

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Lucca Fazza Marcon

Modelos Cosmológicos Não Comutativos em Relatividade Geral

Juiz de Fora

2020

Lucca Fazza Marcon

Modelos Cosmológicos Não Comutativos em Relatividade Geral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fazza Marcon, Lucca.

Modelos Cosmológicos Não Comutativos em Relatividade Geral / Lucca
Fazza Marcon. – 2020.

84 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

1. Cosmologia 2. Relatividade Geral. 3. Não comutatividade. I. Oliveira
Neto, Gil, orient. Título.

Lucca Fazza Marcon

"Modelos Cosmológicos Não-Comutativos em Relatividade Geral"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Aprovada em 19 de fevereiro de 2020.

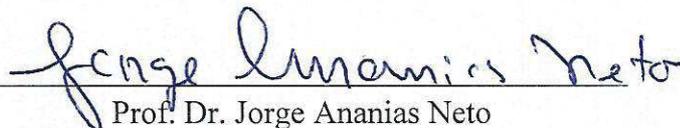
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF



Prof. Dr. Germano Amaral Monerat
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ



Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Dr. Gil de Oliveira Neto, pelo conhecimento generosamente transmitido, pelo acompanhamento diligente e atencioso e pelo solícito aconselhamento durante toda a minha trajetória.

A minha mãe, Maria Cecília Fazza, por toda a minha formação mas mais ainda por me presentear com inesquecíveis lições que foram mais que fundamentais para a realização desse trabalho. Ao meu pai Newton Marcon por não só me mostrar os caminhos da retidão, mas ser um companheiro indispensável.

Aos professores do Departamento de Física, por partilharem com muita paciência os conhecimentos adquiridos durante anos e pelas profundas discussões acerca de Física.

Aos meus camaradas, amigos e colegas de curso. Não só pelas discussões e horas de estudo mas também pela companhia em momentos críticos da nossa formação.

À Universidade Federal de Juiz de Fora, pela infraestrutura, pelas diversas oportunidades e pelo ambiente de atmosfera ímpar.

À banca examinadora pela disponibilidade e prestatividade.

Ao Secretário do Programa de Pós-Graduação em Física da UFJF, Sr. Domingos Souza Barros de Oliveira Lopes, pela oficiosa ajuda durante todo o decorrer desse mestrado.

Às instituições de fomento, CAPES e FAPEMIG, vitais para a realização desse trabalho.

“Existe apenas um bem, conhecimento e apenas um mal, ignorância.”

Sócrates

RESUMO

Nesse trabalho estudamos modelos cosmológicos não comutativos que possam justificar a expansão acelerada do Universo. Através da formulação Hamiltoniana da relatividade geral, reescrevemos a parte geométrica dessa teoria. Para tratar da matéria do Universo, utilizamos o formalismo de Schutz que permite descrever essa matéria em função de potenciais velocidades de um fluido relativístico perfeito. Com essas ferramentas obtivemos uma Hamiltoniana correspondente ao universo isotrópico e homogêneo de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker, introduzimos um fluido perfeito do tipo radiação. Nessa Hamiltoniana aplicamos o formalismo simplético de Faddeev-Jackiw, para que as não comutatividades fossem introduzidas de forma sistemática e natural, isto é, tal formalismo induziria transformações de variáveis que carregariam as não comutatividades. No entanto tal formalismo não foi capaz de produzir modelos com as não comutatividades propostas, resultando num caso já estudado na literatura. Como ponto de partida do nosso modelo, propomos que a Hamiltoniana não comutativa tenha a mesma forma funcional da Hamiltoniana comutativa mas que suas variáveis dinâmicas satisfaçam parênteses de Poisson deformados. Após isso, utilizamos transformação de coordenadas que relacionam as variáveis dinâmicas não comutativas com variáveis comutativas e alguns parâmetros não comutativos α , γ , σ e χ . Depois reescrevemos a Hamiltoniana não comutativa em função das variáveis comutativas e dos parâmetros não comutativos e derivamos equações dinâmicas para o fator de escala na presença de tais parâmetros não comutativos. Em seguida, resolvemos tais equações dinâmicas para diferentes valores de α , γ , σ , χ , constante de curvatura k , energia inicial do fluido C e condições iniciais a_0 , T_0 e v_0 . Com isso concluímos que tais parâmetros não comutativos podem descrever a expansão acelerada do Universo. O trabalho é finalizado com a apresentação de uma estimativa, feita através de dados observacionais, para os parâmetros α e γ num Universo preenchido por um fluido poeira.

Palavras-chave: Modelos cosmológicos. Não comutatividade. Aceleração do Universo.

ABSTRACT

In this work we studied noncommutative cosmological models that may describe the accelerated expansion of the Universe. Through the Hamiltonian formulation of general relativity, we rewrite the geometric part of this theory. To deal with the matter of the Universe, we use Schutz's formalism to describe this matter as a function of the potential velocities of a relativistic perfect fluid. With these tools we obtained a Hamiltonian corresponding to the isotropic and homogeneous Universe of Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker, coupled to a radiation-like perfect fluid. In this Hamiltonian we apply Faddeev-Jackiw's (FJ) symplectic formalism, so that noncommutativities were systematically and naturally introduced. Such formalism would induce transformations of variables that would carry noncommutativities. However, the FJ formalism was unable to produce the most general case of noncommutative models, resulting in a case already studied in the literature. We then used a different starting point for our model, proposing that the noncommutative Hamiltonian has the same functional form as the commutative Hamiltonian but its dynamical variables should satisfy deformed Poisson brackets. After that, we obtained a coordinate transformation, relating the noncommutative dynamical variables with commutative variables and some noncommutative parameters α , γ , σ and χ . We proceed to rewrite the noncommutative Hamiltonian as a function of commutative variables and noncommutative parameters and derive dynamical equations for the scale factor in the presence of these noncommutative parameters. We then solved the differential equations for different values of α , γ , σ and χ , for the curvature constant k , the initial fluid energy C and the initial conditions a_0 , T_0 and v_0 , concluding that noncommutative parameters can, in some cases, describe the accelerated expansion of the Universe. The final result of our work was to estimate the values of α and γ using observational data for different eras in a dust-matter dominated Universe.

Key-words: Cosmological models. Noncommutativity. Acceleration of the Universe.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\gamma = \sigma = \chi = 0, 1$, variando o valor de α	57
Figura 2 – Zoom da figura (1).	58
Figura 3 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \chi = 0, 1$, variando o valor de γ	59
Figura 4 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \gamma = 0, 1$, variando o valor de χ	60
Figura 5 – Zoom da figura (4).	61
Figura 6 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \chi = \gamma = 0, 1$, variando o valor de σ	62
Figura 7 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0, 1$, variando o valor de C	62
Figura 8 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0, 1$, variando o valor de T_0	63
Figura 9 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \chi$ e $\gamma = 0$, variando o valor de T_0	63
Figura 10 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0, 1$, variando o valor de a_0	64
Figura 11 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0, 1$, variando o valor de v_0	64
Figura 12 – Zoom da figura (11).	65
Figura 13 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $C = 10$ e diferentes valores negativos de α , σ , χ e γ	66
Figura 14 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $C = 10$ e diferentes valores positivos de α , σ , χ e γ	66
Figura 15 – Zoom da figura (13), na região inicial.	67
Figura 16 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\gamma = \sigma = 0, 1$, variando o valor de α	69
Figura 17 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0, 1$, $\sigma = 0, 1$, variando o valor de γ	70
Figura 18 – Zoom da figura (17).	70
Figura 19 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0, 1$, $\gamma = 0, 1$, variando o valor de σ	71
Figura 20 – Zoom da figura (19).	71
Figura 21 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$ e $\alpha = -0, 1$, $\sigma = \gamma = 0, 1$, variando o valor de C	72
Figura 22 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0, 1$, $\sigma = \gamma = 0, 1$, variando o valor de T_0	73

Figura 23 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$, variando o valor de a_0	73
Figura 24 – Zoom da figura (23).	74
Figura 25 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$ e $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$, variando o valor de v_0	74
Figura 26 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$ e $C = 1$ e diferentes valores negativos de α , σ e γ	75
Figura 27 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = \gamma = \sigma = \chi = -0,2$	76
Figura 28 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = \gamma = \sigma = \chi = -0,1$	76
Figura 29 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = -0,1$ e $\gamma = \sigma = \chi = 0,1$	76
Figura 30 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = -0,2$ e $\gamma = \sigma = \chi = 0,2$	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valor de v_0 para diferentes valores de α , com $k = -1$, $C = 10$, $\gamma = \sigma = \chi = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$	57
Tabela 2 – Valor de v_0 para diferentes valores de α , com $k = -1$, $C = 10$, $\gamma = \sigma = \chi = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$	57
Tabela 3 – Valor de v_0 para diferentes valores de γ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \chi = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$	58
Tabela 4 – Valor de v_0 para diferentes valores de γ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \chi = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$	59
Tabela 5 – Valor de v_0 para diferentes valores de χ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \gamma = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$	60
Tabela 6 – Valor de v_0 para diferentes valores de χ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \gamma = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$	60
Tabela 7 – Valor de v_0 para diferentes valores de σ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \chi = \gamma = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$	61
Tabela 8 – Valor de v_0 para diferentes valores de σ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \chi = \gamma = 0, 1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$	62
Tabela 9 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de α , com $k = 0$, $C = 1$, $\gamma = \sigma = 0, 1$ e no instante $t = 1$	68
Tabela 10 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de α , com $k = 0$, $C = 1$, $\gamma = \sigma = 0, 1$ e no instante $t = 800$	68
Tabela 11 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de γ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0, 1$, $\sigma = 0, 1$ e no instante $t = 1$	69
Tabela 12 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de γ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0, 1$, $\sigma = 0, 1$ e no instante $t = 800$	69
Tabela 13 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de σ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0, 1$, $\gamma = 0, 1$ e no instante $t = 1$	70
Tabela 14 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de σ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0, 1$, $\gamma = 0, 1$ e no instante $t = 800$	71
Tabela 15 – Tabela de valores de α e γ para diferentes fatores de escala de um Universo dominado por fluido poeira.	80

NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

No texto que segue convencionamos que:

Usamos unidades naturais, isto é, a velocidade da luz no vácuo c e a constante gravitacional G são tomadas como 1.

A derivada temporal de uma função $h(t)$ é representada por $\dot{h}(t)$.

Adotamos a convenção de Einstein, isto é, dois índices repetidos, um subscrito e outro sobrescrito denotam uma soma nesses índices.

Índices de letras gregas se referem ao espaço-tempo 4-dimensional e podem adotar valores como 0,1,2 ou 3. Índices de letras latinas se referem somente a parte espacial, logo, adotam valores de 1,2 ou 3. Sendo 0 reservado para a coordenada temporal.

A assinatura da métrica é $(- + + +)$.

Representamos o determinante da métrica por g .

Representamos a derivada parcial de um tensor T em relação a coordenada x^β como,

$$\frac{\partial T}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T = T_{,\beta}.$$

Representamos a derivada covariante de um tensor T em relação a x^β como,

$$\nabla_\beta T = T_{;\beta}.$$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA	15
2.1	INTRODUÇÃO	15
2.2	ELEMENTOS MATEMÁTICOS DA RELATIVIDADE GERAL	15
2.3	ESPAÇOS-TEMPO CURVOS	17
2.3.1	Transporte Paralelo	17
2.3.2	Geodésicas	18
2.3.3	Tensor de curvatura de Riemann	18
2.3.4	Tensor de Einstein	20
2.4	PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA	20
2.5	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	21
2.6	COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	21
2.6.1	Modelo de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker	22
2.6.2	Geometria de espaços com curvaturas constantes	23
2.6.2.1	<i>Constante de curvatura $k = +1$</i>	<i>23</i>
2.6.2.2	<i>Constante de curvatura $k = -1$</i>	<i>24</i>
2.6.2.3	<i>Constante de curvatura $k = 0$</i>	<i>25</i>
3	FORMULAÇÃO ADM ACOPLADO COM FLUIDO PERFEITO E FORMALISMO SIMPLÉTICO	26
3.1	INTRODUÇÃO	26
3.2	FORMULAÇÃO ADM	27
3.3	FORMALISMO DE SCHUTZ	33
3.4	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GERAL ACOPLADA A UM FLUIDO PERFEITO	36
3.5	FORMALISMO SIMPLÉTICO	38
3.5.1	Notação simplética	39
3.5.2	O formalismo simplético para sistemas vinculados	39
4	MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO COMUTATIVOS VIA METÓDO SIMPLÉTICO	42
5	MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO COMUTATIVOS ACO- PLADOS A UM FLUIDO DE RADIAÇÃO	50
5.1	COSMOLOGIA NÃO COMUTATIVA ACOPLADA A UM FLUIDO PERFEITO	50

5.2	ANÁLISE DOS MODELOS	55
5.2.1	Caso $k = 1$	56
5.2.2	Caso $k = -1$	56
5.2.2.1	<i>Variação do PNC α</i>	56
5.2.2.2	<i>Variação do PNC γ</i>	58
5.2.2.3	<i>Variação do PNC χ</i>	59
5.2.2.4	<i>Variação do PNC σ</i>	61
5.2.2.5	<i>Variação de C</i>	62
5.2.2.6	<i>Variação de T_0</i>	63
5.2.2.7	<i>Variação de a_0</i>	63
5.2.2.8	<i>Variação de v_0</i>	64
5.2.2.9	<i>Comparação entre parâmetros não comutativos</i>	65
5.2.3	Caso $k = 0$	68
5.2.3.1	<i>Variação do PNC α</i>	68
5.2.3.2	<i>Variação do PNC γ</i>	69
5.2.3.3	<i>Variação do PNC σ</i>	70
5.2.3.4	<i>Variação de C</i>	72
5.2.3.5	<i>Variação de T_0</i>	72
5.2.3.6	<i>Variação de a_0</i>	73
5.2.3.7	<i>Variação de v_0</i>	74
5.2.3.8	<i>Comparação entre parâmetros não comutativos</i>	74
5.2.4	Comparação entre modelos com constantes de curvatura diferentes	75
5.2.4.1	<i>Caso $k = 0$ e $k = -1$</i>	75
5.3	ESTIMATIVA DE PARÂMETROS NÃO COMUTATIVOS	77
6	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	83

1 INTRODUÇÃO

O mundo Natural sempre causou grande deslumbramento na espécie humana. Em especial, o céu e os astros nele alojados foram e são elementos de grande entusiasmo humano. Entusiasmo esse tão grande que gerou uma das maiores áreas do conhecimento humano, a Astronomia. Uma das subáreas desse campo de estudo que concerne essa dissertação, é a Cosmologia. Nela buscamos compreender, entender, ordenar e categorizar os fenômenos da ordem cosmológica, isto é, estudar desde os instantes primevos do nosso Universo à formação das grandes estruturas astrofísicas e também o fim do nosso Universo.

Nesse sentido, a Cosmologia esteve presente durante todos os milênios da existência da civilização humana. No entanto, estabeleceu-se como um campo de estudo formal durante o Renascimento Cultural-Científico protagonizado na Europa Continental. Nesse período de grandes transformações, astrônomos e filósofos naturais como Nicolau Copérnico e Galileu Galilei foram fundamentais para a passagem de um sistema solar geocêntrico para um sistema solar heliocêntrico. Assim como Isaac Newton, que após estudar a dinâmica dos corpos terrenos e celestes, foi capaz de realizar a primeira unificação de teoria físicas, transformando as três leis celestes de Johannes Kepler em apenas consequências das leis mecânicas dos corpos. Nesse período histórico compreende-se a primeira formalização dos estudos da Natureza.

Na segunda década do século XX, Albert Einstein propõe a teoria da relatividade geral, um conjunto de equações capazes de corrigir os erros da teoria newtoniana relacionados a dinâmica dos corpos do sistema solar e prever uma plethora de novos fenômenos de escala cosmológica. Em consequência disso William de Sitter propôs em 1917, dois anos após a publicação dessa teoria, a primeira solução para as equações de Einstein cujo o Universo era não estático. Esse trabalho possibilitou que Alexander Friedmann, em 1922, deduzisse um conjunto de equações dinâmicas que descrevem a expansão de um Universo homogêneo e isotrópico. No ano de 1929 Edwin Hubble publica sua constatação de que outras galáxias se afastam de nós com velocidades proporcionais a suas distâncias a nós. Essa constatação bem como a descoberta da radiação cósmica de fundo por Arno Penzias e Robert W. Wilson [1], consolidaram o conceito de Universo em expansão e configuram, juntamente com outros fenômenos e evidências, o que chamamos de Modelo Padrão da Cosmologia [2].

