prime\prime})' = \delta_-$, temos $\mu_-(((\gamma'_-)^{\prime\prime})') = 1$. Logo,

$$\mu_-(\gamma'_-) = 1.$$

Vamos calcular agora a multiplicidade do caminho γ''_- . Notemos que a multiplicidade negativa de $(\gamma''_-)^{\prime\prime}$ é nula. Além disso, $(\gamma''_-)'$ é o caminho representado na Figura 29, que é o mesmo encontrado na recursividade para o cálculo da multiplicidade negativa de γ'_- , sendo ele o caminho $(\gamma'_-)^{\prime\prime}$. Pelos passos anteriores, sabemos que no fim da recursividade encontraremos o caminho δ_- . Ademais, todos os triângulos T encontrados tem área $\frac{1}{2}$, garantindo que

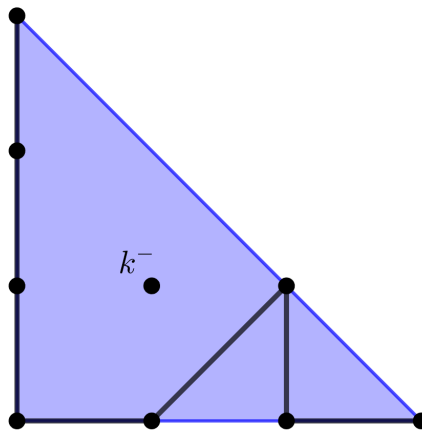
Figura 28 – Caminho $((\gamma'_-)'')$.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

$$\mu_-(\gamma''_-) = 1.$$

Figura 29 – Caminho γ'_- .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Logo,

$$\mu_-(\gamma) = \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-) = 1 + 1 = 2.$$

Portanto, a multiplicidade do caminho γ é dada por

$$\mu(\gamma) = \mu_+(\gamma) \cdot \mu_-(\gamma) = 1 \cdot 2 = 2.$$

5.2 CONTANDO CURVAS

Definição 5.8. Sejam $d \geq 0$ e g inteiros. Denotamos por $N_{\text{path}}(d, g)$ o número de caminhos reticulados λ -crescente $\gamma : [0, 3d + g - 1] \rightarrow \Delta_d$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(3d + g - 1) = q$ contados com as suas multiplicidades.

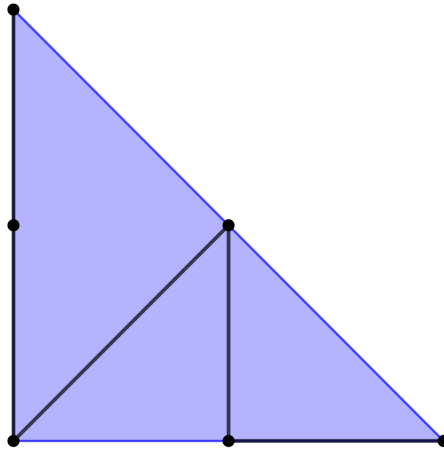
Utilizaremos os caminhos reticulados λ -crescentes definidos na seção anterior para o cálculo do número $N_{\text{trop}}(d, g)$, relacionando-os com possíveis subdivisões duais do polígono de Newton, que são duais às curvas tropicais. Mais detalhes dessa relação podem ser vistos na demonstração do teorema abaixo, como referenciado.

Teorema 5.9. Para todo $d, g \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$, temos $N_{\text{path}}(d, g) = N_{\text{trop}}(d, g)$.

Demonstração. Ver (4), Teorema 2. □

Exemplo 5.10. A Figura 30 mostra o único caminho reticulado λ -crescente $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_2$.

Figura 30 – $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_2$.



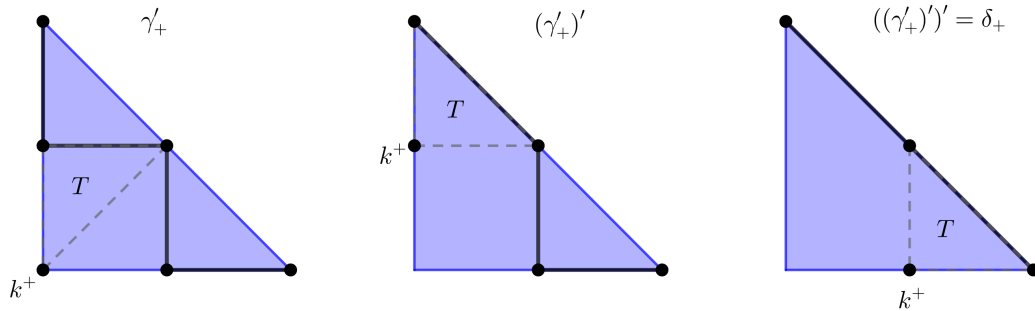
Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Vamos calcular a multiplicidade desse caminho. Primeiramente, calculemos a multiplicidade positiva. Os caminhos γ'_+ resultantes da recursividade estão representados na Figura 31.

Notemos que todos os triângulos T possuem área $\frac{1}{2}$. Além disso, os caminhos γ''_+ possuem multiplicidade positiva nula, pois $\gamma''_+(k^+) \notin \Delta_2$ em todas as etapas da recursividade. Logo,

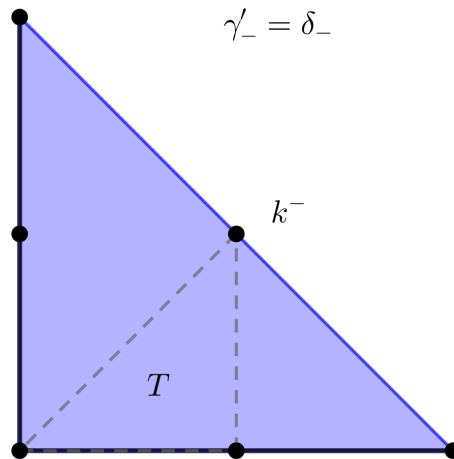
$$\mu_+(\gamma) = \mu_+(\gamma'_+) = \cdots = \mu_+(\delta_+) = 1.$$

Figura 31 – Multiplicidade positiva de $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_2$.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Figura 32 – Multiplicidade negativa de $\gamma : [0, 5] \rightarrow \Delta_2$.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Agora, para a multiplicidade negativa, temos apenas um passo na recursividade, exposto na Figura 32. O caminho γ''_- possui multiplicidade nula, pois $\gamma''_-(k^-) \notin \Delta_2$ e o triângulo T tem área $\frac{1}{2}$. Logo,

$$\mu_-(\gamma) = \mu_-(\delta_-) = 1.$$

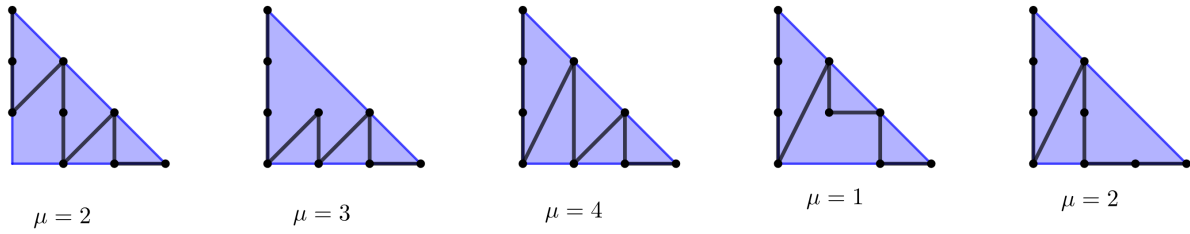
Com isso, a multiplicidade do caminho da Figura 30 é 1. Portanto, $N_{\text{path}}(2, 0) = 1$, garantindo, pelo Teorema 5.9, que existe apenas uma curva de grau $d = 2$ e gênero $g = 0$ passando por 5 pontos em posição geral.

Exemplo 5.11. A Figura 33 mostra todos os caminhos λ -crescentes $\gamma : [0, 8] \rightarrow \Delta_3$ com $\gamma(0) = (0, 3)$ e $\gamma(8) = (3, 0)$. A multiplicidade do primeiro caminho foi calculada no Exemplo 5.7, e para os demais o procedimento é análogo. Assim,

$$N_{\text{path}}(3, 0) = 2 + 3 + 4 + 1 + 2 = 12.$$

Logo, existem 12 curvas de grau $d = 3$ e gênero $g = 0$ que passam por 8 pontos em posição geral no plano projetivo complexo.

Figura 33 – Caminhos reticulados λ -crescente em Δ_3 com 8 passos.



Fonte: Elaborada pela autora (2023) com base em (1).

6 A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS PARA CAMINHOS

Neste capítulo generalizaremos a Definição 5.1 de caminho reticulado λ -crescente, como (1), e mostraremos que o número $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ também satisfaz a fórmula de Caporaso-Harris, definida na Seção 2.3, sendo esse o principal resultado do nosso trabalho. As principais referências utilizadas foram o artigo (1) e a tese de doutorado (9).

6.1 CAMINHOS RETICULADOS GENERALIZADOS

A generalização da Definição 5.1 de caminho reticulado λ -crescente, dada nesta seção, permitirá um maior número de caminhos reticulados, buscando um análogo para os números $N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ para caminhos.

Em todo o capítulo, d e g serão números inteiros e d será sempre não negativo. Δ_d denotará o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, d)$ e $(d, 0)$ e sequências serão sempre sequências de números inteiros não negativos.

Definição 6.1. Sejam α e β duas sequências tais que $I\alpha + I\beta = d$ e $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\lambda(x, y) = x - \epsilon y$, onde ϵ é um número irracional pequeno positivo. Dizemos que um caminho reticulado λ -crescente $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$, $n \in \mathbb{N}$, é um caminho reticulado generalizado λ -crescente se $\gamma(0) = (0, d - I\alpha) = (0, I\beta)$ e $\gamma(n) = q = (d, 0)$.

Vamos definir uma multiplicidade para um caminho generalizado de modo análogo ao que foi feito no Capítulo 5, usando o produto de uma multiplicidade positiva e uma multiplicidade negativa as quais definiremos a seguir.

Definição 6.2. Seja $\delta_\beta : [0, |\beta| + d] \rightarrow \Delta_d$ um caminho reticulado generalizado tal que a sua imagem $\delta_\beta([0, |\beta| + d])$ é igual à parte da fronteira de Δ_d entre $(0, I\beta)$ e $q = (d, 0)$ e tal que existem β_i passos (imagens de intervalos da forma $[j, j + 1]$) de tamanho i na reta $x = 0$. Definimos a multiplicidade negativa $\mu_{\beta,-}(\delta_\beta)$ de todos esses caminhos como 1.

A definição acima nos diz que o caminho δ_β tem as seguintes propriedades: na fronteira do triângulo Δ_d contida na reta $x = 0$, existem β_1 passos de comprimento 1, β_2 passos de comprimento 2, e assim sucessivamente. Como δ_β tem $|\beta| + d$ passos, consequentemente, no lado do triângulo em que $y = 0$, temos d passos de comprimento 1, cada.

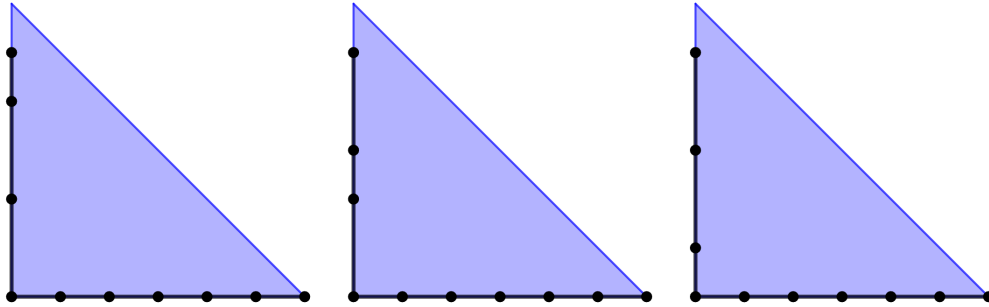
Exemplo 6.3. Sejam $\beta = (1, 2)$ e $d = 6$. Os possíveis caminhos $\delta_{(1,2)}$ terão as seguintes características:

- $\delta_{(1,2)} : [0, 9] \rightarrow \Delta_6$, onde $\delta_{(1,2)}(0) = (0, 5)$ e $\delta_{(1,2)}(9) = (6, 0)$;
- existem 1 passo de comprimento 1 e 2 passos de comprimento 2 no lado do triângulo em que $x = 0$.

- nos pontos da fronteira de Δ_6 em que $y = 0$, existem 6 passos de tamanho 1, cada.

A Figura 34 mostra todos os possíveis caminhos $\delta_{(1,2)}$ no triângulo Δ_6 .

Figura 34 – Caminhos $\delta_{(1,2)}$ no triângulo Δ_6 .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Definimos a *multiplicidade negativa* de um caminho reticulado generalizado λ -crescente $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$, denotada por $\mu_{\beta,-}(\gamma)$, usando a mesma forma recursiva dada na Subseção 5.1.1, sendo δ_β o caminho final da recursividade. Para definirmos a multiplicidade positiva precisamos fazer um ajuste.

Definição 6.4. Dado um caminho reticulado λ -crescente generalizado $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$, definimos o caminho $\gamma_\alpha : [0, |\alpha| + n] \rightarrow \Delta_d$, chamado extensão de γ , adicionando α_i etapas de comprimento inteiro i no lado de Δ_d sobre $x = 0$, de $\gamma_\alpha(0) = p = (0, d)$ a $\gamma_\alpha(|\alpha|) = (0, I\beta)$. Calculamos $\mu_+(\gamma_\alpha)$ como na Subseção 5.1.1 e definimos

$$\mu_{\alpha,+}(\gamma) := \frac{1}{I^\alpha} \cdot \mu_+(\gamma_\alpha).$$

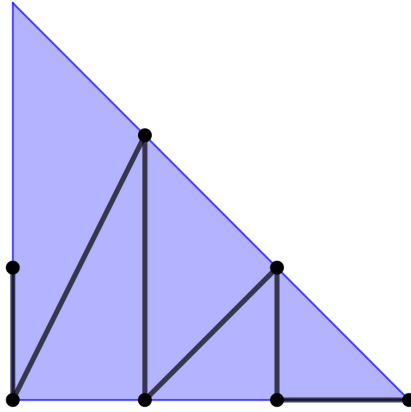
Definição 6.5. Definimos a multiplicidade $\mu_{\alpha,\beta}$ de um caminho γ como

$$\mu_{\alpha,\beta}(\gamma) := \mu_{\alpha,+}(\gamma) \cdot \mu_{\beta,-}(\gamma).$$

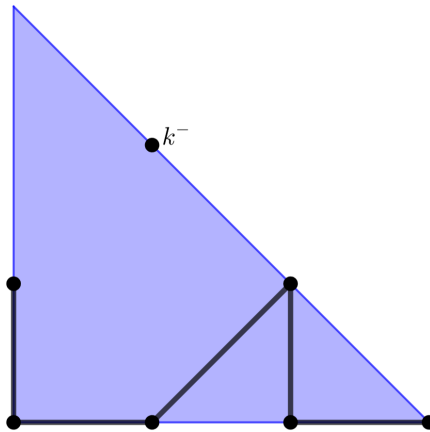
Exemplo 6.6. Consideremos o caminho $\gamma : [0, 6] \rightarrow \Delta_3$ da Figura 35, onde $\alpha = (0, 1)$, $\beta = (1)$ e $d = 3$.

Primeiramente, vamos calcular a multiplicidade negativa $\mu_{(1),-}(\gamma)$. Lembrando que para a multiplicidade negativa consideramos o primeiro inteiro k^- onde o caminho γ vira à direita e construímos dois novos caminhos, γ'_- (tirando o vértice $\gamma(k^-)$) e γ''_- (trocando o vértice $\gamma(k^-)$ por meio de um paralelogramo definido pelos vértices $\gamma(k^- - 1)$, $\gamma(k^-)$ e $\gamma(k^- + 1)$). Repetimos esse processo até encontrarmos um dos caminhos $\delta_{(1)}$.

- O primeiro ponto onde γ vira à direita é em $k^- = 2$. O caminho γ'_- está representado na Figura 36. Notemos que

Figura 35 – Caminho γ .

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Figura 36 – Caminho γ'_- .

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

$$\gamma''_-(k^-) = \gamma(k-1) + \gamma(k+1) - \gamma(k) = (0,0) + (1,0) - (1,2) = (0,-2) \notin \Delta_3,$$

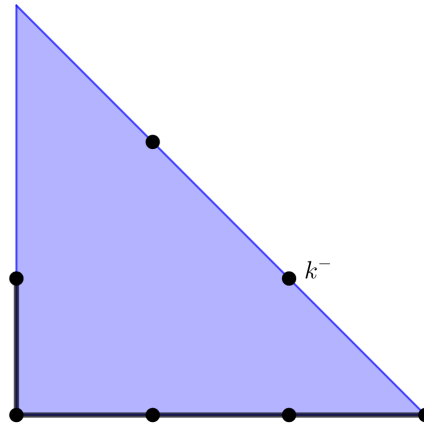
garantindo que a multiplicidade de γ''_- é 0. Assim,

$$\mu_-(\gamma) = 2 \cdot \text{Área de } T \cdot \mu_-(\gamma'_-) + \mu_-(\gamma''_-) = 2 \cdot 1 \cdot \mu_-(\gamma'_-).$$

- Observemos agora o caminho γ'_- . O ponto k^- onde γ'_- vira à direita é $k^- = 3$. O caminho $(\gamma'_-)'$ é dado na Figura 37.