Saul Perlmutter, Adam Riess e Brian Schmidt em 1998, mostraram que a expansão do Universo, na realidade, é uma expansão acelerada [3,4], surpreendendo toda a comunidade científica contemporânea. O pensamento dominante na época era de que em virtude da interação gravitacional da matéria, essa expansão deveria diminuir ao longo do tempo, o oposto do observado. Esses trabalhos foram o motor para introduzir a ideia da energia escura. Essa energia permearia todo o Universo e teria um efeito repulsivo,

exatamente o oposto dos efeitos gravitacionais e seria a causa da expansão acelerada do Universo. Diversas propostas foram feitas para explicar sua natureza, mas ainda não existem respostas categóricas para sua origem.

A proposta desse trabalho é considerar uma origem diferente para a expansão acelerada: propomos que as componentes da métrica e as variáveis que descrevem a matéria do Universo sejam não comutativas. Tal não comutatividade teria sua origem num Universo primordial, regido por interações quânticas. Assim, o Universo atual poderia possuir vestígios dessa propriedade e afetaria diretamente as equações dinâmicas para o fator de escala.

A utilização de não comutatividade para solucionar problemas em aberto não é inédita. Hartland S. Snyder introduziu conceitos de não comutatividade entre coordenadas do espaço-tempo [5] numa tentativa de discretizar o espaço-tempo, que foram posteriormente aprofundadas por C.N Yang [6]. Após alguns anos, a não comutatividade voltou a ser encontrada na literatura. Nesse trabalho consideramos a não comutatividade entre variáveis dinâmicas da teoria, ou seja entre componentes da métrica e variáveis que descrevem a matéria do Universo [7]. Primeiramente, nossa abordagem será como a de [8], onde induzimos a não comutatividade usufruindo do formalismo simplético de Faddeev-Jackiw. Posteriormente adotaremos um método que introduz diretamente as não comutatividades nos parênteses de Poisson da teoria (método direto), similar a [?].

O texto está dividido da seguinte maneira: iniciamos com uma revisão dos conceitos fundamentais da relatividade geral no capítulo 2. O capítulo 3 irá tratar da formulação de Arnowitt-Deser-Misner e do formalismo de Schutz. Usamos esses dois formalismos para obter uma forma Hamiltoniana do Universo de Friedmann-Robertson-Walker na presença fluido perfeito. Finalmente uma revisão do formalismo simplético é feita. Os capítulos 4 e 5 desse trabalho consistem nos resultados originais obtidos. No capítulo 4 utilizamos o formalismo simplético para introduzir a não comutatividade. Já no capítulo 5 usamos o método direto para introduzir as não comutatividades, além de apresentar a análise dos resultados juntamente com uma estimativa de dois dos quatro parâmetros introduzidos, baseada em dados observacionais. No capítulo 6, finalizamos o trabalho com discussões e conclusões acerca dos estudos desenvolvidos e resultados obtidos.

2 RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA

2.1 INTRODUÇÃO

Proposta em 1915 por Albert Einstein, a teoria da relatividade geral constitui uma teoria geométrica da gravidade, isto é, os efeitos gravitacionais são o resultado de uma curvatura do espaço-tempo. Curvatura essa que é fruto da energia, momento e tensão da matéria. Em outras palavras, a matéria diz como o espaço-tempo deve se curvar e a curvatura diz como a matéria deve se movimentar.

Essa nova teoria tinha como motivação introduzir os conceitos da teoria da relatividade restrita juntamente com os princípios da equivalência e de Mach, para referenciais não-inerciais, um caso fora do escopo da relatividade especial. O princípio de Mach consiste na ideia de que a origem da massa dos corpos é proveniente da interação de toda a matéria do Universo com tais corpos. O princípio da equivalência se dedica em afirmar, localmente, que há uma igualdade entre referenciais não-inerciais e campos gravitacionais, ou ainda, que esses dois objetos são indistinguíveis entre si. Esse conceito será aprofundado nas seções posteriores.

Nesses mais de 100 anos de sua publicação, a teoria foi testada diversas vezes, explicando e descobrindo vários fenômenos, como o periélio de Mercúrio, dilatação temporal por um campo gravitacional e desvio angular da luz num campo gravitacional. Nos últimos anos, as ondas gravitacionais foram detectadas e medidas em diversos eventos distintos [10–15]. Além disso, em Março de 2019 foi divulgada a primeira foto de um Buraco Negro [16]. Ambos os fenômenos são previsto pela teoria de Einstein e suas detecções diretas fortalecem ainda mais sua validade e grau de confiabilidade.

Esse capítulo é dedicado a introduzir alguns dos conceitos matemáticos fundamentais e os passos essenciais na construção da relatividade geral.

2.2 ELEMENTOS MATEMÁTICOS DA RELATIVIDADE GERAL

Nessa seção, consideramos alguns tópicos operacionais de geometria diferencial. Introduzimos também alguns conceitos de coordenadas curvilíneas em espaços planos afim de esclarecer algumas características de espaço-tempos curvos, estudados na relatividade geral.

Em espaços-curvedos, os vetores de base \vec{e}_ρ podem se modificar ponto a ponto [17]. Essa variação pode ser calculada através dos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$, definidos como os coeficientes da derivação desse vetor,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.1)$$

Dessa forma, a derivação de um vetor \vec{V} qualquer desse espaço toma a forma,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu \right) \vec{e}_\mu. \quad (2.2)$$

Essa operação é chamada de derivada covariante do vetor \vec{V} . Denotamos a derivada covariante da componente contravariante α do vetor \vec{V} como

$$\nabla_\nu V^\alpha = V^\alpha_{;\nu} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\nu} + V^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha = V^\alpha_{,\nu} + V^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha. \quad (2.3)$$

Note que o resultado dessa derivada covariante, $V^\alpha_{;\nu}$, é um tensor de rank 2 misto, com um índice covariante e outro contravariante. A derivada covariante da componente covariante β de um vetor \vec{P} é dada por,

$$\nabla_\nu P_\beta = P_{\beta,\nu} - P_\rho \Gamma_{\beta\nu}^\rho. \quad (2.4)$$

Munidos dessas expressões somos capazes de calcular a derivada covariante de tensores de rank superior como segue [18],

$$\nabla_\nu T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}_{,\nu} - T^{\rho\beta} \Gamma_{\rho\nu}^\alpha - T^{\alpha\rho} \Gamma_{\rho\nu}^\beta, \quad (2.5)$$

$$\nabla_\nu T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta,\nu} + T_{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\rho + T_{\alpha\rho} \Gamma_{\beta\nu}^\rho, \quad (2.6)$$

$$\nabla_\nu T_\beta^\alpha = T_{\beta,\nu}^\alpha + T_\beta^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha - T_\rho^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\rho. \quad (2.7)$$

É necessário complementar que, os símbolos de Christoffel não são de fato tensores [18]. Ao realizarmos uma transformação de coordenadas arbitrárias, tais entidades se transformam como,

$$\Gamma_{\mu'\beta'}^{\rho'} = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\eta}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\theta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma_{\eta\theta}^\alpha + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\beta'}}. \quad (2.8)$$

A presença do segundo termo, $\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\beta'}}$, demonstra o carácter não tensorial dessa quantidade.

Podemos definir as componentes da métrica do espaço estudado como o produto escalar entre dois vetores de base,

$$g_{\mu\nu} = (\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu). \quad (2.9)$$

Além disso, temos o seguinte resultado,

$$\nabla_\nu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.10)$$

Usufruindo do resultado (2.10), podemos encontrar uma relação entre os símbolos de Christoffel e as componentes da métrica. De fato,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (2.11)$$

Percebemos instantaneamente que essa fórmula só é válida para o caso onde o espaço não possui torção e o símbolo de Christoffel é simétrico nos índices covariantes,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}. \quad (2.12)$$

2.3 ESPAÇOS-TEMPO CURVOS

No presente texto, expomos a relatividade geral, que estuda somente espaço-tempos curvos que tenham métrica $g_{\mu\nu}$ simétrica (e portanto diagonalizável) e que originam produtos escalares não positivamente definidos. Chamamos esse tipo de espaço-tempo curvo de espaços pseudo-Riemanniano. Vamos elucidar algumas propriedades de tais espaços, que são comuns aos espaços planos em coordenadas curvilíneas. São elas,

I. Transformações de coordenadas definem as transformações de índices contravariantes de tensores, e as respectivas transformações inversas definem as transformações de índices covariantes desses respectivos tensores.

II. A métrica pode ser obtida diretamente dos vetores de base.

III. O jacobiano de uma transformação pode ser escrito em termos da métrica do espaço, como segue,

$$J = \sqrt{(-g)} \quad (2.13)$$

IV. A derivada covariante da métrica é nula.

V. Os símbolos de Christoffel podem ser escritos em função da métrica e ser usados no cálculo de derivadas covariantes.

Nesses itens, expomos somente as características que mais nos interessam de forma prática. Os próximos tópicos se dedicam a introduzir conceitos indispensáveis como transporte paralelo, tensor de curvatura de Riemann, geodésicas e o tensor de Einstein.

2.3.1 Transporte Paralelo

Uma operação frequente e muito útil na Física é o transporte paralelo de um vetor \vec{V} . Esse procedimento consiste em deslocar por elementos infinitesimais de comprimento um vetor ao longo de uma curva, de forma de que ponto a ponto esses vetores deslocados são paralelos entre si e conservem seu módulo. Uma vez que isso possa ser realizado, dizemos

que \vec{V} foi transportado paralelamente. Essa operação não é trivial quando tratamos de espaços físicos curvos. Assim para matematizar esse processo, parametrizamos a curva x^a , percorrida pelo vetor, por um parâmetro λ . O vetor tangente U^α a tal curva é descrita como,

$$U^a = \frac{dx^a}{d\lambda} \quad (2.14)$$

O vetor que se mantém constante ao ser transportado nessa curva satisfaz a seguinte equação,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0 \quad (2.15)$$

Ou em termos do vetor tangente a curva U^α ,

$$\frac{dV^\alpha}{dx^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = V^\alpha_{;\beta} U^\beta = 0. \quad (2.16)$$

A expressão (2.16) representa o transporte paralelo do vetor \vec{V} ao longo do curva descrita por $x^\beta(\lambda)$.

2.3.2 Geodésicas

As curvas que são dotadas da propriedade de sempre transportar paralelamente seus vetores tangentes são denominadas de *Geodésicas* [19]. Isto é,

$$U^\sigma_{;\rho} U^\rho = (U^\sigma_{,\rho} + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} U^\nu) U^\rho = U^\sigma_{,\rho} U^\rho + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0. \quad (2.17)$$

Desenvolvendo essa expressão podemos chegar a equação da Geodésica,

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.18)$$

Essa equação diferencial de segunda ordem não-linear ao ser resolvida, com as condições de contorno adequadas, resulta numa solução única, uma curva geodésica $x^a(\lambda)$. É interessante mencionar que as curvas geodésicas são para o espaço curvo tal como as trajetórias retilíneas são para o espaço plano, isto é, um objeto livre percorre, no espaço curvo, uma trajetória de geodésica.

2.3.3 Tensor de curvatura de Riemann

Ao tratarmos de espaços curvos, uma das suas qualidades primordiais é a curvatura do espaço. Essa quantidade pode ser obtida ao transportar um vetor \vec{V} ao longo de uma curva fechada. Se tal curva pode ser descrita por coordenadas x^ρ e x^β e utilizando a equação de transporte paralelo (2.16) sobre uma curva fechada, obtemos a variação da componente α de \vec{V} , δV^α , ao longo da curva na forma [20],

$$\delta V^\alpha = \delta x_0^\rho \delta x_0^\beta \left[-\Gamma^\alpha_{\mu\beta,\rho} + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\nu_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho,\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} \Gamma^\nu_{\mu\rho} \right] V^\mu. \quad (2.19)$$

O termo fora dos colchetes, $\delta x_0^\rho \delta x_0^\beta$, remete à curva percorrida pelo vetor \vec{V} . Agora, o termo dentro dos colchetes demonstra uma característica exclusiva de espaços curvos, a curvatura. Vimos na equação (2.8) que os símbolos de Christoffel não se comportam como tensores, no entanto esse objeto que estamos analisando de fato é um tensor, e o denominamos *Tensor de Curvatura de Riemann*. Representamos suas componentes como,

$$R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = \Gamma_{\mu\sigma,\lambda}^\alpha - \Gamma_{\mu\lambda,\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\mu\lambda}^\nu. \quad (2.20)$$

O tensor de curvatura de Riemann, assim é chamado pois carrega informações sobre a curvatura intrínseca do espaço-tempo. Ou seja, para o caso do espaço plano, onde não há curvatura, temos

$$R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = 0. \quad (2.21)$$

Pode-se mostrar que o tensor de curvatura é dado também pelo comutador das derivadas covariantes de \vec{V} [18],

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu. \quad (2.22)$$

Note que, o caso em que as derivadas covariantes são equivalentes a derivadas parciais, ou seja, o espaço é plano, então o comutador se anula e logo $R_{\mu\lambda\sigma}^\alpha = 0$, como esperávamos.

O tensor de Riemann possui diversas características notáveis. Abaixando seu índice contravariante podemos explicar algumas simetrias [20],

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \quad (2.23)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \quad (2.24)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.25)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (2.26)$$

Usando essas simetrias é possível mostrar que o número de componentes independentes do tensor de Riemann é [20],

$$N_D = \frac{D^2(D^2 - 1)}{12}. \quad (2.27)$$

Onde D é a dimensão do espaço Riemanniano ou pseudo-riemanniano.

Podemos construir contrações do tensor de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha, \quad (2.28)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.29)$$

Denominados *Tensor de Ricci e escalar de curvatura*.

2.3.4 Tensor de Einstein

Usando (2.20) bem como (2.28) e (2.29), pode-se mostrar outras simetrias a qual o tensor de Riemann está submetido. Tais simetrias são chamadas de *identidades de Bianchi*. Elas são [20],

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\lambda} = 0, \quad (2.30)$$

$$\nabla_\mu R_{\beta\nu\lambda}^\mu = \nabla_\nu R_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda R_{\beta\nu}, \quad (2.31)$$

$$\nabla_\mu \left(R^{\rho\mu} - \frac{1}{2} g^{\rho\mu} R \right) = 0. \quad (2.32)$$

Sendo essa última de importância notável para a relatividade geral. Dela, definimos o *tensor de Einstein* como segue,

$$G^{\rho\mu} = R^{\rho\mu} - \frac{1}{2} g^{\rho\mu} R. \quad (2.33)$$

Como esse tensor é escrito em termos do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e da métrica $g_{\mu\nu}$, então ele é simétrico em seus índices e satisfaz $\nabla_\nu G_{\mu\nu} = 0$.

2.4 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA

A ideia central da teoria da relatividade geral consiste em considerar a descrição do campo gravitacional pela métrica do espaço-tempo 4-dimensional. Enquanto na relatividade especial tal espaço-tempo permanece imutável, na relatividade geral não é mais o caso, o próprio espaço-tempo possui dinâmica.

A teoria da relatividade geral tem em seu núcleo duro o *Princípio da Equivalência*. O princípio afirma que, localmente, uma partícula de testes puntiforme não distingue se é afetada pela força gravitacional ou por uma aceleração. Isto é, localmente a gravidade pode ser sempre compensada por uma aceleração.

Como consequências desse princípio temos: qualquer lei física escrita em notação tensorial na teoria da relatividade especial tem forma idêntica se escrita num referencial local de um espaço-tempo curvo da relatividade geral; e que partículas massivas livres percorrem geodésicas tipo-tempo e partículas não-massivas percorrem geodésicas tipo-luz, do espaço-tempo. Esses pontos podem ser apresentados como *princípio da equivalência forte* e *princípio da equivalência fraco*, respectivamente. Explicações mais aprofundadas podem ser encontradas em [17] e [21].