Novamente o caminho γ''_- possui multiplicidade nula, pois $\gamma''_-(k^-) = (1,-1) \notin \Delta_3$. Notemos que $(\gamma'_-)' = \delta_{(1)}$, garantindo que $\mu_-((\gamma'_-)') = 1$. Logo,

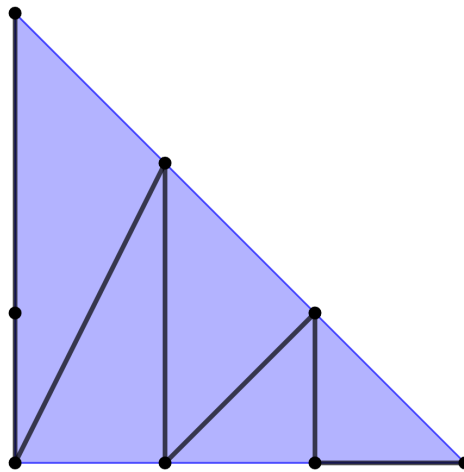
$$\mu_-(\gamma'_-) = 2 \cdot \text{Área de } T \cdot \mu_-((\gamma'_-)') + \mu_-((\gamma'_-)'') = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

Figura 37 – Caminho $(\gamma'_-)'$.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Portanto, $\mu_{(1),-}(\gamma) = 2$.

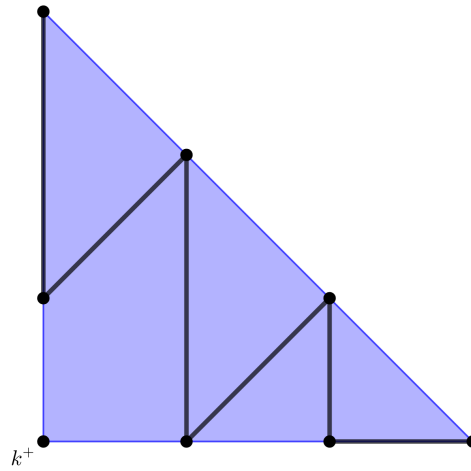
Por fim, vamos calcular a multiplicidade positiva de γ . Primeiramente, estendemos o caminho γ para o caminho $\gamma_{(0,1)} : [0, 7] \rightarrow \Delta_3$, adicionando 1 etapa de comprimento 2 em $\{x = 0\}$. O novo caminho está representado na Figura 38.

Figura 38 – Caminho $(\gamma_{(0,1)})$.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Para calcular a multiplicidade $\mu_+(\gamma_{(0,1)})$, consideremos o primeiro inteiro k^+ onde $\gamma_{(0,1)}$ vira à esquerda. Fazendo a mesma construção utilizada anteriormente para γ' e γ'' , temos:

- O primeiro ponto onde $\gamma_{(0,1)}$ vira à esquerda é em $k^+ = 2$. O caminho $\gamma'_{(0,1)+}$ está representado na Figura 39. Como $(1, 3) \notin \Delta_3$, a multiplicidade de $\gamma''_{(0,1)+}$ é nula.

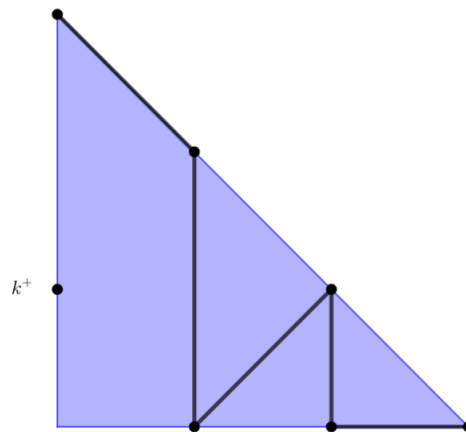
Figura 39 – Caminho $\gamma'_{(0,1)_+}$.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Logo,

$$\mu_+(\gamma_{(0,1)}) = 2 \cdot \text{Área de } T \cdot \mu_+(\gamma'_{(0,1)_+}) + \mu_+(\gamma''_{(0,1)_+}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_+(\gamma'_{(0,1)_+}).$$

- Observando agora o caminho $\gamma'_{(0,1)_+}$, temos $k^+ = 1$ e $(\gamma'_{(0,1)_+})'$ está representado na Figura 40.

Figura 40 – Caminho $(\gamma'_{(0,1)_+})'$.

Fonte: Elaborada pela autora (2023).

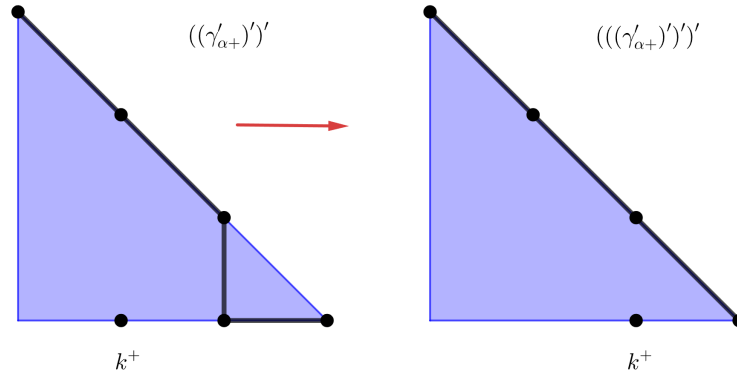
Novamente a multiplicidade positiva de $(\gamma'_{(0,1)_+})''$ é nula. Com isso,

$$\mu_+(\gamma'_{(0,1)_+}) = 2 \cdot 1 \cdot \mu_+((\gamma'_{(0,1)_+})').$$

⋮

- Vamos repetir este processo, onde os caminhos γ' estão representados na Figura 41 e ambos os caminhos γ'' possuem multiplicidade 0.

Figura 41 – Caminhos γ' .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Notemos que durante o processo surge mais um triângulo T de área 1, garantindo assim que $\mu_+(\gamma_{(0,1)}) = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

Logo,

$$\mu_{(0,1),+} = \frac{1}{I_{(0,1)}} \cdot \mu_+(\gamma_{(0,1)}) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

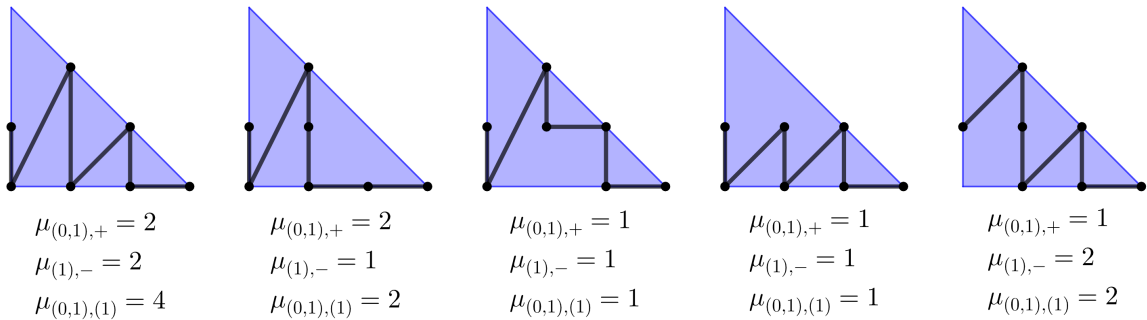
Portanto, a multiplicidade $\mu_{(0,1),(1)}(\gamma) = 2 \cdot 2 = 4$.

Definição 6.7. Suponhamos fixados d e g inteiros, $d \geq 0$, e α, β duas seqüências tais que $I\alpha + I\beta = d$. Definimos $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ como o número de caminhos λ -crescentes $\gamma : [0, 2d + g + |\beta| - 1] \rightarrow \Delta_d$ onde $\gamma(0) = (0, d - I\alpha) = (0, I\beta)$ e $\gamma(2d + g + |\beta| - 1) = (d, 0)$, contados com multiplicidade.

Observemos que $N_{\text{path}}(d, g) = N_{\text{path}}^{(0),(d)}(d, g)$ por definição.

Exemplo 6.8. Sejam $\alpha = (0, 1)$, $\beta = (1)$, $g = 0$ e $d = 3$. O número $N_{\text{path}}^{(0,1),(1)}(3, 0)$ é o número de caminhos $\gamma : [0, 6] \rightarrow \Delta_3$ (contados com multiplicidades) que começam em $(0, 1)$ e terminam em $(3, 0)$. A Figura 42 mostra todos esses caminhos com as suas respectivas multiplicidades. O cálculo da multiplicidade do primeiro caminho foi apresentado no Exemplo 6.6, dos demais o procedimento é análogo.

Logo, $N_{\text{path}}^{(0,1),(1)}(3, 0) = 4 + 2 + 1 + 1 + 2 = 10$.

Figura 42 – $N_{\text{path}}^{(0,1),(1)}(3, 0)$ 

Fonte: Elaborada pela autora (2023) com base em (9).

6.2 A FÓRMULA DE CAPORASO-HARRIS PARA CAMINHOS RETICULADOS GENERALIZADOS

Para provar que os números $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ da Definição 6.7 satisfazem à fórmula de Caporaso-Harris, vamos expressar a multiplicidade negativa e positiva de um caminho reticulado generalizado de maneira não recursiva. Para isso, precisaremos do Lema a seguir.

Lema 6.9. *Sejam d e g inteiros, $d \geq 0$, α e β duas seqüências tais que $I\alpha + I\beta = d$ e $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ um caminho reticulado generalizado. Se γ tem um passo que começa na reta $x = i$ e termina na reta $x = j$, para algum par i, j tal que $j - i \geq 2$ (ou seja, que "move pelo menos duas colunas para a direita"), então $\mu_{\beta,-}(\gamma) = \mu_{\alpha,+}(\gamma) = \mu_{\alpha,\beta}(\gamma) = 0$.*

Demonstração. Seja γ um caminho reticulado generalizado λ -crescente com um passo que move pelo menos duas colunas para a direita. Suponhamos que esse passo seja de k para $k + 1$, onde $\gamma(k) = (i, y_i)$ e $\gamma(k + 1) = (j, y_j)$, $j - i \geq 2$. Denotemos por $\gamma(k - 1) = (l, y_l)$, onde $i - l \geq 0$ (γ é λ -crescente). Notemos que se k é um inteiro tal que γ não muda a inclinação em k (isto é, γ não vira nem para a direita em para a esquerda em k), então γ'_{\pm} e γ''_{\pm} preservam esse passo. Caso contrário, haverá um certo momento da recursividade onde k é o primeiro ponto em que γ vira à direita ou à esquerda. Então,

- $\gamma'_{\pm}(k) = \gamma(k + 1) = (j, y_j)$ e $\gamma'_{\pm}(k - 1) = (l, y_l)$. Notemos que $j - l \geq j - i \geq 2$.
- $\gamma''_{\pm}(k) = \gamma(k - 1) + \gamma(k + 1) - \gamma(k) = (l, y_l) + (j, y_j) - (i, y_i) = (l + j - i, y_l + y_j - y_i)$, onde $l + j - i \geq (l + j - i) - l \geq 2$.

Logo, ambos os caminhos γ'_{\pm} e γ''_{\pm} também possuem um passo que move ao menos duas colunas para a direita. Notemos ainda que os únicos caminhos finais da recursão que possuem multiplicidade diferente de 0 são δ_{β} e δ_{+} e que esses caminhos só possuem passos

que movem no máximo uma coluna para a direita. Portanto, o lema segue por indução nos passos da recursividade. \square

Pelo lema anterior, garantimos que qualquer caminho reticulado generalizado λ -crescente com multiplicidade diferente de zero tem apenas dois tipos de passos: um que desce verticalmente e outro que se move exatamente uma coluna para a direita (com a variação na coordenada y podendo ser crescente ou decrescente).

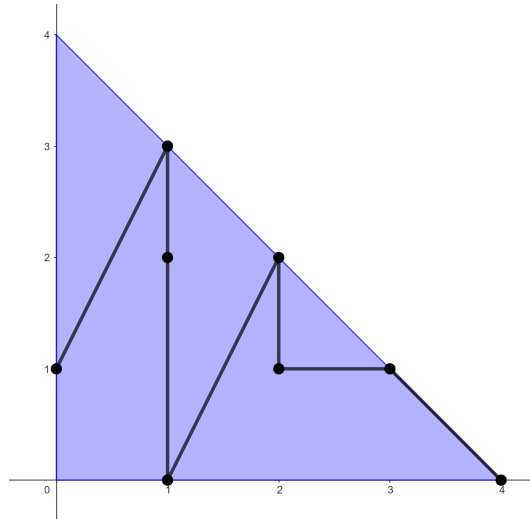
Para o que segue, faremos a seguinte definição.

Definição 6.10. Seja $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ um caminho λ -crescente. Para cada inteiro i tal que $0 \leq i \leq n$, denotamos por:

- (a) $h(i)$ a coordenada y do ponto mais alto de γ na reta $x = i$;
- (b) α^i a sequência que descreve os comprimentos dos passos verticais de γ na reta $x = i$, ou seja, a sequência $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots)$ é tal que α_1^i representa a quantidade de passos de tamanho 1 na coluna $x = i$, α_2^i representa a quantidade de passos de tamanho 2 na coluna $x = i$, e assim sucessivamente.

Exemplo 6.11. Para o caminho γ ilustrado na Figura 43, temos $h(0) = 1$, $h(1) = 3$, $h(2) = 2$, $h(3) = 1$, $h(4) = 0$ e $\alpha^0 = (0)$, $\alpha^1 = (1, 1)$, $\alpha^2 = (1)$, $\alpha^3 = (0)$.

Figura 43 – Caminho γ .



Fonte: Elaborada pela autora (2023).

Proposição 6.12. Sejam d e g inteiros, $d \geq 0$ e α e β duas sequências tais que $I\alpha + I\beta = d$. Seja $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ um caminho reticulado generalizado como na Definição 6.1.

(a) A multiplicidade negativa de γ é dada pela fórmula

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right)$$

onde a soma é calculada sobre todas as $(d+1)$ -uplas $(\beta^0, \dots, \beta^d)$ de sequências tais que $\alpha^0 + \beta^0 = \beta$ e $I\alpha^i + I\beta^i = h(i)$ para todo i .

(b) A multiplicidade positiva de γ é dada pela fórmula

$$\mu_{\alpha,+}(\gamma) = \frac{1}{I\alpha} \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1}} \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i+1}} \right)$$

onde a soma é calculada sobre todas as $(d+1)$ -uplas $(\beta^0, \dots, \beta^d)$ de sequências tais que $\beta^0 = \alpha$ e $d - i - I\beta^i = h(i)$ para todo i .

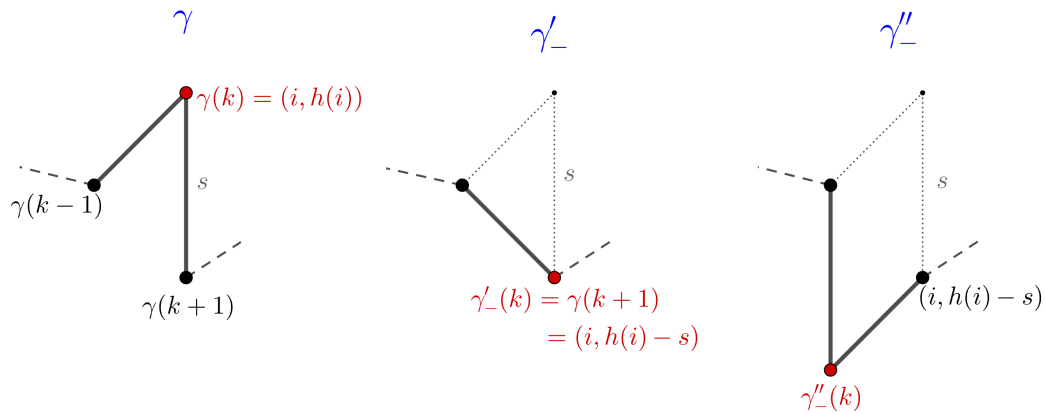
Demonstração. Vamos provar somente a afirmação (a), pois a demonstração da afirmação (b) é análoga. A demonstração será por indução no número de passos da recursão para o cálculo de $\mu_{\beta,-}$. Primeiramente, observemos que os possíveis caminhos finais dessa recursão, δ_β (Definição 6.2), satisfazem a fórmula. De fato, como $\alpha^0 = \beta$ para todos os caminhos δ_β , temos que $\beta^0 = (0)$. Além disso, como nas demais retas $x = i$ os pontos do caminhos estão somente na fronteira do triângulo Δ_d contida na reta $y = 0$, temos $h(i) = 0$, e, portanto, $\alpha^i = 0$, concluindo que $\beta^i = (0)$ para todo i diferente de 0. Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{(\beta^0=(0), \dots, \beta^d=(0))} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \\ &= I^{(0)+(0)-(0)} \binom{(0) + (0)}{(0)} \dots I^{(0)+(0)-(0)} \binom{(0) + (0)}{(0)} \\ &= 1 \dots 1 \\ &= 1 \\ &= \mu_{\beta,-}(\delta_\beta) \end{aligned}$$