2.5 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Para encontrar as equações que governam o campo gravitacional, postulamos a seguinte ação,

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M. \quad (2.34)$$

onde a primeira integral é a ação referente a gravidade, com a presença de uma constante Λ e \mathcal{L}_M é a Lagrangiana referente a matéria presente no modelo. Vale notar que generalizamos "matéria" como toda entidade física distinta da geometria do espaço-tempo.

Agora vamos justificar o porquê dessa forma para a parte gravitacional da ação [17]. Desejamos que a Lagrangiana carregue um funcional local da métrica e também esperamos que as equações de movimento só possuam derivadas de segunda ordem na métrica $g_{\mu\nu}$. Logo, a ação também só deve possuir derivadas de segunda ordem. Dessa forma, só existem dois candidatos que podem ser aplicados para que se tenha uma Lagrangiana covariante, o escalar de curvatura R , visto que na ação só podemos ter escalares, e uma constante arbitrária Λ , tal como mostramos em (2.34).

Usando o princípio de Hamilton, podemos chegar ao seguinte resultado,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Aqui $T_{\mu\nu}$ são as componentes do *tensor de energia-momento*, que pode ser obtido ao efetuar,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.36)$$

A expressão mostrada em (2.35) constitui um conjunto de equações diferenciais chamadas *Equações de Einstein*. No lado direito dela temos o tensor energia-momento, dado pela expressão (2.36), e está relacionado com a matéria presente no modelo estudado. No lado esquerdo temos o tensor de Einstein, dado por (2.33), e está conectado com a métrica e suas derivadas. Isto é, com a geometria do espaço-tempo. Nesse conjunto de equações vemos a forte relação que existe entre matéria e a curvatura. Ou ainda, a curvatura e o movimento que esta causa na matéria. Existe ainda a presença de uma constante Λ , que foi introduzida por Einstein posteriormente a publicação da teoria, com o intuito de obter soluções estáticas para o Universo. A ideia de que o Universo poderia ser dinâmico era, para alguns físicos da época e para o próprio Einstein, equivocada [17]. Essa constante foi batizada de *constante cosmológica*. Atualmente, o Universo foi constatado como dinâmico e a constante cosmológica se manteve presente devido a descoberta da expansão acelerada do Universo [3, 4].

2.6 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

No que tange aplicações da teoria da relatividade geral constitui-se uma das mais proeminentes o estudo do Cosmos, a cosmologia física. De fato, a cosmologia existe a

milênios anteriores a relatividade geral, mas é finalmente depois do advento dessa teoria que a cosmologia pôde produzir diversos frutos. Então, o campo de estudo que abrange a cosmologia utilizando a relatividade geral é denominada *Cosmologia Relativística*.

O estudo da cosmologia possui como base um princípio fundamental, o *Princípio Cosmológico*. Este denota que a distribuição de matéria no universo deve ser homogênea e isotrópica em escalas superiores a 30 Mpc ([17]), e portanto não há localização privilegiada no Universo para algum observador. É ainda cabível, modelar tal distribuição de matéria de forma a tratá-la como um fluido perfeito. Esse é denominado *Postulado de Weyl* e consiste em descrever a movimentação de galáxias e aglomerados de matéria através de linhas de mundo que são geodésicas. O conjunto dessas geodésicas definem uma superfície espacial isotrópica e homogênea, tal como desejado pelo Princípio Cosmológico. Além disso, tais linhas de mundo não interagem entre si. As condições colocadas por esse princípio permitem tratar a matéria, como mencionamos acima, como um fluido perfeito. [17]. Nesse caso, o tensor energia-momento, entidade responsável para tratar a matéria no contexto da relatividade geral, é da forma

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

onde U^μ é a velocidade do fluido em seu referencial co-móvel, p a pressão e ρ a densidade do fluido. É interessante notar que, graças ao Princípio Cosmológico, ρ e p só podem depender do tempo.

2.6.1 Modelo de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker

Uma das consequências do Princípio Cosmológico é a condição de curvatura constante na geometria do universo. Esse tipo de modelo do Universo pode ser descrito pela métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker (FLRW) que descreve um universo dinâmico, em contração ou expansão, homogêneo e isotrópico. Assim, o espaço tridimensional do modelo FLRW de curvatura constante pode ser modelado pelos termos espaciais do intervalo invariante, que podemos deduzir da seguinte expressão do tensor de Riemann tridimensional [20],

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (2.38)$$

onde k é uma constante que pode variar entre 0, +1, -1 e é denominada de constante de curvatura. Além disso, devido a homogeneidade e isotropia, o intervalo invariante tridimensional em coordenadas esféricas é dado por,

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.39)$$

onde θ e ϕ são ângulos esféricos e r o raio da esfera. $\lambda(r)$ é uma função a ser determinada. O termo $e^{\lambda(r)}$ garante que a componente radial da métrica é positivamente definida.

Dado (2.38) e (2.39), podemos determinar a função $\lambda(r)$ e o intervalo invariante tridimensional (2.39) fica como,

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.40)$$

Agora, uma das requisições do Princípio Cosmológico é a necessidade de que o Universo, sendo dinâmico, o seja de forma homogênea e isotrópica, isto é, toda sua parte espacial deve expandir ou contrair de forma igual [17]. Para isso, multiplicamos (2.40) pelo fator de escala $a(t)$. Assim, o intervalo invariante quadridimensional se torna,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.41)$$

A expressão (2.41) é chamada de elemento de linha de Friedmann-Lêmaître-Robertson-Walker. A próxima subseção se dedica a estudar brevemente as consequências dos diferentes valores que k pode assumir.

2.6.2 Geometria de espaços com curvaturas constantes

Para estudar a geometria gerada pelo elemento de linha (2.41) ao substituir um dado valor de k , podemos considerar apenas um instante $t = t_0$ correspondente a $a(t_0) = a_0$ e portanto analisar somente a parte espacial. Isto é,

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.42)$$

2.6.2.1 Constante de curvatura $k = +1$

Introduzindo $k = 1$ em (2.42) obtemos,

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.43)$$

A fim de contornar a singularidade quando $r \rightarrow 1$ propomos uma nova variável ξ de tal forma que,

$$r = \sin \xi \quad (2.44)$$

E devido a isso o elemento de linha (2.43) se torna,

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.45)$$

Podemos, convenientemente, alojar essa estrutura tridimensional num espaço euclidiano 4-dimensional. Para isso usamos a seguinte mudança de coordenadas,

$$b = a_0 \cos \xi, \quad (2.46)$$

$$x = a_0 \sin \xi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.47)$$

$$y = a_0 \sin \xi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.48)$$

$$z = a_0 \sin \xi \cos \theta. \quad (2.49)$$

E usufruindo dessas transformações, o elemento de linha (2.45) se torna,

$$d\sigma^2 = db^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.50)$$

A partir de (2.46)-(2.49), encontramos,

$$b^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2. \quad (2.51)$$

Agora, essa equação (2.51) é nada mais que a equação de uma esfera tridimensional de raio a_0 definida nos intervalos de coordenadas $0 \leq \xi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Portanto um universo com curvatura $k = 1$ é descrito pela geometria fechada de uma superfície esférica tridimensional.

2.6.2.2 Constante de curvatura $k = -1$

Substituímos $k = -1$ na equação (2.42) e obtemos a seguinte forma para o elemento de linha,

$$d\sigma^2 = (a_0)^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.52)$$

E vamos usar a seguinte transformação de coordenadas,

$$r = \sinh \xi, \quad (2.53)$$

resultando em,

$$d\sigma^2 = (a_0)^2 \left[d\xi^2 + \sinh^2 \xi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.54)$$

Assim como na seção anterior propomos algumas mudanças de variáveis que alojam essa geometria num espaço 4-dimensional, nesse caso espaço pode ser introduzido no espaço minkowskiano. Elas são,

$$\omega = a_0 \cosh \xi, \quad (2.55)$$

$$x = a_0 \sinh \xi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.56)$$

$$y = a_0 \sinh \xi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.57)$$

$$z = a_0 \sinh \xi \cos \theta, \quad (2.58)$$

E nosso elemento de linha fica na forma,

$$\omega^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2 \quad (2.59)$$

Que é a equação de uma superfície hiperbólica limitada em $0 \leq \xi \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

2.6.2.3 Constante de curvatura $k = 0$

Agora introduzimos $k = 0$ na equação (2.42) e então,

$$d\sigma^2 = (a_0)^2 \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) \right]. \quad (2.60)$$

Fazendo uma simples transformação de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas, isto é,

$$x = a_0 r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.61)$$

$$y = a_0 r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.62)$$

$$z = a_0 r \cos \theta, \quad (2.63)$$

obtemos que,

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.64)$$

Assim, obtemos exatamente o elemento de linha de um espaço euclidiano em coordenadas cartesianas, isto é, um espaço com geometria plana.

3 FORMULAÇÃO ADM ACOPLADO COM FLUIDO PERFEITO E FORMALISMO SIMPLÉTICO

3.1 INTRODUÇÃO

Nos anos finais da década de 40, a Eletrodinâmica já havia sido quantizada, impulsionando os físicos da época a quantizar a outra teoria fundamental conhecida da época, a teoria da relatividade geral. Para tal empenho, a Hamiltoniana da relatividade geral deveria ser deduzida para que as regras de quantização canônica fossem devidamente aplicadas. Mas a invariância por transformações de coordenadas dessa teoria gerou vínculos entre as coordenadas e os *momenta* canonicamente conjugados da teoria. Assim, obter algumas velocidades generalizadas em termos dos *momenta* era impossível, e portanto uma forma Hamiltoniana inalcançável.

Após os esforços de Dirac e Bergmann [22–24] para uma generalização de sistemas hamiltonianos vinculados, R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner foram capazes de produzir uma formulação consistente da Hamiltoniana da relatividade geral [25]. Parte desse capítulo procura expor as ideias centrais desse formalismo para a parte geométrica da teoria da relatividade geral.

Usaremos o *formalismo de Schutz* para introduzir a matéria na ação da relatividade geral. Desenvolvido na década de 70 por Bernard F. Schutz, tal formalismo consiste em representar a 4-velocidade de um fluido perfeito relativístico por potenciais-velocidades. A ideia original de descrever a velocidade de um fluido através de potenciais-velocidades foi de A. Clebsch em 1859, com a única desvantagem de que ambos os potenciais lá expressos não teriam significado físico individualmente, além de não possuírem equações de movimento. Um século mais tarde, R.L. Seliger e G.B. Whithman [26] generalizaram e aprimoraram o formalismo, sendo capazes de indicar significado físico para dois, dos cinco potenciais utilizados. Schutz usufrui desse progresso e generaliza esse formalismo para o caso relativístico, usando 6 potenciais-velocidade [27, 28].

Na seção seguinte, com ambas formulações estabelecidas, iremos combiná-las e construir uma Hamiltoniana para a métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker acoplada a um fluido relativístico perfeito.

Na última seção do capítulo, discutimos sobre o formalismo de Faddeev-Jackiw para sistemas vinculados [29, 30]. Através desse tratamento, podemos inserir os vínculos da teoria como variáveis dinâmicas no espaço de configuração, ou ainda, como no caso da relatividade geral, obter uma teoria consistente fixando o calibre da teoria. Esse formalismo será posteriormente utilizado para induzir a não comutatividade

Portanto, esse capítulo será dividido da seguinte forma: a seção 3.2 trata da formulação Hamiltoniana da relatividade geral, a seção 3.3 discorre sobre o estudo do formalismo

proposto por Schutz. A seção 3.4 mostra como combinar os resultados das seções anteriores e a seção 3.5 introduz o método de Faddeev-Jackiw, que será usado no capítulo seguinte.

3.2 FORMULAÇÃO ADM

Como já dito, o formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner) foi desenvolvido com o objetivo de realizar a quantização canônica da relatividade geral. Para isso, era necessário a obtenção da Hamiltoniana da relatividade geral. Essa necessidade provém do fato de que queremos obter a evolução de uma função de onda em relação a um parâmetro, no caso o tempo. Dessa forma, o primeiro passo é obter a "geometrodinâmica", realizando uma separação em parte espacial e parte temporal da métrica $g_{\mu\nu}$, isto é, o *split* 3 + 1 da métrica $g_{\mu\nu}$ [21]. Em outras palavras, o espaço-tempo se torna foliações de hipersuperfícies espaciais cuja dinâmica será dada através da evolução temporal das mesmas.

As soluções das equações de Einstein, (2.35), podem nos dar somente seis das dez componentes da métrica $g_{\mu\nu}$. As outras quatro componentes são livres, representando nossa liberdade de transformação de coordenadas nas seis componentes dinâmicas. Essa liberdade advém das simetrias (2.32). Dessa forma, a métrica do espaço-tempo será dividida em 3 partes distintas: Um métrica h_{ij} descrevendo hipersuperfícies espaciais, um escalar N denominado função lapso e um vetor N^i chamado de vetor deslocamento. Assim, h_{ij} deveria carregar as informações referentes as seis componente independentes da métrica e portanto corresponderia a parte dinâmica da teoria. Enquanto as outras 4 componentes seriam representadas pelo escalar, $N(t)$ e pelo vetor $N^i(t)$, que na realidade não são objetos dinâmicos e devem ser fixados. Essas duas quantidades denotariam como as hipersuperfícies espaciais evoluíam no tempo para dar origem ao espaço-tempo 4-dimensional.

Consideremos duas hipersuperfícies do tipo espaço, S_1 e S_2 , uma no tempo $x^0 = t$ e outra em $x^0 = t + dt$, respectivamente. Podemos escrever suas métricas como, respectivamente,

$$h(t, x^i), \quad (3.1)$$

$$h(t + dt, x^i). \quad (3.2)$$

A distância entre diferentes pontos de uma mesma hipersuperfície é,

$${}^{(3)}ds^2 = h_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.3)$$

onde usamos ⁽³⁾ para referenciar quantidades que são de objetos 3-dimensionais. Usaremos ⁽⁴⁾ para quantidades 4-dimensionais.

Consideramos que S_1 e S_2 se relacionam através de um campo vetorial \vec{dt} , definido sobre S_1 , "evoluindo" cada ponto de S_1 para algum ponto da superfície S_2 . Suponhamos ainda, que em cada ponto de S_1 , esse campo vetorial tenha uma direção arbitrária no

espaço-tempo 4-dimensional. Assim, suas projeções normais \hat{n} e tangenciais \hat{u} sobre S_1 são não nulas. Decompondo o campo vetorial \vec{dt} em componentes tangenciais e normais, cada uma delas tem módulo dado por, respectivamente,

$$\hat{u} \rightarrow N^i dt, \quad (3.4)$$

$$\hat{n} \rightarrow N dt. \quad (3.5)$$

Queremos relacionar essas quantidades referentes ao split, h_{ij} , N e N^i , com as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$. Para isso considere um ponto x_1^i em S_1 e um ponto x_2^i em S_2 . No tempo próprio τ , sua separação na direção normal é

$$d\tau^2 = N^2 dt^2. \quad (3.6)$$

Considere a projeção $P(x_2^i)$ do ponto x_2^i na hipersuperfície S_1 . A distância própria D ao ponto x_1^i é,

$$D = P(x_2^i) - x_1^i. \quad (3.7)$$

Sabendo que $P(x_2^i) = x_1^i + dx_1^i + N^i dt$, logo

$$D = dx_1^i + N^i dt. \quad (3.8)$$

Com esse resultado se constrói o intervalo invariante das hipersuperfícies na forma,

$$dD^2 = h_{ij} (dx_1^i + N^i dt) (dx_1^j + N^j dt). \quad (3.9)$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no espaço-tempo 4-dimensional, com assinatura Lorentziana, isto é

$$ds^2 = dD^2 - d\tau^2, \quad (3.10)$$

e com as expressões (3.6) e (3.9) chegamos ao intervalo invariante 4-dimensional,

$$ds^2 = (N_j N^j - N^2) dt^2 + N_j dt dx^j + N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.11)$$

Mas sabemos que ds^2 se relaciona com as componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ da seguinte forma,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.12)$$

Com essa equação, identificamos as componentes da métrica como,

$$g_{00} = N_j N^j - N^2, \quad (3.13)$$

$$g_{0i} = N_i, \quad (3.14)$$

$$g_{k0} = N_k, \quad (3.15)$$

$$g_{ik} = h_{ik}. \quad (3.16)$$

Ou ainda,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_j N^j - N^2 & N_k \\ N_i & h_{ik} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Cuja inversa é,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_i}{N^2} \\ \frac{N_j}{N^2} & h_{ji} - \frac{N_j N_i}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Vamos fazer alguns comentários sobre o significado físico de N e N^i . Vemos por (3.6) que a função lapso nos dá a taxa de variação do tempo próprio τ em relação ao tempo ordenado t , isto é $N = \frac{d\tau}{dt}$. Enquanto o vetor deslocamento representa o movimento tangencial da hipersuperfície S_1 após um incremento infinitesimal de tempo [18].