Seja $\gamma : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ um caminho reticulado generalizado arbitrário. Assumimos, por hipótese de indução, que os caminhos γ'_- e γ''_- , definidos na Subseção 5.1.1, satisfazem a fórmula da proposição. Seja $k \in [1, n-1]$ o primeiro inteiro no qual γ vira à direita. Lembremos que γ'_- é definido tirando o vértice $\gamma(k)$ e γ''_- é definido invertendo o vértice $\gamma(k)$ por meio de um paralelogramo definido pelos vértices $\gamma(k-1)$, $\gamma(k)$ e $\gamma(k+1)$. Pelo Lema 6.9, sabemos que $\gamma(k-1)$ (respectivamente $\gamma(k+1)$) pode estar no máximo uma coluna à esquerda de $\gamma(k)$ (respectivamente à direita). Observe que $\gamma(k-1)$ não pode estar na mesma coluna que $\gamma(k)$, pois, caso contrário, o caminho γ λ -crescente não teria virado à direita em $\gamma(k)$. Portanto, $\gamma(k-1)$ está exatamente a uma coluna à esquerda de $\gamma(k)$. Temos então duas possibilidades:

- ou $\gamma(k+1)$ está na mesma coluna i de $\gamma(k)$, como na Figura 44;

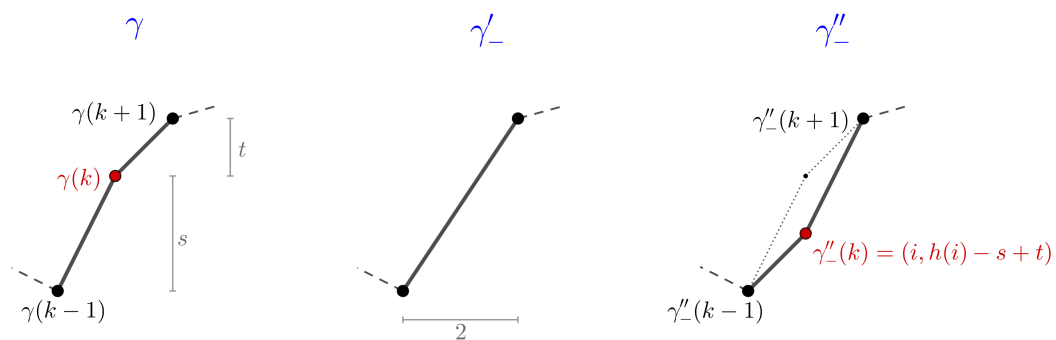
Figura 44 – Primeiro caso.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

- ou $\gamma(k+1)$ está uma coluna à direita de $\gamma(k)$, como na Figura 45.

Figura 45 – Segundo caso.



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

No primeiro caso, o caminho γ'_- tem os valores de $h(j)$ e α^j iguais aos de γ , exceto $h(i)$ que será substituído por $h(i) - s$ e α^i , que será substituído por $\alpha^i - e_s$, onde s é o comprimento do passo vertical entre $\gamma(k)$ e $\gamma(k+1)$. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma'_-) &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j - \delta_{j+1, i} e_s} \left(\begin{matrix} \alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \delta_{j+1, i} e_s \\ \beta^j \end{matrix} \right) \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \left(\begin{matrix} \alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \delta_{j+1, i} e_s \\ \beta^j \end{matrix} \right) \right) \end{aligned}$$

onde

$$\delta_{l,i} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq i; \\ 1, & \text{se } l = i. \end{cases}$$

$I^{-\delta_{j+1,i}e_s} = 1/s$ e as condições nas variáveis de soma β^j são $\alpha^0 + \beta^0 = \beta$ e

$$I(\alpha^j - \delta_{j,i}e_s) + I\beta^j = h(j) - \delta_{j,i}s \Rightarrow I\alpha^j + I\beta^j = h(j), \forall j.$$

Ou seja, a soma é tomada sobre as mesmas condições da proposição.

Já o caminho γ''_- tem os valores de $h(j)$ e α^j iguais aos de γ , exceto por $h(i)$ que será substituído por $h(i) - s$, α^i por $\alpha^i - e_s$ e α^{i-1} por $\alpha^{i-1} + e_s$. Donde segue que

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma''_-) &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(I^{\alpha^1 + \beta^1 - \beta^0} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \dots I^{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} - \beta^{i-2} + e_s} \binom{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} + e_s}{\beta^{i-2}} \right. \\ &\quad \left. I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i-1} - e_s} \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} \dots I^{\alpha^d + \beta^d - \beta^{d-1}} \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Usando que $I^{e_s} = s$ e que $I^{-e_s} = 1/s$, temos

$$I^{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} - \beta^{i-2} + e_s} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i-1} - e_s} = I^{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1} - \beta^{i-2}} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i-1}} e$$

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} + \delta_{j+1,i-1}e_s - \delta_{j+1,i}e_s}{\beta^j} \right) \quad (6.2)$$

onde as condições nas variáveis de soma β^i são:

$$\begin{aligned} \alpha^0 + \delta_{0,i-1}e_s + \beta^0 &= \beta \\ I(\alpha^j - \delta_{j,i}e_s + \delta_{j,i-1}e_s) + I\beta^j &= h(j) - s\delta_{j,i}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Podemos tornar as condições (6.3) iguais às da proposição, fazendo uma mudança nas variáveis do somatório, a saber,

$$\eta^0 = \beta^0, \dots, \eta^{i-1} = \beta^{i-1} + e_s, \eta^i = \beta^i, \dots, \eta^d = \beta^d.$$

Substituindo as novas variáveis em (6.3), temos:

$$\begin{aligned} \alpha^0 + \delta_{0,i-1}e_s + \eta^0 - \delta_{0,i-1}e_s &= \beta \Rightarrow \alpha^0 + \eta^0 = \beta, \\ I(\alpha^j - \delta_{j,i}e_s + \delta_{j,i-1}e_s) + I(\eta^j - \delta_{j,i-1}e_s) &= h(j) - s\delta_{j,i} \Rightarrow I\alpha^j + I\eta^j = h(j). \end{aligned}$$

Além disso, nas novas variáveis,

$$\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} = \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \eta^{j+1} - \delta_{j+1,i}e_s - \eta^j + \delta_{j,i}e_s} = \prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \eta^{j+1} - \eta^j},$$

donde segue que (6.2) pode ser reescrita como

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\eta^0, \dots, \eta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \eta^{j+1} - \eta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \eta^{j+1} - \delta_{j+1,i}e_s}{\eta^j - \delta_{j+1,i}e_s} \right). \quad (6.4)$$

Porém, para deixarmos os somatórios (6.1) e (6.4) nas mesmas variáveis reescrevemos (6.4) novamente como

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \delta_{j+1, i} e_s}{\beta^j - \delta_{j+1, i} e_s} \right). \quad (6.5)$$

Substituindo (6.1) e (6.5) na definição de multiplicidade negativa de γ , $\mu_{\beta,-}(\gamma)$, dada por

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) := 2 \cdot \text{área de } T \cdot \mu_{\beta,-}(\gamma'_-) + \mu_{\beta,-}(\gamma''_-).$$

onde T o triângulo de vértices $\gamma(k^- - 1)$, $\gamma(k^- + 1)$ e $\gamma(k^-)$, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= s \cdot \mu_{\beta,-}(\gamma') + \mu_{\beta,-}(\gamma'') \\ &= s \cdot \frac{1}{s} \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \delta_{j+1, i} e_s}{\beta^j} \right) \\ &\quad + \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \delta_{j+1, i} e_s}{\beta^j - \delta_{j+1, i} e_s} \right) \\ &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \cdots \binom{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1}}{\beta^{i-2}} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \\ &\quad \cdots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \left(\binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1} - e_s} \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vamos analisar o termo $\binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1} - e_s}$ separadamente. Sabemos que,

- $\alpha^i + \beta^i - e_s = (\alpha_1^i + \beta_1^i, \dots, \alpha_s^i + \beta_s^i - 1, \dots, \alpha_m^i + \beta_m^i)$ e
- $\beta^{i-1} - e_s = (\beta_1^{i-1}, \dots, \beta_s^{i-1} - 1, \dots, \beta_m^{i-1})$,

onde α_k^i e β_k^i denotam a k -ésima coordenada das seqüências α^i e β^i , respectivamente, para $k = 1, 2, \dots, m$. Além disso, como

$$\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdot \binom{\alpha_3}{\beta_3} \cdots,$$

temos

$$\begin{aligned} \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1} - e_s} &= \binom{\alpha_1^i + \beta_1^i}{\beta_1^{i-1}} \cdots \binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1}} \cdots \binom{\alpha_m^i + \beta_m^i}{\beta_m^{i-1}} \\ &\quad + \binom{\alpha_1^i + \beta_1^i}{\beta_1^{i-1}} \cdots \binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1} - 1} \cdots \binom{\alpha_m^i + \beta_m^i}{\beta_m^{i-1}} \\ &= \binom{\alpha_1^i + \beta_1^i}{\beta_1^{i-1}} \cdots \binom{\alpha_{s-1}^i + \beta_{s-1}^i}{\beta_{s-1}^{i-1}} \binom{\alpha_{s+1}^i + \beta_{s+1}^i}{\beta_{s+1}^{i-1}} \\ &\quad \cdots \binom{\alpha_m^i + \beta_m^i}{\beta_m^{i-1}} \left(\binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1}} + \binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1} - 1} \right) \end{aligned}$$

Usando a identidade binomial $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$, onde $n = \alpha_s^i + \beta_s^i$ e $k = \beta_s^{i-1}$, temos

$$\binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1}} + \binom{\alpha_s^i + \beta_s^i - 1}{\beta_s^{i-1} - 1} = \binom{\alpha_s^i + \beta_s^i}{\beta_s^{i-1}}.$$

Com isso,

$$\binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1} - e_s} = \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1}},$$

garantindo que em (6.6) vale a igualdade,

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \cdots \binom{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1}}{\beta^{i-2}} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \\ &\quad \cdots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \left(\binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1}} + \binom{\alpha^i + \beta^i - e_s}{\beta^{i-1} - e_s} \right) \\ &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \cdots \binom{\alpha^{i-1} + \beta^{i-1}}{\beta^{i-2}} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \\ &\quad \cdots \binom{\alpha^d + \beta^d}{\beta^{d-1}} \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i-1}} \Bigg) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I^{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1} - \beta^j} \binom{\alpha^{j+1} + \beta^{j+1}}{\beta^j} \right), \end{aligned}$$

como queríamos.

Já no segundo caso, a ideia é semelhante ao caso anterior. Porém, pelo Lema 6.9, o caminho γ'_- não contribui para o cálculo de $\mu_{\beta,-}(\gamma)$. Assim,

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \mu_{\beta,-}(\gamma''_-).$$

Para facilitar a demonstração, fixemos a seguinte notação: α^i , β^i e $h(i)$ são referentes ao caminho γ e $\tilde{\alpha}^i$, $\tilde{\beta}^i$ e $\tilde{h}(i)$ são os análogos desses objetos referentes ao caminho γ''_- . Temos

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\tilde{\beta}^0, \dots, \tilde{\beta}^d)} \left(\prod I^{\tilde{\alpha}^{i+1} + \tilde{\beta}^{i+1} - \tilde{\beta}^i} \binom{\tilde{\alpha}^{i+1} + \tilde{\beta}^{i+1}}{\tilde{\beta}^i} \right), \quad (6.7)$$

onde

$$\tilde{\alpha}^0 + \tilde{\beta}^0 = \beta \text{ e } I\tilde{\alpha}^j + I\tilde{\beta}^j = \tilde{h}(j), \quad \forall j.$$

Nosso objetivo é reescrever 6.7 com relação as $(d+1)$ -uplas $(\beta^0, \dots, \beta^d)$ de sequências referentes ao caminho γ , satisfazendo $\alpha^0 + \beta^0 = \beta$ e $I\alpha^j + I\beta^j = h(j)$ para todo j .

Sejam $\gamma(k-1) = (i-1, y_{k-1})$, $\gamma(k) = (i, y_k)$ e $\gamma(k+1) = (i+1, y_{k+1})$. Notemos que $h(i) = y_k$ pois, na reta $x = i$, nenhum ponto de γ pode estar acima de $\gamma(k)$, caso contrário, γ não teria virado à direita em k . Sejam $s = y_k - y_{k-1}$ e $t = y_{k+1} - y_k$. Notemos que:

- $\tilde{\alpha}^0 = \alpha^0 \Rightarrow \alpha^0 + \tilde{\beta}^0 = \beta \Rightarrow \tilde{\beta}^0 = \beta^0$,
- $\tilde{\alpha}^j = \alpha^j, \forall j$.
- $\tilde{h}(j) = h(j) - \delta_{j,i}(s-t), \forall j \Rightarrow \begin{cases} \tilde{h}(j) = h(j), \forall j \neq i \\ \tilde{h}(i) = h(i) - (s-t) \end{cases}$

Com isso, $\tilde{\beta}^j = \beta^j, \forall j \neq i$ e $\tilde{\beta}^i$ é tal que

$$I\alpha^i + I\tilde{\beta}^i = h(i) - (s-t).$$

Como o caminho γ é λ -crescente, sabemos que os deslocamentos verticais, se existirem, são sempre decrescente na segunda coordenada. Com isso,

- na reta $x = i-1$, se existirem deslocamentos verticais, os mesmos devem estar acima de y_{k-1} . Assim, y_{k-1} é a menor coordenada de um ponto pertencente à γ na reta $x = i-1$. Como $I\alpha^{i-1}$ é o comprimento de γ que está na reta $x = i-1$, temos $I\alpha^{i-1} = h(i-1) - y_{k-1}$. Logo,

$$I\alpha^{i-1} + I\beta^{i-1} = h(i-1) \Rightarrow h(i-1) - y_{k-1} + I\beta^{i-1} = h(i-1) \Rightarrow I\beta^{i-1} = y_{k-1}.$$

- na reta $x = i$, não temos deslocamento vertical de γ , garantindo que $I\alpha^i = 0$. Ou seja, $I\beta^i = h(i) = y_k$.
- na reta $x = i+1$, o deslocamento vertical do caminho γ , se existir, estará abaixo de y_{k+1} . Assim, $h(i+1) = y_{k+1}$, garantindo que $I\alpha^{i+1} - I\beta^{i+1} = y_{k+1}$.

Temos,

$$\begin{aligned} I\alpha^i + I(\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i) &= I\alpha^i + I\beta^i - \underbrace{I\beta^i}_{h(i)=y_k} + \underbrace{I\beta^{i-1}}_{y_{k-1}} + \underbrace{I\alpha^{i+1} + I\beta^{i+1}}_{h(i+1)=y_{k+1}} - \underbrace{I\beta^i}_{h(i)=y_k} \\ &= h(i) - (s-t), \end{aligned}$$

garantindo que $\tilde{\beta}^i = \beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i$. Logo, $\tilde{\beta}^j = \beta^j + \delta_{j,i}(\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i)$ para todo j .

Voltando na equação 6.7 e fazendo as substituições mencionadas acima, temos

$$\mu_{\beta,-}(\gamma''_-) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{j=0}^{d-1} I\alpha^{j+1+\beta^{j+1}-\beta^j} \left(\begin{array}{c} \alpha^{j+1} + \beta^{j+1} + \delta_{j+1,i}(\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i) \\ \beta^j - \delta_{j,i}(\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i) \end{array} \right) \right).$$

Isto é a mesma fórmula da proposição, exceto pelos fatores

$$\begin{pmatrix} \alpha^i + \beta^i \\ \beta^{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} \\ \beta^i \end{pmatrix}$$

sendo substituído por

$$\binom{\alpha^i + \beta^i + (\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i)}{\beta^{i-1}} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i + (\beta^{i-1} + \alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - 2\beta^i)}.$$

Porém esses termos são os mesmos pela identidade

$$\binom{n+k+m}{n+k} \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+m}{n+l} \binom{n+m}{n},$$

onde $n = \beta_l^{i-1}$, $k = \beta_l^i - \beta_l^{i-1}$ e $m = \alpha_l^{i+1} + \beta_l^{i+1} - \beta_l^i$, para toda l -ésima coordenada das sequências. Lembremos que $\alpha^i = (0)$.