Agora vamos tratar de analisar a curvatura das hipersuperfícies espaciais levando em consideração que elas estão embutidas no espaço-tempo 4-dimensional. Devido a isso, é necessário descrever não apenas sua curvatura intrínseca, mas também precisamos descrever a curvatura em relação ao espaço-tempo 4-dimensional.

A curvatura intrínseca é imediata e é dada pela expressão do tensor de curvatura de Riemann (2.20) levando em consideração que, agora a métrica em questão é a métrica h_{ij} da hipersuperfície espacial. Isto é,

$${}^{(3)}R^i{}_{jkm} = \Gamma^i{}_{jm,k} - \Gamma^i{}_{jk,m} + \Gamma^i{}_{lk}\Gamma^l{}_{jm} - \Gamma^i{}_{lm}\Gamma^l{}_{jk}, \quad (3.19)$$

em que,

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}h^{im}(\partial_k h_{mj} + \partial_j h_{mk} - \partial_m h_{jk}). \quad (3.20)$$

A curvatura extrínseca de uma hipersuperfície n -dimensional embutida num espaço $(n+1)$ -dimensional (no nosso caso temos uma hipersuperfície 3-dimensional alojada num espaço-tempo 4-dimensional) pode ser medida pelo tensor K_{ij} . Esse tensor é denominado de curvatura extrínseca e é um tensor de rank 2 simétrico, definido sobre a hipersuperfície n -dimensional. As componentes desse tensor são dadas pela derivada covariante, no espaço $(n+1)$ -dimensional, da normal n_i da hipersuperfície n -dimensional, logo,

$$K_{ij} = \nabla_j n_i. \quad (3.21)$$

Sabemos que a componente normal do campo vetorial \vec{dt} tem módulo dado por (3.5). Então desenvolvemos (3.21) e após certa manipulação, obtemos,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right), \quad (3.22)$$

onde o símbolo $|$ denota uma derivada covariante em relação a hipersuperfície onde está definido o vetor n_i , no nosso caso, a hipersuperfície espacial 3-dimensional.

Nosso objetivo é reescrever o escalar de curvatura da ação de Einstein-Hillbert,

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left({}^{(4)}R \right), \quad (3.23)$$

em função de quantidades equivalentes da hipersuperfície 3-dimensional, ou seja, sua curvatura intrínseca e extrínseca. Para isso, vamos usufruir das seguintes equações, denominadas de equações de Gauss-Codazzi [18, 21],

$${}^{(4)}R^m_{ijk} = {}^{(3)}R^m_{ijk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} \left(K_{ij} K^m_k - K_{ik} K^m_j \right), \quad (3.24)$$

$${}^{(4)}R^n_{ijk} = \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} {}^{(4)}R_{nijk} = -\frac{1}{n_\alpha n^\alpha} \left(K_{ij|k} - K_{ik|j} \right), \quad (3.25)$$

$${}^{(4)}R^{in}_{in} = (n_\alpha n^\alpha)^{-1} \left[K^2 - K_{ij} K^{ij} \right] - \left(n^\alpha n^\beta_{;\beta} \right)_{;\alpha} + \left(n^\alpha n^\beta_{;\alpha} \right)_{;\beta}, \quad (3.26)$$

onde $K = K^i_i = trK$.

Manipulando o escalar de curvatura em (3.23), obtemos a densidade Lagrangiana na seguinte forma,

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} \left[{}^{(4)}R^{ij}_{ij} + 2 {}^{(4)}R^{in}_{in} \right]. \quad (3.27)$$

De (3.24), temos,

$${}^{(4)}R^{ij}_{ij} = \left[{}^{(3)}R + (n_\alpha n^\alpha)^{-1} \left(K_{ij} K^{ij} - K^2 \right) \right], \quad (3.28)$$

assim, usando (3.26) e (3.28) em (3.27), resulta em

$$\mathcal{L}_G = {}^{(3)}R + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} \left[K^2 - K_{ij} K^{ij} \right] - 2 \left(n^\alpha n^\beta_{;\beta} \right)_{;\alpha} + 2 \left(n^\alpha n^\beta_{;\alpha} \right)_{;\beta}. \quad (3.29)$$

Vamos reescrever o elemento de volume da ação (3.23). Assim,

$$\sqrt{-g} d^4x = N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x. \quad (3.30)$$

Nessa última equação, temos do lado esquerdo um elemento de volume covariante, onde não é definida a direção da integração. No lado direito, temos um elemento de volume $h^{\frac{1}{2}} d^3x$ orientado na direção do vetor normal e tangencial a hipersuperfície espacial 3-dimensional. É necessário comentar que, caso essa modificação no elemento de volume não fosse feita, durante a integração de \mathcal{L}_G poderíamos correr o risco de considerar contribuições de

diferentes hipersuperfícies espaciais 3-dimensionais no mesmo instante de tempo, perdendo assim a dinâmica introduzida pelo formalismo ADM.

Para montar a ação (3.23) usando os resultados obtidos, comentamos que, na expressão (3.29), os dois últimos termos, $-2(n^\alpha n^\beta)_{;\alpha}{}_{;\beta}$ e $2(n^\alpha n^\beta)_{;\alpha}{}_{;\beta}$, são termos de derivadas totais e não contribuem para as equações de movimento. Quando integrados, originarão quantidades relacionadas a fronteiras tipo-espço e tipo-tempo. Considerar essas contribuições foge do escopo desse trabalho e portanto, vamos considerar que tais quantidades são nulas.

Tratando o vetor normal n^α normalizado como tipo-tempo, ($n^\alpha n_\alpha = -1$), a ação fica escrita da seguinte forma,

$$S = \frac{1}{16\pi} \int [{}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2] N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x + \int \mathcal{L}_M [\phi^A, h_{ij}, N_i, N] N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x \quad (3.31)$$

em que \mathcal{L}_M se refere a qualquer entidade não relacionada ao campo gravitacional, isto é matéria, gauge, etc. Munidos desse resultado, podemos procurar a sua forma Hamiltoniana.

Nosso espaço de fase será dado pelas variáveis dinâmicas h_{ij} e seus *momenta* canonicamente conjugados que representamos por Π^{ij} e são definidos como,

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ij}}, \quad (3.32)$$

onde \mathcal{L}_G é a densidade Lagrangiana obtida de (3.31). Computando essa operação, chegamos ao seguinte resultado [18],

$$\Pi^{ij} = \sqrt{h} (h^{ij} K - K^{ij}). \quad (3.33)$$

Já mencionamos que N e N^i não são quantidades dinâmicas da teoria. Isso pode ser verificado ao computarmos seus *momenta* canonicamente conjugados, que são nulos [21]. Isso significa que a teoria da relatividade geral é uma teoria com vínculos. Assim, ao escrevermos a Hamiltoniana correspondente a (3.31), teremos termos que dependerão das métricas h_{ij} das hipersuperfícies e de suas derivadas de primeira ordem que serão multiplicados por N e N^i . E somente nesses termos que haverá a presença da função lapso e do vetor deslocamento, por isso tais termos são considerados os vínculos da teoria e N e N^i são multiplicadores de Lagrange.

A densidade Hamiltoniana pode ser computada da seguinte maneira,

$$\mathcal{H}_G = \Pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_G, \quad (3.34)$$

e através de (3.31) e de (3.33), podemos chegar ao seguinte resultado,

$$\mathcal{H}_G = N \left[h^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ab} \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - h^{\frac{1}{2}(3)} R \right] + N_b \left[-2\Pi^a{}_{|a} \right] + 2 \left(2N_b \Pi^{ab} \right)_{|a}, \quad (3.35)$$

usando $\Pi = \Pi_a^a = \text{tr} \Pi$. A última parcela contribui somente na fronteira, então será descartada. Reescrevemos a Hamiltoniana na forma,

$$\mathcal{H}_G = N \left[G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}(3)} R \right] + N_j \left[-2\Pi^i{}_{,i} \right]. \quad (3.36)$$

Onde usamos a métrica do superspaço [21],

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{ij} h_{kl}), \quad (3.37)$$

que é dotada das seguintes simetrias,

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk} = G_{klij}. \quad (3.38)$$

Portanto, escrevemos a ação correspondente a densidade Hamiltoniana (3.36) da seguinte maneira,

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left[\Pi^{ij} \dot{h}_{ij} - N H_G - N_i H_G^i \right] dt d^3 x, \quad (3.39)$$

onde usamos que $H_G = G_{ijkl} \Pi^{ij} \Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}(3)} R$, denominado de superhamiltoniana e $H_G^j = -2\Pi^i{}_{,i}$ de supermomentum.

Podemos variar a ação (3.39) em relação a N e N_i e obtemos, respectivamente,

$$H_G = 0, \quad (3.40)$$

$$H_G^i = 0, \quad (3.41)$$

que representam, respectivamente, os vínculos da superhamiltoniana e do supermomentum. Além disso, essas equações são análogas as quatro equações de Einstein para o vácuo, isto é $R_{ab} = 0$ relacionadas as componentes temporais,

$$R_{00} = 0, \quad (3.42)$$

$$R_{0i} = 0. \quad (3.43)$$

Se variarmos em relação às variáveis dinâmicas, h_{ab} e Π_{ab} , obteremos as seguintes equações,

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta S_G}{\delta \Pi^{ab}} = 2h^{-\frac{1}{2}} N \left(\Pi_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} \Pi \right) + 2N_{(b|a)}, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{ab} = -\frac{\delta S_G}{\delta h_{ab}} = & -Nh^{\frac{1}{2}} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R h^{ab} \right) + \frac{1}{2} Nh^{-\frac{1}{2}} h^{ab} \left(\Pi_{cd} \Pi^{cd} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \\
& - 2Nh^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ac} \Pi^b{}_c - \frac{1}{2} \Pi \Pi^{ab} \right) + h^{\frac{1}{2}} \left(N^{[b|a} - h^{ab} N^{|c}{}_{|c} \right) \\
& + h^{\frac{1}{2}} \left(h^{-\frac{1}{2}} N^c \Pi^{ab} \right)_{|c} - 2\Pi^c ({}^a N^b)_{|c},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

que representam as outras seis equações de Einstein para o vácuo.

Podemos contabilizar o número de equações diferenciais na teoria da seguinte forma: dez equações vindas de (2.35), sendo quatro equações vínculos, logo, seis equações dinâmicas de segunda ordem. Ao escrevermos o relatividade geral no formalismo hamiltoniano, que duplica o número de equações diferenciais ao mesmo tempo que reduz sua ordem, teremos doze equações dinâmicas, sendo que seis delas vem de (3.44), para \dot{h}_{ab} , e outras seis vindas de (3.45), para $\dot{\Pi}^{ab}$.

Se considerarmos outros campos, distintos do campo gravitacional, digamos, um campo ϕ^A , a ação total fica da seguinte forma,

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left[\Pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \Pi_{\phi^A} \dot{\phi}^A - NH - N_i H^i \right] dt d^3x, \tag{3.46}$$

onde Π_{ϕ^A} é o momento canonicamente conjugado a ϕ^A , que pode ser calculado variando a Lagrangiana \mathcal{L}_M , referente a matéria em relação a ϕ^A . Além disso, H e H^i são dados, respectivamente por,

$$H = H_G + H_M, \tag{3.47}$$

$$H^i = H_G^i + H_M^i, \tag{3.48}$$

onde H_M é a superhamiltoniana e H_M^i o supermomentum, para a matéria. Igualando essas últimas equações a zero, pode-se encontrar os vínculos para o caso com a matéria.

3.3 FORMALISMO DE SCHUTZ

Como já mencionamos, o formalismo desenvolvido por Bernard F. Schutz consiste em tratar a matéria presente no Universo como um fluido perfeito relativístico, descrito em função de potenciais-velocidades, de forma que a pressão do fluido seja a densidade Lagrangiana, e a partir dessa densidade, podemos obter as equações dinâmicas de um fluido perfeito. Para isso, o primeiro passo é tratar das propriedades termodinâmicas desse fluido.

Consideramos um fluido perfeito composto por bárions, ou seja, o número N de partículas é sempre conservado, mas sua massa total não necessariamente. Definindo a

massa de repouso do fluido como $m_H N$, onde m_H é a massa do Hidrogênio no estado fundamental, a energia interna do fluido será dada como

$$U = E - m_H N, \quad (3.49)$$

onde E é a massa total.

Dividindo (3.49) por $V m_h N$, onde V é o volume ocupado pelo fluido, então,

$$\rho = \rho_0(1 + \tilde{U}), \quad (3.50)$$

onde $\rho = \frac{E}{V}$ é a densidade de bárions, $\rho_0 = \frac{m_H N}{V}$ é a densidade de massa de repouso dos bárions e $\tilde{U} = \frac{U}{m_H N}$ é a energia interna por unidade de massa de repouso.

A primeira Lei da Termodinâmica é dada como,

$$dQ = dU + p dV, \quad (3.51)$$

dividimos por $m_h N$ e então,

$$d\tilde{U} = dq - p d\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (3.52)$$

onde definimos $dq = \frac{dQ}{m_H N}$, dada como energia por unidade de massa de repouso.

Usando a relação entre energia interna por unidade de massa de repouso \tilde{U} , entropia específica S e temperatura T , escrevemos,

$$d\tilde{U} = dq - p d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = T dS. \quad (3.53)$$

Definimos a entalpia μ como,

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} = 1 + \tilde{U} + \frac{p}{\rho_0}, \quad (3.54)$$

onde p é a pressão do fluido, e por este se tratar de um fluido perfeito, podemos escrever sua equação de estado mais geral possível da seguinte forma,

$$p = \omega \rho \quad (3.55)$$

onde ω é a constante que caracteriza o tipo de fluido.

Usando (3.55) e (3.50) em (3.53) chegamos a seguinte equação,

$$(1 + \tilde{U}) d[\ln(1 + \tilde{U}) - \omega \ln \rho_0] = T dS, \quad (3.56)$$

onde identificamos as seguintes quantidades,

$$T = 1 + \tilde{U} \quad (3.57)$$

e

$$S = \ln(1 + \bar{U}) - \omega \ln \rho_0. \quad (3.58)$$

Reescrevendo a equação (3.58), chegamos a

$$\rho_0 = (1 + \tilde{U})^{\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.59)$$

Substituindo (3.50), (3.54) e (3.55) na equação acima, obtemos o seguinte resultado,

$$p = \omega \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{1 + \frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.60)$$

Uma vez escrita a expressão da pressão em função da entalpia μ e da entropia S , seremos capazes de realizar uma formulação consistente da 4-velocidade do fluido perfeito em função de potenciais-velocidade, como prescreve o formalismo de Schutz [27].

Tomando o tensor-energia momento,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (3.61)$$

onde U^ν é dado como [27],

$$U_\nu = \mu^{-1} (\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}) \quad (3.62)$$

com ζ e β potenciais relacionados a rotações do fluido, e portanto serão desconsiderados uma vez que estamos adotando a simetria isotrópica do Princípio Cosmológico. ϕ e θ são parâmetros sem um significado físico claro.