Portanto,

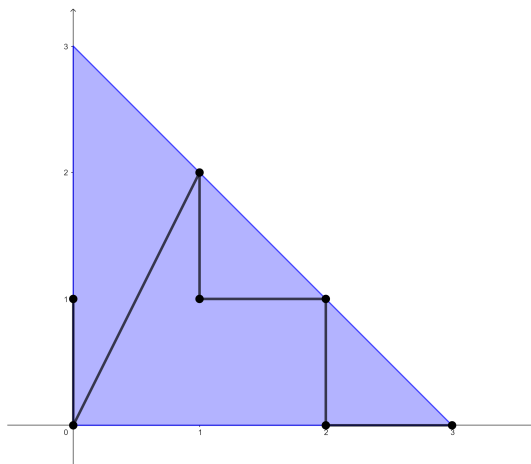
$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right),$$

como queríamos demonstrar. □

Notemos que as fórmulas acima nos oferece uma forma mais rápida de encontrar a multiplicidade de um caminho reticulado, como podemos observar no Exemplo abaixo.

Exemplo 6.13. Sejam $\alpha = (0, 1)$, $\beta = (1)$, $d = 3$ e $\gamma : [0, 6] \rightarrow \Delta_3$ o caminho λ -crescente representado na Figura 46. Vamos calcular a multiplicidade $\mu_{\alpha,\beta}(\gamma)$ de γ , utilizando as fórmulas demonstradas na Proposição 6.12. Notemos que esse caminho é o terceiro representado na Figura 42.

Figura 46 – Caminho γ .



Fonte: Elaborada pela autora (2024).

Observemos que $\alpha^0 = (1)$, $\alpha^1 = (1)$, $\alpha^2 = (1)$, $\alpha^3 = (0)$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 1$ e $h(3) = 0$.

Primeiramente, vamos calcular a multiplicidade negativa. Para isso, determinemos todas as 4-uplas de seqüências $(\beta^0, \dots, \beta^3)$ tais que $\alpha^0 + \beta^0 = \beta$ e $I\alpha^i + I\beta^i = h(i)$ para todo $i = 0, \dots, 3$.

- $\alpha^0 + \beta^0 = \beta \Rightarrow (1) + \beta^0 = (1) \Rightarrow \beta^0 = (0)$.

Notemos ainda que $I\alpha^0 + I\beta^0 = 1 + 0 = 1 = h(0)$.

- $I\alpha^1 + I\beta^1 = h(1) \Rightarrow 1 + I\beta^1 = 2 \Rightarrow I\beta^1 = 1 \Rightarrow \beta^1 = (1)$.

- $I\alpha^2 + I\beta^2 = h(2) \Rightarrow 1 + I\beta^2 = 1 \Rightarrow I\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = (0)$.

- $I\alpha^3 + I\beta^3 = h(3) \Rightarrow 0 + I\beta^3 = 0 \Rightarrow I\beta^3 = 0 \Rightarrow \beta^3 = (0)$.

Aplicando os valores acima na fórmula apresentada na letra (a) da Proposição 6.12, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= \sum_{(\beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3)} \left(\prod_{i=0}^2 I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \\ &= I^{\alpha^1 + \beta^1 - \beta^0} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} I^{\alpha^2 + \beta^2 - \beta^1} \binom{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^1} I^{\alpha^3 + \beta^3 - \beta^2} \binom{\alpha^3 + \beta^3}{\beta^2} \\ &= I^{(2)} \binom{(2)}{(0)} I^{(0)} \binom{(1)}{(1)} I^{(0)} \binom{(0)}{(0)} = 1^2 \binom{(2)}{(0)} 1^0 \binom{(1)}{(1)} 1^0 \binom{(0)}{(0)} = 1. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a multiplicidade positiva do caminho γ . Para isso, determinemos todas as 4-uplas de seqüências $(\beta^0, \dots, \beta^3)$ tais que $\beta^0 = \alpha$ e $d - i - I\beta^i = h(i)$ para todo $i = 0, \dots, 3$.

- $\beta^0 = \alpha = (0, 1)$.

Notemos ainda que $I\beta^0 = 2$, garantindo que $3 - 0 - I\beta^0 = 1 = h(0)$.

- $3 - 1 - I\beta^1 = h(1) \Rightarrow I\beta^1 = 0 \Rightarrow \beta^1 = (0)$.

- $3 - 2 - I\beta^2 = h(2) \Rightarrow I\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = (0)$.

- $3 - 3 - I\beta^3 = h(3) \Rightarrow I\beta^3 = 0 \Rightarrow \beta^3 = (0)$.

Aplicando os valores encontrados acima na fórmula apresentada na letra (b) da Proposição 6.12, temos

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,+}(\gamma) &= \frac{1}{I^{(0,1)}} \sum_{(\beta^0, \beta^1, \beta^2, \beta^3)} \left(\prod_{i=0}^2 I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1}} \binom{\alpha^i + \beta^i}{\beta^{i+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot I^{\alpha^0 + \beta^0 - \beta^1} \binom{\alpha^0 + \beta^0}{\beta^1} I^{\alpha^1 + \beta^1 - \beta^2} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^2} I^{\alpha^2 + \beta^2 - \beta^3} \binom{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot I^{(1,1)} \binom{(1,1)}{(0)} I^{(1)} \binom{(1)}{(0)} I^{(1)} \binom{(1)}{(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} 1^1 2^1 \binom{1}{0} \binom{1}{0} 1^1 \binom{1}{0} 1^1 \binom{1}{0} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Portanto, a multiplicidade $\mu_{(0,1),(1)}(\gamma) = 1 \cdot 1 = 1$.

Teorema 6.14. *Sejam d e g inteiros, $d \geq 0$, e α, β duas sequências de números inteiros não negativos tais que $I\alpha + I\beta = d$. O número $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ satisfaz a fórmula de Caporasso-Harris. Em particular, temos $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g) = N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ para todo α, β, d e g .*

Demonstração. Seja $\gamma : [0, 2d + g + |\beta| - 1] \rightarrow \Delta_d$ um caminho λ -crescente começando em $(0, I\beta)$ e terminando em $q = (d, 0)$. A ideia da demonstração é listar todas as possibilidades para o primeiro passo do caminho γ . Temos apenas dois casos a considerar, a saber:

- (i) o ponto $\gamma(1)$ está na reta $\{x = 0\}$;
- (ii) ou o ponto $\gamma(1)$ está na reta $\{x = 1\}$.

pois, nos demais casos, o primeiro passo de γ move pelo menos duas colunas para a direita e, pelo Lema 6.9, a multiplicidade de γ é 0.

No caso (i), o ponto $\gamma(1) = (0, I\beta - k)$, para algum $\beta_k \neq 0$. De fato, o passo que é imagem do intervalo $[0, 1]$ se manterá durante toda a recursividade do cálculo da multiplicidade negativa. Se esse passo de tamanho k for tal que $\beta_k = 0$, no fim da recursividade não encontraríamos o caminho δ_β , tornando assim $\mu_{\beta,-}(\gamma) = 0$. Então, a restrição $\tilde{\gamma} := \gamma|_{[1, 2d+g+|\beta|-1]}$ é um caminho começando em $(0, I\beta - k) = (0, d - I(\alpha + e_k))$. Além disso, $I(\alpha + e_k) + I(\beta - e_k) = d$. Façamos $\tilde{\alpha} = \alpha + e_k$ e $\tilde{\beta} = \beta - e_k$. Nesse caso, $I\tilde{\alpha} + I\tilde{\beta} = d$. Além disso, o caminho $\tilde{\gamma}$ possui os seguintes valores:

- $\tilde{h}(0) = h(0) - k$ e $\tilde{h}(i) = h(i)$, para todo $i > 0$;
- $\tilde{\alpha}^0 = \alpha^0 - e_k$ e $\tilde{\alpha}^i = \alpha^i$, para todo $i > 0$;
- $\tilde{\beta}^i = \beta^i$, para todo i .