Com a ajuda de (3.54), (3.61) fica na forma,

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \mu U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (3.63)$$

Usando a condição de normalização da 4-velocidade, $U^\nu U_\nu = -1$, obtemos uma relação entre as componentes da métrica e os potenciais velocidade. Ela é,

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu} (\phi_{,\sigma} + \zeta\beta_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma}) (\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (3.64)$$

A ação de Schutz é escrita na forma [27],

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 16\pi p), \quad (3.65)$$

e fazemos sua variação em relação a métrica $g^{\mu\nu}$, para obter as equações de Einstein acopladas a um fluido perfeito. Logo,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left\{ \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + 16\pi \frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} = 0, \quad (3.66)$$

que nos leva à,

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g}, \quad (3.67)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}pg_{\mu\nu}\sqrt{-g} + \frac{\delta p}{\delta\mu} \frac{\delta\mu}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g}. \quad (3.68)$$

A partir da primeira Lei da Termodinâmica, de (3.53) e com a ajuda de (3.54), pode-se obter uma expressão para $\frac{\delta p}{\delta\mu}$. Para a parcela $\frac{\delta\mu}{\delta g^{\mu\nu}}$, usamos (3.64). Assim,

$$\frac{\delta p}{\delta\mu} = \frac{\rho + p}{\mu} \quad (3.69)$$

e

$$\frac{\delta\mu}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\mu}{2}U_\mu U_\nu. \quad (3.70)$$

Munidos dos resultados (3.67)-(3.70), chegamos as equações de Einstein acoplados a um fluido perfeito,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi (pg_{\mu\nu} + \rho_0\mu U_\mu U_\nu) = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.71)$$

3.4 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DA RELATIVIDADE GERAL ACOPLADA A UM FLUIDO PERFEITO

Nessa seção, usaremos a formulação de ADM juntamente com o formalismo de Schutz para escrever uma função Hamiltoniana relativa ao Universo de FLRW. Assim, usando a expressão para o intervalo invariante sob o formalismo ADM (3.11) na métrica de FLRW (2.41), obtemos,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (3.72)$$

De forma que podemos escrever a parte gravitacional da ação (3.31), na presença de uma constante cosmológica Λ , da seguinte maneira,

$$S_G = \eta \int dt \left(-\frac{6\dot{a}^2 a}{N} + 6kNa - 2\Lambda Na^3 \right), \quad (3.73)$$

onde η é um constante proveniente da integração da parte espacial da ação. Dessa expressão podemos computar a Lagrangiana da parte geométrica na seguinte forma,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN - 2\Lambda Na^3. \quad (3.74)$$

Fazemos o mesmo procedimento para a parte da matéria na ação (3.65), resultando em,

$$\mathcal{S}_M = 16\pi \int dt d^3x N h^{\frac{1}{2}} p = \xi \int dt N a^3 p, \quad (3.75)$$

onde ξ é uma constante vinda da integração da parte espacial da ação.

A partir de (3.64), implementando $\zeta = \beta = 0$, a seguinte relação pode ser encontrada,

$$\mu = \left[-g^{00} (\phi_{,0} + \theta S_{,0})^2 \right]^{1/2} = \frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N} \quad (3.76)$$

A ação (3.75) fica na forma,

$$S_M = \xi \int dt \left[N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 \omega \frac{(\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\omega}}}{(\omega + 1)^{\frac{1}{\omega}+1}} e^{-\frac{S}{\omega}} \right], \quad (3.77)$$

onde usamos (3.60), (3.55) e (3.76) em (3.75). Assim, a densidade Lagrangiana referente a essa ação é,

$$\mathcal{L}_M = N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 \omega \frac{(\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\omega}}}{(\omega + 1)^{\frac{1}{\omega}+1}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.78)$$

Para construir a Hamiltoniana, precisamos computar os momento canonicamente conjugado às variáveis dinâmicas a , ϕ e S . Assim,

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N}, \quad (3.79)$$

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \dot{\phi}} = N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{-\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}, \quad (3.80)$$

$$P_S = \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \dot{S}} = \theta P_\phi \quad (3.81)$$

Assim, o único momento independente respectivo à matéria é P_ϕ . A Hamiltoniana para esse modelo é dada através de,

$$\mathcal{H} = \sum \dot{q}_i P_i - \mathcal{L}, \quad (3.82)$$

q_i e P_i são as variáveis dinâmicas e seus momentos canonicamente conjugados, respectivamente. Logo,

$$\mathcal{H} = -N \frac{P_a^2}{12a} + N P_\phi^{\omega+1} a^{-3\omega} e^S (-\omega)^\omega - 3Nka + N\Lambda a^3. \quad (3.83)$$

Nessa última equação, vamos aplicar as seguintes transformações canônicas,

$$T = -P_S e^{-S} P_\phi^{-(\omega+1)}, \quad (3.84)$$

$$P_T = P_\phi^{\omega+1} e^S, \quad (3.85)$$

$$\bar{\phi} = \phi - (\omega + 1) \frac{P_S}{P_\phi}, \quad (3.86)$$

$$\bar{P}_\phi = P_\phi. \quad (3.87)$$

Que nos leva a Hamiltoniana na seguinte forma,

$$\mathcal{H} = -N \frac{P_a^2}{12a} + N \frac{P_T}{a^{3\omega}} - 6Nka + N\Lambda a^3. \quad (3.88)$$

De acordo com o que foi visto na seção 3.2, obtemos o vínculo da superhamiltoniana (3.40),

$$\mathcal{H} = NH_G = -N \left(\frac{P_a^2}{12a} + \frac{P_T}{a^{3\omega}} - 6ka + \Lambda a^3 \right) = 0, \quad (3.89)$$

que é a equação de Friedmann na presença de constante cosmológica Λ .

Terminamos a seção comentando que a descrição Hamiltoniana desse sistema é dada pelo espaço de fase composto pelas variáveis $a(t)$ e $T(t)$ e seus respectivos *momenta* canonicamente conjugados, P_a e P_T . Sendo $a(t)$ o fator de escala e $T(t)$ a variável introduzida pelo formalismo de Schutz, carregando as informações do fluido perfeito. Graças ao Princípio Cosmológico, $a(t)$, $T(t)$, $P_a(t)$, $P_T(t)$ e $N(t)$ só possuem dependência temporal. Nas seções e capítulos que seguem, tal dependência será omitida, simplesmente para fins de simplificação.

3.5 FORMALISMO SIMPLÉTICO

Anteriormente mencionamos que Dirac e Bergmann fizeram um progresso considerável no estudo da generalização dos sistemas vinculados. Dentre esses desenvolvimentos, um dos resultados é o que chamamos de algoritmo de Dirac-Bergmann.

Um sistema vinculado, quando quantizado canonicamente, leva a inconsistências nas relações de comutação dos operadores. O algoritmo de Dirac-Bergmann se encarrega de lidar com os vínculos de forma a substituir os usuais parênteses de Poisson pelos novos parênteses de Dirac e essas quantidades sim que devem ser consideradas no processo de quantização.

Posteriormente, o formalismo simplético, também chamado de formalismo de Faddeev-Jackiw, foi desenvolvido por L. Faddeev e R. Jackiw [29] e é uma alternativa ao formalismo de Dirac-Bergmann para lidar com os vínculos da teoria. Nele, os vínculos são tratados como graus de liberdade supérfluos e são eliminados. No entanto, isso nem sempre é possível. Devido a isso, J. Barcelos-Neto e C. Wotzasek desenvolveram o formalismo para se incluir no espaço de fase da teoria os vínculos e assim a teoria poderia ser corretamente quantizada [30].

Nessa seção, faremos uma introdução ao método simplético e no capítulo em seguida aplicaremos ao caso da relatividade geral, juntamente com os resultados das seções anteriores, para induzir a não comutatividade nesse modelo. Uma revisão detalhada desse formalismo pode ser encontrada em [31].

3.5.1 Notação simplética

Antes de discorrer sobre o formalismo em si, vale a pena introduzir algumas notações específicas. Nossas variáveis dinâmicas serão representadas por y^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n, n + 1, \dots, 2n$), isto é,

$$y^\alpha = \begin{cases} q_i, & \text{para } \alpha = 1, 2, \dots, n \\ p_i, & \text{para } \alpha = n + 1, n + 2, \dots, 2n \end{cases} \quad (3.90)$$

Aqui q_i são coordenadas generalizadas e p_i são os *momenta* conjugados a elas. Assim, os parênteses de Poisson se reduzem a,

$$\{y^\alpha, y^\beta\} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial y^{i+n}} - \frac{\partial y^\beta}{\partial y^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial y^{i+n}} = \epsilon^{\alpha\beta}. \quad (3.91)$$

onde $\epsilon^{\alpha\beta}$ é o elemento da matriz simplética, dado como

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Donde $0_{n \times n}$ é a matriz nula $n \times n$ e $I_{n \times n}$ a matriz identidade $n \times n$. Para obter os parênteses de Poisson de duas quantidades $A(y)$ e $B(y)$ basta efetuar,

$$\{A(y), B(y)\} = \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial y^\alpha} \frac{\partial B}{\partial y^\beta}. \quad (3.93)$$

É interessante notar que no caso sem vínculos, $\epsilon^{\alpha\beta}$ é invertível, e age como o tensor métrico do espaço simplético.

3.5.2 O formalismo simplético para sistemas vinculados

Para o nosso caso, o formalismo simplético com vínculos, generalizamos a matriz $\epsilon^{\alpha\beta}$ como um tensor antissimétrico $f^{\alpha\beta}$, dado como,

$$\{y^\alpha, y^\beta\} = f^{\alpha\beta}. \quad (3.94)$$

O objetivo desse método é tratar a Lagrangiana do sistema com o objetivo final de obter (3.94) a partir da Lagrangiana, pois dessa quantidade podem ser obtidos os parênteses de Poisson e deles as equações de Hamilton podem ser facilmente computadas. Assim, considere a seguinte Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = A_{y^\alpha} \dot{y}^\alpha - V(y). \quad (3.95)$$

Onde y^α são as variáveis dinâmicas, A_{y^α} são *momenta* associados a y^α e $V(y)$ é chamado de potencial simplético,

Sabendo que as equações de Euler-Lagrange são dadas como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\alpha} = 0, \quad (3.96)$$

obtemos,

$$\frac{\partial A_{y^\alpha}}{\partial y^\beta} \dot{y}^\alpha - \frac{\partial V(y)}{\partial y^\beta} - \frac{d}{dt} (A_{y^\beta}(y)) = 0. \quad (3.97)$$

E então,

$$f_{\alpha\beta} \dot{y}^\beta = \partial_\alpha V(y), \quad (3.98)$$

onde definimos,

$$f_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_{y^\beta} - \partial_\beta A_{y^\alpha}. \quad (3.99)$$

Se supormos que os A_{y^α} sejam tais que $\det(f_{\alpha\beta}) \neq 0$ então não há vínculos na teoria e podemos facilmente obter $f^{\alpha\beta}$ invertendo $f_{\alpha\beta}$, pois

$$f_{\alpha\beta} f^{\beta\sigma} = \delta^\sigma_\alpha. \quad (3.100)$$

e assim encontrar os parênteses de Poisson da teoria.

Para nós $\det(f_{\alpha\beta})$ pode ser nulo. Sendo esse o caso, denotamos essa quantidade $f_{\alpha\beta}^{(0)}$, tensor simplético de ordem 0, e ela terá M ($M < 2N$) modos zeros $v_m^{(0)}$ ($m = 1, 2, \dots, M$), de forma que

$$f_{mn}^{(0)} v_n^{(0)} = 0. \quad (3.101)$$

Utilizamos essa equação (3.101) na equação (3.98) e dela obtemos a condição,

$$v_m^{(0)} \partial_m V = 0. \quad (3.102)$$

Essa equação pode ser um vínculo. Vamos supor que assim seja e o denotamos por $\Omega_m^{(0)}$. Portanto, o método prediz que esse vínculo deve ser inserido na parte cinética da Lagrangiana através da derivada temporal de um multiplicador de Lagrange $\lambda_m^{(0)}$. Dessa forma, podemos causar uma "deformação" do tensor simplético $f_{\alpha\beta}$, alargando o espaço de configurações da teoria.

Assim, a Lagrangiana se torna,

$$\mathcal{L}^{(1)} = A_{y^\alpha}^{(0)} \dot{y}^\alpha + \lambda_m^{(0)} \Omega_m^{(0)} - V(y). \quad (3.103)$$

As variáveis dinâmicas se tornam $(y^\alpha, \lambda_m^{(0)})$. Que por sua vez definem um novo tensor simplético, agora de primeira ordem, $f_{\alpha\beta}^{(1)}$, que pode ser computado através de (3.99), a partir dessas novas variáveis.

Logo, se $\det(f_{\alpha\beta}^{(1)}) \neq 0$ então os vínculos da teoria foram devidamente eliminados e os parênteses de Poisson podem ser obtidos a partir do tensor simplético. Caso contrário, o processo deve ser repetido até que essa condição seja verdadeira.

No entanto, podem existir casos onde $\det(f_{\alpha\beta}^{(1)}) = 0$, mas novos vínculos não são obtidos a partir dos modos zeros correspondentes. Isso significa que a teoria sendo tratada possui simetria de calibre e devemos fixar tal calibre na Lagrangiana de ordem zero e dela então obter o tensor simplético. Esse será o caso para a relatividade geral, como veremos no capítulo seguinte ao aplicarmos esse formalismo para induzir as não comutatividades.

4 MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO COMUTATIVOS VIA METÓDO SIMPLÉTICO

Nessa seção propomos utilizar o formalismo simplético para obter um fator de escala não comutativo $a(t)$.

Isto é, a partir de uma função Lagrangiana \mathcal{L} escrita em função das suas variáveis simpléticas, iremos procurar os vínculos presentes na teoria e, nesse caso obter uma teoria consistente fixando o calibre. Através de parênteses de Poisson deformados, introduzimos as não comutatividades da forma mais geral possível e computamos a matriz $f^{\alpha\beta}$ e dela obtemos uma Lagrangiana não comutativa. Dessa função Lagrangiana calculamos a Hamiltoniana correspondente e derivamos um fator de escala $a(t)$ não comutativo.

Logo, usando a Hamiltoniana (3.88) do capítulo anterior, podemos obter a Lagrangiana de ordem zero $\mathcal{L}^{(0)}$, como,

$$\mathcal{L}^{(0)}(y^\alpha, y^{\dot{\alpha}}) = y^\alpha A_{y^\alpha} - \mathcal{H}(y^\alpha, A_{y^\alpha}) = \dot{a}P_a + \dot{T}P_T - \mathcal{H}(a, P_a, T, P_T). \quad (4.1)$$

Ou seja,

$$\mathcal{L}^{(0)}(y^\alpha, y^{\dot{\alpha}}) = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} - V(a, P_a, T, P_T). \quad (4.2)$$

Sendo,

$$V(a, P_a, T, P_T) = N\Omega = N \left(-\frac{P_a^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + P_T a^{-3\omega} \right) \quad (4.3)$$

Logo, vemos que as variáveis simpléticas do problema são

$$y^\alpha = (a, P_a, T, P_T, N). \quad (4.4)$$

O que nos permite escrever a seguinte matriz simplética,

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Cujos elementos foram definidos a partir de (3.99), isto é,

$$f_{y^\beta y^\alpha} = \frac{\partial A_{y^\alpha}}{\partial y^\beta} - \frac{\partial A_{y^\beta}}{\partial y^\alpha}. \quad (4.6)$$

Agora, note que a matriz (4.5) é singular, assim devemos encontrar o modo-zero dessa matriz e então extrair um novo vínculo, para então esse ser implementado no espaço de configuração da teoria. Segue que o modo-zero é dado como,

$$\nu^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Através de (3.102) encontramos o seguinte vínculo,

$$\sum_{i=1}^5 \nu_i \frac{\partial V}{\partial y^i} = \nu_N \frac{\partial V}{\partial N} = \Omega. \quad (4.8)$$

Agora, introduzimos tal vínculo em (4.2) e obtemos uma Lagrangiana de ordem 1 na seguinte forma,

$$\mathcal{L}^{(1)} = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} + \Omega \mu - V(a, P_a, T, P_T). \quad (4.9)$$

Continuando a prescrição do formalismo simplético, agora deduzimos os novos momentos canonicamente conjugados das variáveis simpléticas,

$$A_a = P_a, \quad (4.10) \quad A_{P_a} = 0, \quad (4.11)$$

$$A_T = P_T, \quad (4.12) \quad A_{P_T} = 0, \quad (4.13)$$

$$A_N = 0, \quad (4.14) \quad A_\mu = \Omega. \quad (4.15)$$

E usando (4.6) podemos obter uma nova matriz simplética,

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & 0 & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Mais uma vez, essa matriz é singular, o que implica que ainda existem vínculos na teoria. Encontramos o modo-zero dessa matriz na seguinte forma,

$$\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & \frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Assim, usamos o mesmo procedimento para encontrar o vínculo, que fica na forma,

$$\sum_{i=1}^6 \nu_i \frac{\partial V^{(1)}}{\partial y^\alpha} = -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} N \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial a} N \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} + \Omega = \Omega \quad (4.18)$$

Encontramos exatamente o mesmo vínculo do que na equação (4.8). Isso denota uma simetria de calibre, que segundo o método simplético deve ser tratada na Lagrangiana de ordem 0 (4.2). Introduzimos um termo de fixação de calibre Σ em (4.2), daí,

$$\mathcal{L}^{(0)} = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} + \Sigma \dot{\eta} - N\Omega, \quad (4.19)$$

sendo,

$$\Sigma = N - 1 \quad (4.20)$$

Isto é, identificamos a função lapso N como 1, que é equivalente a escolha de um tempo físico.

Feito isso, então podemos calcular os novos *momenta* canonicamente conjugados como,

$$A_a = P_a, \quad (4.21) \quad A_{P_a} = 0, \quad (4.22)$$

$$A_T = P_T, \quad (4.23) \quad A_{P_T} = 0, \quad (4.24)$$

$$A_N = 0, \quad (4.25) \quad A_\eta = \Sigma. \quad (4.26)$$

Encontramos a matriz simplética como,

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Como essa matriz é não-singular, sua inversa nos dá origem aos parênteses de Poisson. A partir dela podemos introduzir não comutatividades, propondo parênteses de Poisson deformados, isto é,

$$\{a, T\} = \sigma, \quad (4.28)$$

$$\{T, P_a\} = \chi, \quad (4.29)$$

$$\{a, P_T\} = \gamma, \quad (4.30)$$

$$\{P_a, P_T\} = \alpha. \quad (4.31)$$

E ainda

$$\{a, P_a\} = \{T, P_T\} = 1. \quad (4.32)$$

onde α , γ , χ e σ são chamados de parâmetros não comutativos. É interessante notar que esse é o caso mais geral possível de não comutatividade entre as variáveis dinâmicas presentes.

Usando (4.6), matriz se torna,

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sigma & \gamma & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\chi & \alpha & 0 & 0 \\ -\sigma & \chi & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Computamos a sua inversa, que fica na forma

$$[f^{(0)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha & -\chi & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma & -\sigma & 0 & 0 \\ \alpha & -\gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \chi & \sigma & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.34)$$

onde

$$\Gamma = \alpha\sigma + \gamma\chi - 1 \neq 0. \quad (4.35)$$

Sabemos da expressão (3.94), que cada componente da matriz simplética é dado como um parênteses de Poisson enquanto a expressão (3.99) é definida a partir dos A_{ξ^i} . Isso nos leva a um sistema de equações diferenciais acopladas dos *momenta* conjugados às variáveis dinâmicas da teoria. Nominalmente,

$$\frac{\partial A_{P_a}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_a} = \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.36) \quad \frac{\partial A_T}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial T} = \frac{\alpha}{\Gamma}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_T} = \frac{\chi}{\Gamma}, \quad (4.38) \quad \frac{\partial A_T}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial T} = \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_T} = -\frac{\sigma}{\Gamma}, \quad (4.40) \quad \frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial P_T} = \frac{1}{\Gamma}. \quad (4.41)$$

E ainda,

$$\frac{\partial A_\eta}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \eta} = 1. \quad (4.42)$$

Podemos escrever a Lagrangiana não comutativa da forma mais geral possível na seguinte forma,

$$\mathcal{L} = A_a \dot{a} + A_{P_a} \dot{P}_a + A_T \dot{T} + A_{P_T} \dot{P}_T + A_\eta \dot{\eta} + A_N \dot{N} - N\Omega. \quad (4.43)$$

Agora devemos resolver o sistema de equações (4.36)-(4.42), de forma que não haja termos de ordens superiores nas velocidades. Para isso usamos uma condição extra: os *momenta* A_{ξ_i} conjugados só podem depender linearmente das variáveis dinâmicas (4.4). Isto é,

$$A_a(P_a, T, P_T) = bP_a + cT + dP_T, \quad (4.44)$$

$$A_{P_a}(a, T, P_T) = ea + fT + gP_T, \quad (4.45)$$

$$A_T(a, P_a, P_T) = ha + iP_a + jP_T \quad (4.46)$$

$$A_{P_T}(a, P_a, T) = ka + lP_a + mT \quad (4.47)$$

$$A_N(\varepsilon) = n\varepsilon, \quad (4.48)$$

$$A_n(N) = oN + p. \quad (4.49)$$

Onde $b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o$ e p são constantes que devemos determinar. Após os cálculos para a solução do sistema nessas condições, obtemos o seguinte resultado,

$$A_a = \frac{1}{\Gamma} (P_a + 2\alpha T + 2\chi P_T) \quad (4.50)$$

$$A_{P_a} = \frac{1}{\Gamma} (2a + \gamma T) \quad (4.51)$$

$$A_T = \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + 2\gamma P_a + P_T) \quad (4.52)$$

$$A_{P_T} = \frac{1}{\Gamma} (\chi a + 2T) \quad (4.53)$$

$$A_N = \eta \quad (4.54)$$

$$A_\eta = 2N - 1 \quad (4.55)$$

Assim, a Lagrangiana não comutativa (4.43) se torna, considerando apenas as contribuições de primeira ordem nos parâmetros não comutativos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{nc} &= \frac{1}{\Gamma} (P_a + 2\alpha T + 2\chi P_T) \dot{a} + \frac{1}{\Gamma} (2a + \gamma T) \dot{P}_a \\ &+ \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + 2\gamma P_a + P_T) \dot{T} + \frac{1}{\Gamma} (\chi a + 2T) \dot{P}_T \\ &+ (2N - 1)\dot{\eta} - N\Omega.\end{aligned}\quad (4.56)$$

Pode-se ainda reescrever essa expressão sem os termos em segunda ordem das velocidades. Isso é feito a partir de integrações por partes. Ao fazermos tais operações chegamos na seguinte forma para a Lagrangiana acima,

$$\mathcal{L}_{nc} = \tilde{P}_a \dot{a} + \tilde{P}_T \dot{T} + (2N - 1)\dot{\eta} - N\Omega, \quad (4.57)$$

onde usamos as seguintes transformações,

$$\tilde{P}_a = \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T), \quad (4.58)$$

$$\tilde{P}_T = \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T), \quad (4.59)$$

$$\tilde{a} = a, \quad (4.60)$$

$$\tilde{T} = T. \quad (4.61)$$

Utilizamos essas transformações, visto que essas quantidades satisfazem os parenteses de Poisson usuais. Dessa forma, a não comutatividade é descrita inteiramente pelos parâmetros α , γ , χ e σ . Além disso, é interessante observar que essas transformações foram deduzidas de (4.57), isso significa que o formalismo de Faddeev-Jackiw induz, de forma natural, um conjunto de variáveis comutativas. De (4.60) e (4.61), vemos que

$$\{\tilde{a}, \tilde{T}\} = \{a, T\} = \sigma. \quad (4.62)$$

Essa igualdade só pode ser satisfeita se $\sigma = 0$. Com isso a quantidade Γ se reduz a $\Gamma = \chi\gamma - 1$.

Finalmente, podemos calcular a Hamiltoniana correspondente a Lagrangiana (4.57) usando a condição de fixação de calibre $N = 1$ e em primeira ordem dos parâmetros não comutativos, que fica na seguinte forma,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{-1}{12a} \left(\tilde{P}_a + \chi \tilde{P}_T + 2\alpha \tilde{T} \right)^2 - 3ka + \Lambda a^3 + \frac{\left(\tilde{P}_T + \gamma \tilde{P}_a + \alpha a \right)}{a^{3\omega}}, \quad (4.63)$$

Munidos de (4.63), podemos obter as equações de movimento,

$$\dot{a} = \{a, \tilde{\mathcal{H}}\} = \frac{-1}{6a} (\tilde{P}_a + \chi\tilde{P}_T + 2\alpha T) + \gamma a^{-3\omega}, \quad (4.64)$$

$$\dot{\tilde{P}}_a = \{\tilde{P}_a, \tilde{\mathcal{H}}\} = -\frac{1}{12a^2} (\tilde{P}_a + \chi\tilde{P}_T + 2\alpha T)^2 + 3k - 3\Lambda a^2 + 3\omega (\tilde{P}_T + \gamma\tilde{P}_a) a^{-1-3\omega} - \alpha(1-3\omega)a^{-3\omega}, \quad (4.65)$$

$$\dot{T} = \{T, \tilde{\mathcal{H}}\} = \frac{-\chi}{6a} (\tilde{P}_a + \chi\tilde{P}_T + 2\alpha T) + a^{-3\omega}, \quad (4.66)$$

$$\dot{\tilde{P}}_T = \{\tilde{P}_T, \tilde{\mathcal{H}}\} = \frac{\alpha}{3a} (\tilde{P}_a + \chi\tilde{P}_T + 2\alpha T). \quad (4.67)$$

Essas quatro expressões definem um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares acopladas. Para encontrar as equações de Friedmann não comutativas, é necessário desacoplar o sistema e, caso necessário, resolver equações que envolvam $T, \tilde{P}_a, \tilde{P}_T$.

Assim, multiplicando a equação (4.64) por 2α e somando o resultado a (4.67), e eliminando termos de ordem superior a 1 nos parâmetros não comutativos, chegamos à

$$2\alpha\dot{a} + \dot{\tilde{P}}_T = 0. \quad (4.68)$$

E realizando uma integração em relação a t , obtemos que,

$$\tilde{P}_T = C - 2\alpha a. \quad (4.69)$$

Onde C é uma constante positiva relacionada a energia inicial do fluido.

Vamos agora apresentar algumas expressões úteis no desacoplamento do sistema. Derivamos a equação (4.64) em relação a t ,

$$\ddot{a} = \frac{-1}{6a} (\dot{\tilde{P}}_a + \chi\dot{\tilde{P}}_T + 2\alpha\dot{T}) - \frac{\dot{a}^2}{a} + \gamma\dot{a}a^{-1-3\omega} - 3\omega\gamma\dot{a}a^{-1-3\omega}. \quad (4.70)$$

Ainda da equação (4.64), temos a seguinte relação,

$$\tilde{P}_a = -\chi\tilde{P}_T - 2\alpha T - 6a\dot{a} + 6\gamma a^{1-3\omega}. \quad (4.71)$$

Uma outra expressão útil para o desacoplamento das equações é elevar ao quadrado a equação (4.64),

$$\dot{a}^2 = \frac{1}{36a^2} (\tilde{P}_a^2 + 2\chi\tilde{P}_a\tilde{P}_T + 4\alpha\tilde{P}_aT) - \frac{\gamma a^{-1-3\omega}\tilde{P}_a}{3}. \quad (4.72)$$

Assim, munidos de (4.69),(4.71) e (4.72), introduzimos na equação (4.70) e obtemos uma equação envolvendo somente $a(t)$ e suas derivadas.

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \Lambda - \omega C a^{-3-3\omega} + \alpha a^{-2-3\omega} \left(\omega - \frac{1}{3}\right). \quad (4.73)$$

É importante notar que nessa equação os parâmetros γ e χ não estão presentes. Todos os termos de ordem superiores nos parâmetros não comutativos foram eliminados, enquanto os termos de ordem igual a 1 foram naturalmente eliminados durante o desacoplamento da equação.

Podemos igualar (4.63) a zero, e usando (4.69),(4.70),(4.71) e (4.72) obter a equação de Friedmann não comutativa,

$$-\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{C a^{-3-3\omega}}{3} - \frac{\alpha a^{-2-3\omega}}{3} = 0. \quad (4.74)$$

Comparando as equações (4.73) e (4.74) com os resultados de [8], vemos que mesmo generalizando os parâmetros não comutativos entre as variáveis dinâmicas, obtemos exatamente as mesmas equações. Isso significa que o método simplético não gera soluções inéditas ou distintas da literatura, no regime de primeira ordem dos parâmetros. As análises das soluções de (4.73) e (4.74) foram estudadas em detalhes em [8].

No capítulo seguinte não usaremos o formalismo de Faddeev-Jackiw para induzir a não comutatividade. Faremos a proposta dos mesmos parênteses de Poisson deformados, tais como mostrados nas equações (5.3)-(5.7), e utilizando transformações entre variáveis comutativas e não comutativas, reescreveremos a Hamiltoniana (3.88) na presença dos parâmetros não comutativos. Isso nos resultará em equações diferentes de (4.73) e (4.74), isto é, com a presença dos quatro parâmetros não comutativos. O que nos possibilitará analisar modelos distintos dos apresentados na literatura.

5 MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO COMUTATIVOS ACOPLADOS A UM FLUIDO DE RADIAÇÃO

5.1 COSMOLOGIA NÃO COMUTATIVA ACOPLADA A UM FLUIDO PERFEITO

No capítulo anterior, usamos o formalismo simplético para introduzir não comutatividades em (3.88) e induzir as transformações (4.58)-(4.61) que relacionam variáveis comutativas com parâmetros não comutativos, resultando num modelo já estudado em [8]. Nesse capítulo, nossa abordagem será diferente uma vez que o formalismo simplético é incapaz de introduzir parâmetros não comutativos gerais, por isso usaremos o método similar ao descrito em [32] e [33]

Tomamos que as variáveis dinâmicas que compõe o espaço de fase da teoria são não comutativas, mas considerando que a forma da Hamiltoniana (3.88) permanece a mesma. Além disso, parênteses de Poisson deformados (na mesma forma de (4.28)-(4.32)) são introduzidos. Então uma transformação que relaciona variáveis comutativas com parâmetros não comutativos é usada para descrever o modelo em função das quantidades comutativas e dos parâmetros não-comutativos. Tais transformações satisfazem, em primeira ordem, os parênteses de Poisson deformados e podem ser reduzidas aos casos de [32] e [33] caso alguns dos parâmetros não comutativos forem considerados nulos.

Com essa abordagem, obtemos equações dinâmicas na presença de quatro parâmetros não comutativos e procedemos para estudar a dinâmica do fator de escala nesse contexto, variando os diversos parâmetros presentes.

Para tanto, primeiramente consideramos a Hamiltoniana referente ao universo de FLRW acoplada a um fluido perfeito, (3.88), obtida no capítulo 3,

$$\mathcal{H} = -N \frac{P_a^2}{12a} + N \frac{P_T}{a^{3\omega}} - 6Nka + N\Lambda a^3. \quad (5.1)$$

Nessa equação, propomos que suas variáveis dinâmicas sejam não comutativas ao passo que a forma da Hamiltoniana permanece inalterada. Portanto,

$$\mathcal{H}_{nc} = -N \frac{P_{a_{nc}}^2}{12a_{nc}} + N \frac{P_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\omega}} - 6Nka_{nc} + N\Lambda a_{nc}^3. \quad (5.2)$$

Simultaneamente, tais variáveis dinâmicas agora satisfazem os seguintes parênteses de Poisson deformados,

$$\{a_{nc}, T_{nc}\} = \sigma, \quad (5.3)$$

$$\{T_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \chi, \quad (5.4)$$

$$\{a_{nc}, P_{T_{nc}}\} = \gamma, \quad (5.5)$$

$$\{P_{a_{nc}}, P_{T_{nc}}\} = \alpha, \quad (5.6)$$

e ainda,

$$\{a_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{T_{nc}}\} = 1. \quad (5.7)$$

Denominamos α , γ , χ e σ de parâmetros não comutativos. Reiteramos que esse é o caso mais geral possível de não comutatividade entre as variáveis dinâmicas desse modelo. Tais parâmetros serão tratados apenas em primeira ordem, pois consideramos que somente vestígios da não comutatividade presente no Universo primordial estariam presentes hoje.