Então,

$$\begin{aligned}
\mu_{\tilde{\beta},-}(\tilde{\gamma}) &= \sum_{(\tilde{\beta}^0, \dots, \tilde{\beta}^d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\tilde{\alpha}^{i+1} + \tilde{\beta}^{i+1} - \tilde{\beta}^i} \binom{\tilde{\alpha}^{i+1} + \tilde{\beta}^{i+1}}{\tilde{\beta}^i} \right) \\
&= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) = \mu_{\beta,-}(\gamma)
\end{aligned}$$

Já a multiplicidade positiva de $\tilde{\gamma}$ é dada por:

$$\mu_{\tilde{\alpha},+}(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{I^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\tilde{\alpha}^i + \tilde{\beta}^i - \tilde{\beta}^{i+1}} \binom{\tilde{\alpha}^i + \tilde{\beta}^i}{\tilde{\beta}^{i+1}} \right) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{I^{\alpha + e_k}} \sum_{(\beta_0, \dots, \beta_d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1} - \delta_{i,0} e_k} \binom{\alpha^i + \beta^i - \delta_{i,0} e_k}{\beta^{i+1}} \right) \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{I^\alpha} \sum_{(\beta_0, \dots, \beta_d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \beta^i - \beta^{i+1} - \delta_{i,0} e_k} \binom{\alpha^i + \beta^i - \delta_{i,0} e_k}{\beta^{i+1}} \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

onde o somatório em (6.8) é sobre todas as $d + 1$ -uplas de seqüências tais que $\tilde{\beta}^0 = \tilde{\alpha}$ e $d - i - I\tilde{\beta}^i = \tilde{h}(i)$ e o somatório em (6.9) sobre todas as $d + 1$ -uplas de seqüências tais que $\beta^0 = \alpha + e_k$ e $d - i - I\beta^i = h(i) - \delta_{i,0} k$. Fazendo a mudança de variáveis $\eta^i = \beta^i - \delta_{i,0} e_k$, para todo i , temos $\eta_0 = \alpha$ e $d - i - I\eta^i = h(i)$. Portanto, o somatório em (6.9) se torna

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{I^\alpha} \sum_{(\eta_0, \dots, \eta_d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^i + \eta^i - \eta^{i+1}} \binom{\alpha^i + \eta^i}{\eta^{i+1}} \right) = \frac{1}{k} \mu_{\alpha,+}(\gamma)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,\beta}(\gamma) &= \mu_{\beta,-}(\gamma) \mu_{\alpha,+}(\gamma) = \mu_{\tilde{\beta},-}(\tilde{\gamma}) \cdot k \cdot \mu_{\tilde{\alpha},+}(\tilde{\gamma}) = k \cdot \mu_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(\tilde{\gamma}) \\ \mu_{\alpha,\beta}(\gamma) &= k \cdot \mu_{\alpha+e_k,\beta-e_k}(\tilde{\gamma}). \end{aligned}$$

Portanto, os caminhos γ tais que $\gamma(1)$ pertence à reta $x = 0$, contribuem com

$$\sum_{k; \beta_k \neq 0} k \cdot N_{\text{path}}^{\alpha+e_k, \beta-e_k}(d, g)$$

no número $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$.

No (ii), o ponto $\gamma(1)$ está na reta $\{x = 1\}$. Da Proposição 6.12 e da definição de multiplicidade de um caminho generalizado γ , temos:

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,-}(\gamma) &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(\prod_{i=0}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \\ &= \sum_{(\beta^0, \dots, \beta^d)} \left(I^{\alpha^1 + \beta^1 - \beta^0} \binom{\alpha^1 + \beta^1}{\beta^0} \prod_{i=1}^{d-1} I^{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1} - \beta^i} \binom{\alpha^{i+1} + \beta^{i+1}}{\beta^i} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde $\alpha^0 + \beta^0 = \beta$, $I\alpha^i + I\beta^i = h(i)$ para todo i . Então, $\mu_{\beta,-}(\gamma)$ pode ser calculada como um produto de um fator proveniente de um caminho que começa na primeira coluna vezes a multiplicidade negativa do caminho $\tilde{\gamma} := \gamma|_{[1, 2d+g+|\beta|-1]}$, mais precisamente,

$$\mu_{\beta,-}(\gamma) = \sum_{\beta'} I^{\beta' - \beta} \binom{\beta'}{\beta} \mu_{\beta',-}(\tilde{\gamma}),$$

onde a soma é tomada sobre todos os β' e g' , possíveis. Analogamente, podemos escrever

$$\mu_{\alpha,+}(\gamma) = \sum_{\alpha'} \binom{\alpha}{\alpha'} \mu_{\alpha',+}(\tilde{\gamma})$$

e, portanto,

$$\mu_{\alpha,\beta}(\gamma) = \sum_{\alpha',\beta'} I^{\beta'-\beta} \binom{\beta'}{\beta} \binom{\alpha}{\alpha'} \mu_{\alpha',\beta'}(\tilde{\gamma}),$$

onde a soma é tomada sobre todos os β' , α' e g' , possíveis. Vamos então verificar quais são esses possíveis valores. Notemos que, pela construção, $\alpha' \leq \alpha$ e $\beta \leq \beta'$. Além disso,

$$I\alpha' + I\beta' = (d-1-h(1)) + h(1) = d-1.$$

Como $\tilde{\gamma}$ tem um passo a menos que γ , temos

$$2d + g + |\beta| - 1 - 1 = 2(d-1) + g' + |\beta'| - 1,$$

garantindo que $g - g' = |\beta' - \beta| - 1$. O caminho λ -crescente $\epsilon : [0, n] \rightarrow \Delta_d$ de $(0, I\beta)$ até $(d, 0)$ que passa por todos os pontos possíveis do reticulado de Δ_d tem

$$|\beta| + (d-1) + (d-2) + \dots + 1 = |\beta| + \frac{d(d+1)}{2}$$

passos. Como γ tem $2d + g - 1 + |\beta|$ passos,

$$|\beta| + \frac{d(d+1)}{2} - (2d + g - 1 + |\beta|) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$$

pontos do reticulado são perdidos por γ . Notemos que o caminho $\tilde{\gamma}$ perde $\frac{(d-2)(d-3)}{2} - g'$ pontos do reticulado e esse número é necessariamente menor que o número de pontos perdidos por γ , pois em $\tilde{\gamma}$ os pontos da coluna $x = 1$ em que o caminho γ não passa não são contados nesse caso. Assim,

$$\frac{(d-2)(d-3)}{2} - g' \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g \Rightarrow d-2 \geq g-g'.$$

Logo,

$$\mu_{\alpha,\beta}(\gamma) = \sum_{\alpha',\beta'} I^{\beta'-\beta} \binom{\beta'}{\beta} \binom{\alpha}{\alpha'} \mu_{\alpha',\beta'}(\tilde{\gamma}) = \sum_{\alpha',\beta'} I^{\beta'-\beta} \binom{\alpha}{\alpha'} \cdot \binom{\beta'}{\beta} \cdot N^{\alpha',\beta'}(d-1, g'),$$

onde o somatório é tomado para todo α' , β' e g' satisfazendo

$$\begin{aligned} \alpha' &\leq \alpha, \\ \beta' &\geq \beta, \\ I\alpha' + I\beta' &= d-1, \\ g - g' &= |\beta' - \beta| - 1, \\ d-2 &\geq g - g'. \end{aligned}$$

Portanto, $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ satisfaz a fórmula de Caporaso-Harris, como queríamos.

Finalmente, sabendo que $N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ e $N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g)$ satisfazem a fórmula de Caporaso-Harris, para todo α, β, d, g e que ambos coincidem para $d = 1$, temos

$$N_{\text{path}}^{\alpha,\beta}(d, g) = N_{\text{cplx}}^{\alpha,\beta}(d, g).$$

□

REFERÊNCIAS

- 1 GATHMANN, Andreas; MARKWIG, Hannah. The Caporaso-Harris formula and plane relative Gromov-Witten invariants in tropical geometry. **Mathematische Annalen**, v. 338, n. 4, p. 845–868, 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0504392.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 2 KONTSEVICH, Maxim; MANIN, Yuri. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. **Communications in Mathematical Physics**, v. 164, n. 3, p. 525–562, 1994. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02101490>. Acesso em: 23 fev. 2024.
- 3 CAPORASO, Lucia; HARRIS, Joe. Counting plane curves of any genus. **Inventiones mathematicae**, v. 131, n. 2, p. 345-392, 1998. Disponível em: <http://www.mat.uniroma3.it/users/caporaso/CaporasoHarrisInv.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 4 MIKHALKIN, Grigory. Enumerative tropical geometry in \mathbb{R}^2 . **Journal of the American Mathematical Society**, v. 18, n. 2, p. 313-377, 2005. Disponível em: <https://www.ams.org/journals/jams/2005-18-02/S0894-0347-05-00477-7/S0894-0347-05-00477-7.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 5 FULTON, William. **Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry**. 3. ed. 2008. Disponível em: <https://dept.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2023.
- 6 MIKHALKIN, Grigory; RAU, Johannes. **Tropical Geometry**. 2018. Disponível em: <https://www.math.uni-tuebingen.de/user/jora/downloads/main.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 7 BRUNS, Winfried; GUBELADZE, Joseph. **Polytopes, Rings, and K-Theory**. New York: Springer Monographs in Mathematics, 2009.
- 8 GATHMANN, Andreas; MARKWIG, Hannah. The numbers of tropical plane curves through points in general position. **Journal of the American Mathematical Society**, v. 2007, n. 602, p. 155-177, 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0504390.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2024.
- 9 MARKWIG, Hannah. **The enumeration of plane tropical curves**. 2006. Tese (Doutorado em Matemática) - Fachbereich Mathematik, Technische Universität Kaiserslautern, 2006.