Agora, propomos um conjunto de transformações que irão relacionar as variáveis não comutativas com variáveis comutativas e os parâmetros não comutativos. Fazemos isso para facilitar a manipulação algébrica do modelo: descrevendo o sistema através de variáveis comutativas não precisamos nos preocupar com a ordem do produto dessas variáveis e a não comutatividade é descrita inteiramente pelos parâmetros não comutativos. Tais transformações são,

$$a_{nc} = a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2}, \quad (5.8)$$

$$T_{nc} = T_c + \frac{\chi a_c}{2} + \frac{\sigma P_{a_c}}{2}, \quad (5.9)$$

$$P_{T_{nc}} = P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2}, \quad (5.10)$$

$$P_{a_{nc}} = P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2}. \quad (5.11)$$

Tais transformações não são únicas, podem existir transformações diferentes que relacionam as variáveis comutativas e os parâmetros não comutativos com as variáveis não comutativas. Assim as transformações (5.8)-(5.11) foram escolhidas pois satisfazem em primeira ordem dos parâmetros não comutativos os parênteses de Poisson deformados (5.3)-(5.7).

A Hamiltoniana (5.2) reescrita em função das novas variáveis comutativas de (5.8)-(5.11) fica da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{nc} = N \left[\frac{\left(P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2} \right)^2}{12 \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)} - 3k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right) + \Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^3 \right. \\ \left. + \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2} \right) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{-3\omega} \right] \quad (5.12) \end{aligned}$$

Nesse trabalho, estamos utilizando o calibre $N = a_{nc}(t)$. A Hamiltoniana (5.12) nesse gauge é da forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{nc} = & \frac{1}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2} \right)^2 - 3k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^2 + \Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^4 \\ & + \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2} \right) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{1-3\omega} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Utilizando as variáveis comutativas (5.8)-(5.11) e o calibre mencionado acima na métrica (3.72), obtemos uma versão da métrica de FLRW não comutativa.

$$ds^2 = - \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^2 dt^2 + \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (5.14)$$

Assim, vemos que o fator de escala físico que mede a expansão do Universo é na verdade $a_{nc}(t)$, dado na seguinte forma,

$$a_{nc}(t) = a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2}. \quad (5.15)$$

Logo, para estudarmos a dinâmica da métrica (5.14), devemos computar o fator de escala não comutativo dado por (5.15).

A partir de (5.13), computamos as equações de Hamilton como,

$$\dot{a}_c = \frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial P_{a_c}} = \frac{1}{6} \left(P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{1-3\omega}, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{a_c} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial a_c} = & 6k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right) - 4\Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^3 \\ & - (1 - 3\omega) \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2} \right) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{3\omega} \\ & + \frac{\alpha}{2} \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{1-3\omega}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_c = \frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial P_{T_c}} = & \frac{\chi}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2} \right) + 3k\sigma \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right) - 2\sigma\Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^3 \\ & + \left[1 - \frac{\sigma}{2} P_{T_c} (1 - 3\omega) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{-1} \right] \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{1-3\omega} \\ & - \frac{\sigma}{2} (1 - 3\omega) \left(\frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2} \right) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{3\omega}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_{T_c} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial T_c} = & -\frac{\alpha}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2} \right) + 3k\gamma \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right) - 2\gamma\Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^3 \\ & - \frac{\gamma}{2} (1 - 3\omega) \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2} \right) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{-3\omega}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Combinando essas quatro equações, podemos encontrar equações diferenciais de segunda ordem para o fator de escala a_c e através de (5.15) estudar a dinâmica desse modelo.

O próximo passo é obter as equações supracitadas que descrevem a evolução do modelo. Logo, combinando as equações (5.16), (5.17) e (5.19), obtemos a seguinte expressão, desprezando os termos de ordens superiores nos parâmetros não comutativos e realizando uma integração em relação a t ,

$$P_{T_c} = C - \frac{\alpha}{2}a_c + \frac{\gamma}{2}P_{a_c}, \quad (5.20)$$

onde C é uma constante de integração positiva relacionada a energia inicial do fluido.

Combinando (5.16) e (5.18), encontramos a seguinte expressão para P_{a_c} , também em primeira ordem dos parâmetros não comutativos,

$$P_{a_c} = -6\dot{a}_c - \frac{\chi}{2}P_{T_c} - \frac{\alpha}{2}T_c + 3\gamma\dot{T}_c, \quad (5.21)$$

Derivando essa última expressão em relação a t , obtemos,

$$\ddot{a}_c = \frac{-1}{6} \left(\dot{P}_{a_c} + \frac{\chi}{2}\dot{P}_{T_c} + \frac{\alpha}{2}\dot{T}_c \right) + \frac{\gamma}{2}\ddot{T}_c. \quad (5.22)$$

Derivando a expressão (5.18) em relação a t , obtém-se,

$$\frac{\gamma}{2}\ddot{T}_c = \frac{\gamma}{2}(1-3\omega) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{-3\omega} \left(\dot{a}_c + \frac{\gamma\dot{T}_c}{2} - \frac{\sigma\dot{P}_{T_c}}{2} \right), \quad (5.23)$$

Introduzindo em (5.22) as equações (5.17), (5.19), (5.20), (5.21) e (5.23), obtemos o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_c = & -k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) + \frac{2}{3}\Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^3 \\ & + \frac{1}{6}(1-3\omega)(C - 3\gamma\dot{a}_c - \alpha a_c) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^{-3\omega} \\ & - \frac{\alpha}{6} \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^{1-3\omega}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nessa última equação nem todos os termos de ordens superiores foram eliminados, assim fazemos as seguintes aproximações,

$$\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^3 \approx a_c^3 + 3 \left(\frac{\gamma}{2}T_c - \frac{\sigma}{2}C \right) a_c^2 + \dots \quad (5.25)$$

$$\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^{1-3\omega} \approx a_c^{1-3\omega} + (1-3\omega) \left(\frac{\gamma}{2}T_c - \frac{\sigma}{2}C \right) a_c^{-3\omega} + \dots \quad (5.26)$$

$$\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^{-3\omega} \approx a_c^{-3\omega} + (1-3\omega) \left(\frac{\gamma}{2}T_c - \frac{\sigma}{2}C \right) a_c^{-(1+3\omega)} + \dots \quad (5.27)$$

Substituindo essas três expressões em (5.24), obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para o fator de escala comutativo a_c acoplada a equação dinâmica do fluido T_c ,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_c = & -k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) + \frac{2}{3} \Lambda \left[a_c^3 + \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) a_c^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} \omega (1 - 3\omega) C \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) a_c^{1-3\omega} - \frac{\alpha}{6} a_c^{1-3\omega} \\ & + \frac{1}{6} (1 - 3\omega) (C - 3\gamma \dot{a}_c - \alpha a_c) a_c^{-3\omega}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para encontrar uma equação diferencial que descreva T_c , inserimos (5.20) e (5.21) em (5.18), eliminamos os termos de ordens superiores dos parâmetros não comutativos e usamos as aproximações (5.25), (5.26) e (5.27). Isso resulta em,

$$\dot{T}_c = \frac{\chi}{2} \dot{a}_c + 3k\sigma a_c - 2\Lambda\sigma a_c^3 - C\frac{\sigma}{2}(1-3\omega)a_c^{-3\omega} + (1-3\omega)\left(\frac{\gamma}{2}T_c - \frac{\sigma}{2}C\right)a_c^{1-3\omega}. \quad (5.29)$$

De acordo com (3.89), podemos obter a equação de Friedmann a partir do vínculo da superhamiltoniana. Nesse caso ela contará com a presença dos parâmetros não comutativos, por isso a chamaremos de equação de Friedmann não comutativa. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{nc} = & \frac{1}{12} \left(P_{a_c} + \frac{\chi P_{T_c}}{2} + \frac{\alpha T_c}{2} \right)^2 - 3k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^2 + \Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^4 \\ & + \left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} - \frac{\alpha a_c}{2} \right) \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma P_{T_c}}{2} \right)^{1-3\omega} = 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

Usando (5.20) e (5.21) na equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{12} \left(-6\dot{a}_c + 3\gamma\dot{T}_c \right)^2 - 3k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^2 + \Lambda \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^4 \\ + (1-3\omega)(C-3\gamma\dot{a}_c-\alpha a_c)a_c^{-3\omega} = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Nessa equação, substituiremos as seguintes aproximações, além da aproximação (5.26),

$$\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^2 \approx a_c^2 + 2 \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) a_c + \dots \quad (5.32)$$

$$\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right)^4 \approx a_c^4 + 4 \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) a_c^3 + \dots \quad (5.33)$$

$$\left(-6\dot{a}_c + 3\gamma\dot{T}_c \right)^2 \approx 36\dot{a}_c^2 - 36\gamma\dot{a}_c\dot{T}_c + \dots \quad (5.34)$$

Então, a equação de Friedmann não comutativa fica na forma,

$$\begin{aligned} -3\dot{a}_c^2 - 3\gamma\dot{a}_c a_c^{1-3\omega} - 3k a_c^2 - 6k a_c \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) + \Lambda a_c^4 \\ + 4\Lambda a_c^3 \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) + C a_c^{1-3\omega} + (1-3\omega)C \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) a_c^{1-3\omega} - \alpha a_c^{2-3\omega} = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Comentamos que ao impor que α , γ , σ e χ sejam nulos, a equação de Friedmann comutativa é diretamente obtida.

A proposta desse trabalho é estudar modelos cosmológicos não comutativos na presença de um fluido perfeito, sendo esse a única fonte de matéria do modelo. Portanto, impomos que $\Lambda = 0$. Além disso, estamos interessados em introduzir no modelo um fluido do tipo radiação, ou seja $\omega = \frac{1}{3}$. Sob essas condições, as equações (5.28), (5.29) e (5.35) se tornam,

$$\ddot{a}_c = -k \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) - \frac{\alpha}{6}, \quad (5.36)$$

$$-3\dot{a}_c^2 - 3\gamma\dot{a}_c - 3ka_c^2 - 6ka_c \left(\frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2} \right) + C - \alpha a_c = 0, \quad (5.37)$$

$$\dot{T}_c = \frac{\chi}{2}\dot{a}_c + 3k\sigma a_c. \quad (5.38)$$

Já falamos anteriormente que para a estudar a dinâmica desses modelos devemos computar a forma de (5.15). Substituindo a equação (5.20) em (5.15), e descartando termos de ordens superiores, tem-se,

$$a_{nc}(t) = a_c + \frac{\gamma T_c}{2} - \frac{\sigma C}{2}. \quad (5.39)$$

Podemos obter a_c e T_c resolvendo o sistema de equações diferenciais definido por (5.36) e (5.38), submetido as condições iniciais $a_c(t=0) = a_0$, $T_c(t=0) = T_0$ e $\dot{a}_c(t=0) = v_0$, sendo esse último definido a partir de (5.37).

Na próxima seção iremos obter o fator de escala não comutativo ao variar os valores dos parâmetros k e C , bem como os valores dos parâmetros não comutativos α , γ , σ e χ e também os valores das condições iniciais a_0 e T_0 das soluções obtidas.

5.2 ANÁLISE DOS MODELOS

Nessa seção nos dedicamos a estudar os modelos que (5.36) e (5.38) nos proporcionam ao serem resolvidas, quando especificadas as condições iniciais e valores dos diferentes parâmetros presentes nas equações. Tais quantidades são k , C , os parâmetros não comutativos (PNC) α , γ , χ e σ . Dividimos essa seção em quatro subseções sendo três delas para os possíveis valores de k (-1,0 e 1). Em cada uma das subseções respectivas a um único valor de k , iremos comentar e mostrar conclusões das influências dos PNC supracitados na evolução de a_{nc} , além de exibir diferentes modelos com diferentes condições iniciais. Na última subseção, comparamos e comentamos modelos de diferentes constantes de curvaturas.

Nos tópicos onde não variamos as condições iniciais, elas foram escolhidas como

$$T_c(t = 0) = T_0 = 0, \quad (5.40)$$

$$a_c(t = 0) = a_0 = 1. \quad (5.41)$$

A equação (5.36) é de segunda ordem, logo precisamos de uma condição inicial para a derivada de $a_c(t) = \dot{a}_c(t)$. Obtemos essa informação substituindo (5.40) e (5.41) em (5.37), gerando uma equação algébrica de segunda grau que resulta num valor $\dot{a}_c(t = 0) = v_0$, uma vez especificados os outros parâmetros.

Para estudar como essas quantidades afetam a dinâmica do fator de escala, iremos variar um determinado parâmetro para diferentes valores, enquanto fixamos os demais em um determinado valor. Os PNC só irão tomar valores pequenos uma vez que estamos considerando apenas os vestígios de uma não comutatividade do Universo primordial.

5.2.1 Caso $k = 1$

O valor positivo de k implica numa solução cuja geometria desse espaço é dita fechada. Nesse caso, todos os modelos obtidos apresentam o fator de escala não comutativo, descrito por uma curva com um período de expansão e subsequente atração até o *Big Crunch*, independente dos valores dos outros parâmetros. Como a proposta desse trabalho é estudar os modelos de expansão acelerada, esses modelos não serão estudados em detalhes.

5.2.2 Caso $k = -1$

O valor negativo de k implica numa solução de geometria aberta, o que significa que todas as soluções para o fator de escala não comutativo serão do tipo expansivas, tendendo ao infinito num tempo infinito.

5.2.2.1 Variação do PNC α

Variamos o parâmetro α em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0,4. Os outros PNC foram mantidos em 0,1, enquanto $C = 10$. Percebemos que quanto menor o valor de α , mais rápida será a expansão, como percebemos nas tabelas e gráfico a seguir.

Tabela 1 – Valor de v_0 para diferentes valores de α , com $k = -1$, $C = 10$, $\gamma = \sigma = \chi = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$.

α	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,120	1,000	2,402
-0,3	1,105	1,000	2,376
-0,2	1,091	1,000	2,350
-0,1	1,076	1,000	2,324
0	1,061	1,000	2,297
0,1	1,046	1,000	2,271
0,2	1,031	1,000	2,244
0,3	1,015	1,000	2,216
0,4	1,000	1,000	2,189

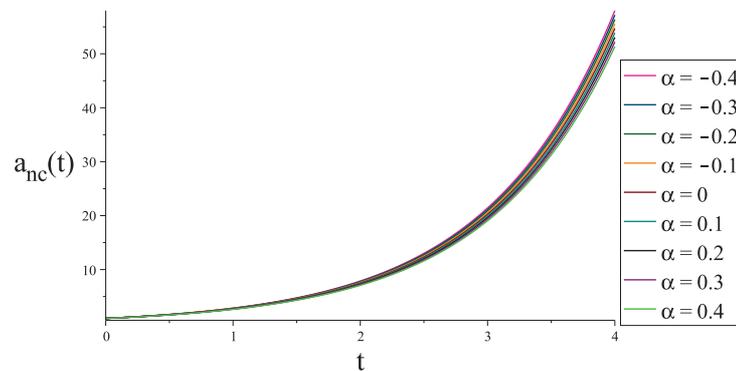
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Valor de v_0 para diferentes valores de α , com $k = -1$, $C = 10$, $\gamma = \sigma = \chi = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$.

α	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,120	4,000	57,550
-0,3	1,105	4,000	56,738
-0,2	1,091	4,000	55,921
-0,1	1,076	4,000	55,099
0	1,061	4,000	54,271
0,1	1,046	4,000	53,439
0,2	1,031	4,000	52,600
0,3	1,015	4,000	51,756
0,4	1,000	4,000	50,906

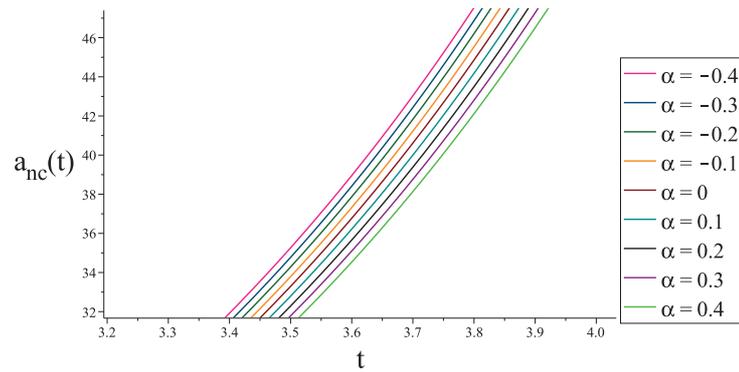
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 1 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\gamma = \sigma = \chi = 0,1$, variando o valor de α .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 2 – Zoom da figura (1).



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.2 Variação do PNC γ

Variamos o parâmetro γ em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0,4. Os outros PNC foram mantidos em 0,1, enquanto $C = 10$. É possível ver que quanto menor o valor do parâmetro γ , maior será a velocidade de expansão, como retratado nas tabelas e gráfico abaixo.

Tabela 3 – Valor de v_0 para diferentes valores de γ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \chi = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$.

γ	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,313	1,000	2,419
-0,3	1,255	1,000	2,347
-0,2	1,200	1,000	2,350
-0,1	1,146	1,000	2,320
0	1,095	1,000	2,294
0,1	1,046	1,000	2,271
0,2	1,000	1,000	2,251
0,3	0,955	1,000	2,234
0,4	0,913	1,000	2,220

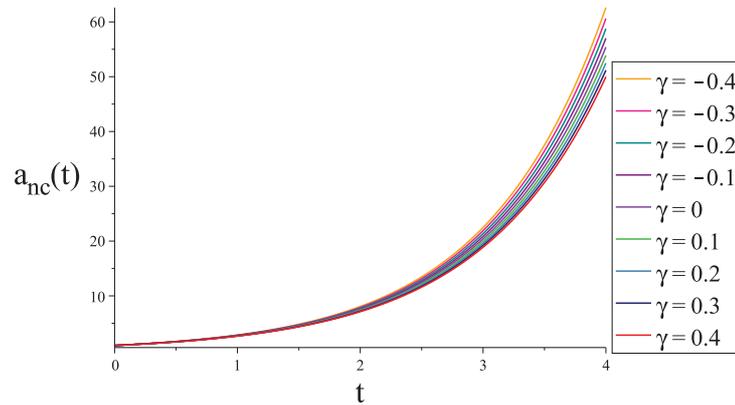
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Valor de v_0 para diferentes valores de γ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \chi = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$.

γ	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,313	4,000	62,165
-0,3	1,255	4,000	60,698
-0,2	1,200	4,000	58,312
-0,1	1,146	4,000	56,571
0	1,095	4,000	54,948
0,1	1,046	4,000	53,439
0,2	1,000	4,000	52,036
0,3	0,955	4,000	50,736
0,4	0,913	4,000	49,532

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 3 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \chi = 0,1$, variando o valor de γ .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.3 Variação do PNC χ

Variamos o parâmetro χ em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0,4. Os outros PNC foram mantidos em 0,1, enquanto $C = 10$. Nesse caso, o menor valor de χ corresponde a menor velocidade de expansão do modelo, enquanto o maior valor resultará numa expansão mais rápida. Percebemos que a velocidade inicial v_0 não é afetada por esse PNC, como vemos nas tabelas 5 e 6 e figuras 4 e 5.

Tabela 5 – Valor de v_0 para diferentes valores de χ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \gamma = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$.

χ	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,767	1,000	2,836
-0,3	1,767	1,000	2,843
-0,2	1,767	1,000	2,850
-0,1	1,767	1,000	2,856
0	1,767	1,000	2,863
0,1	1,767	1,000	2,870
0,2	1,767	1,000	2,877
0,3	1,767	1,000	2,883
0,4	1,767	1,000	2,890

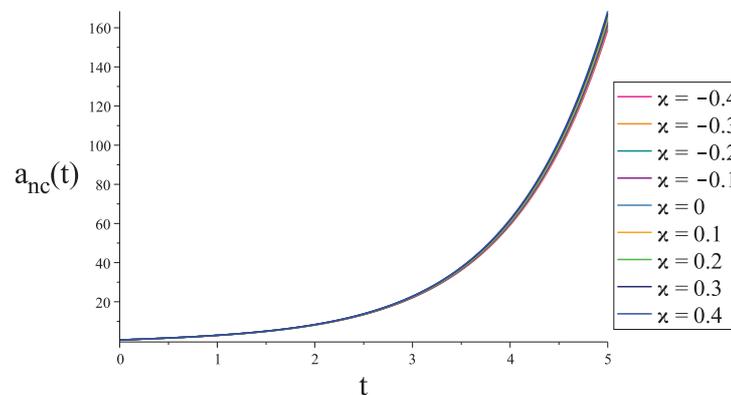
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 6 – Valor de v_0 para diferentes valores de χ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \gamma = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$.

χ	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,767	4,000	59,205
-0,3	1,767	4,000	59,564
-0,2	1,767	4,000	59,925
-0,1	1,767	4,000	60,287
0	1,767	4,000	60,651
0,1	1,767	4,000	61,017
0,2	1,767	4,000	61,384
0,3	1,767	4,000	61,753
0,4	1,767	4,000	62,124

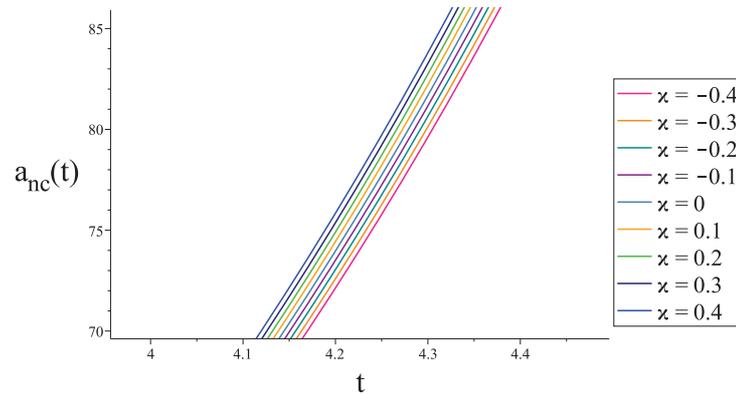
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 4 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \gamma = 0,1$, variando o valor de χ .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 5 – Zoom da figura (4).



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.4 Variação do PNC σ

Variamos o parâmetro σ em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0,2, uma vez que valores menores ou maiores resultarão em valores \hat{a}_0 complexos ou negativos. Os outros PNC foram mantidos em 0,1, enquanto $C = 10$. Esse parâmetro σ altera diretamente o valor inicial do $a_{nc}(t)$. Além disso, através das tabelas 7 e 8 e gráfico 6, verificamos que quanto menor o valor do parâmetro, mais veloz será a expansão.

Tabela 7 – Valor de v_0 para diferentes valores de σ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \chi = \gamma = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 1$.

σ	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	2,831	1,000	8,224
-0,3	2,652	1,000	7,180
-0,2	2,460	1,000	6,128
-0,1	2,252	1,000	4,063
0	2,024	1,000	3,980
0,1	1,767	1,000	2,870
0,2	1,467	1,000	1,718

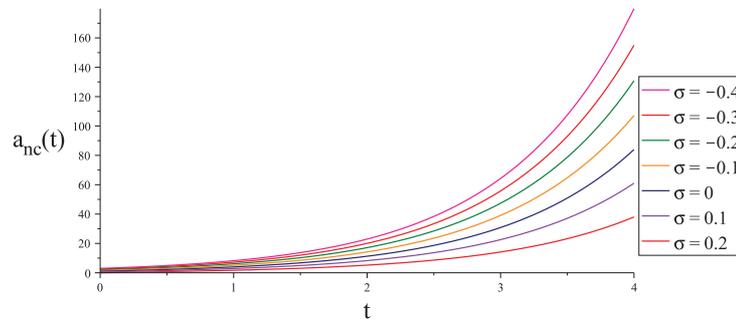
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 8 – Valor de v_0 para diferentes valores de σ , com $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \chi = \gamma = 0,1$ e de $a_{nc}(t)$ quando $t = 4$.

σ	v_0	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	2,831	4,000	179,895
-0,3	2,652	4,000	155,055
-0,2	2,460	4,000	130,840
-0,1	2,252	4,000	106,178
0	2,024	4,000	83,961
0,1	1,767	4,000	61,017
0,2	1,467	4,000	38,026

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 6 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \chi = \gamma = 0,1$, variando o valor de σ .

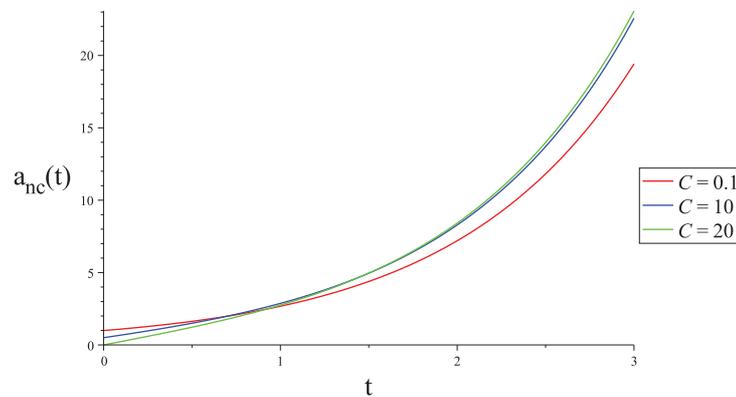


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.5 Variação de C

Nesse caso mantemos $\alpha = \gamma = \chi = \sigma = 0,1$ enquanto variávamos C . Para esse caso, conforme o valor de C cresce, o valor inicial de $a_{nc}(t)$ diminui, no entanto, esse será o modelo que terá a expansão mais rápida, como retratado na Figura 7.

Figura 7 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0,1$, variando o valor de C .

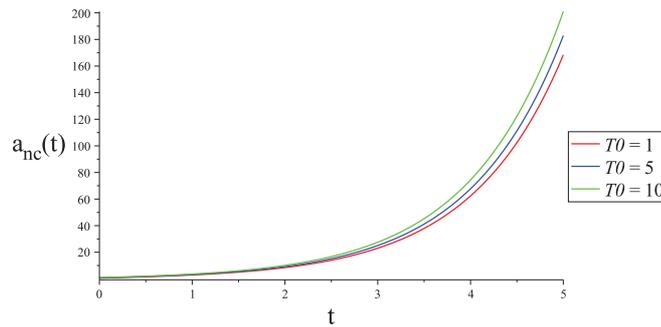


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.6 Variação de T_0

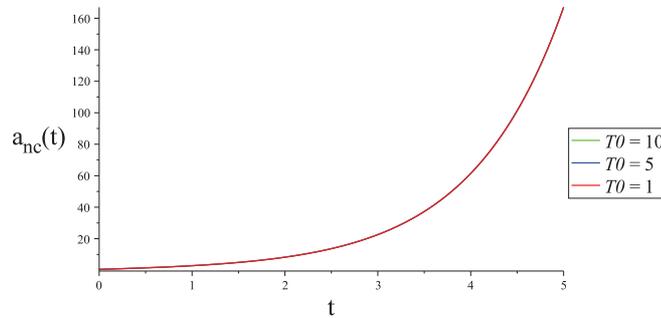
Nesse caso mantemos $\alpha = \gamma = \chi = \sigma = 0,1$ e $C = 10$ enquanto variávamos T_0 . Analisando a Figura 8 percebemos T_0 só altera o valor inicial. Isso pode ser verificado com precisão na Figura 9 onde zeramos o PNC γ , que é o parâmetro responsável por introduzir essa condição inicial na expressão de a_{nc} . Assim, vemos que as curvas são todas idênticas na ausência desse parâmetro mesmo variando T_0 .

Figura 8 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0,1$, variando o valor de T_0 .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 9 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$, $\alpha = \sigma = \chi$ e $\gamma = 0$, variando o valor de T_0 .

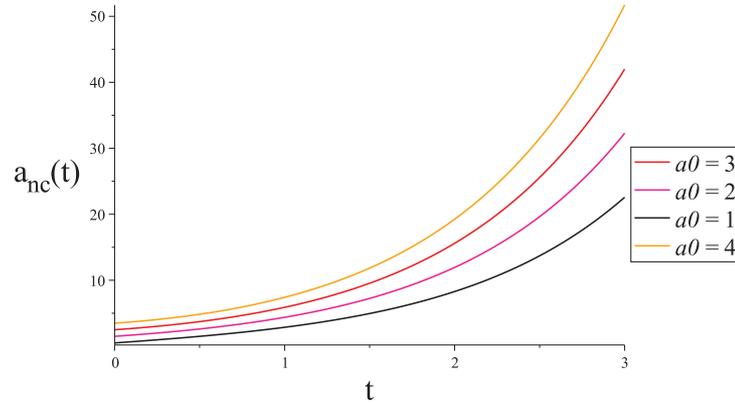


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.7 Variação de a_0

Nesse caso mantemos $\alpha = \gamma = \chi = \sigma = 0,1$ e $C = 10$ enquanto variávamos a_0 . Ao variar a condição inicial do fator de escala de 1 a 4, vemos que quanto maior o valor desse parâmetro, maior é o valor inicial do $a_{nc}(t)$ e mais rápida é a expansão do fator de escala. Esse comportamento pode ser visto na Figura 10

Figura 10 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$, $C = 10$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0,1$, variando o valor de a_0 .

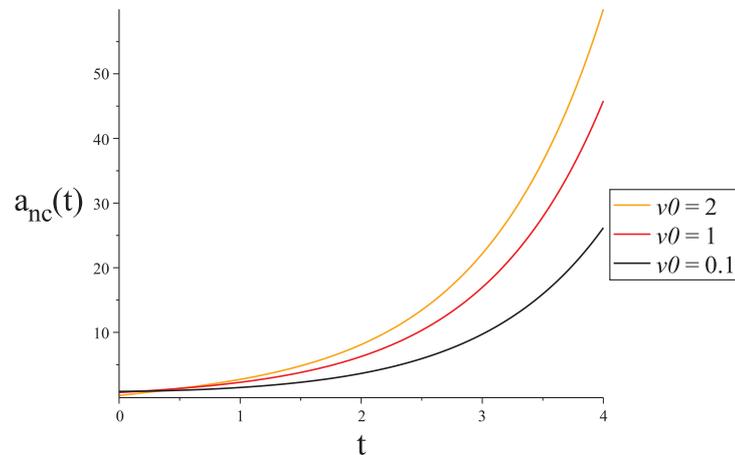


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.8 Variação de v_0

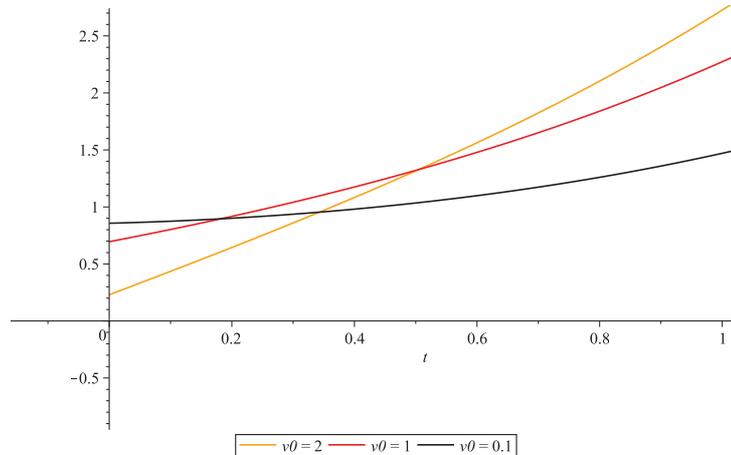
Variamos a velocidade de tal forma que ela assumiu os valores: 0,1, 1 e 2. No presente caso, usamos a equação de Friedmann não comutativa (5.37) para obter o valor da constante de integração C . Notamos que para valores maiores de v_0 do que os escolhidos, os valores de C são complexos. Vemos que quanto maior o valor da velocidade inicial, menor o valor inicial de $a_{nc}(t)$, mas mais rápida é a expansão desse modelo. Percebemos que num momento inicial os modelos com valores menores dominam e num momento posterior os modelos com velocidades maiores predominam. Isso pode ser visto nas Figuras 11 e 12

Figura 11 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $\alpha = \sigma = \chi = \gamma = 0,1$, variando o valor de v_0 .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 12 – Zoom da figura (11).



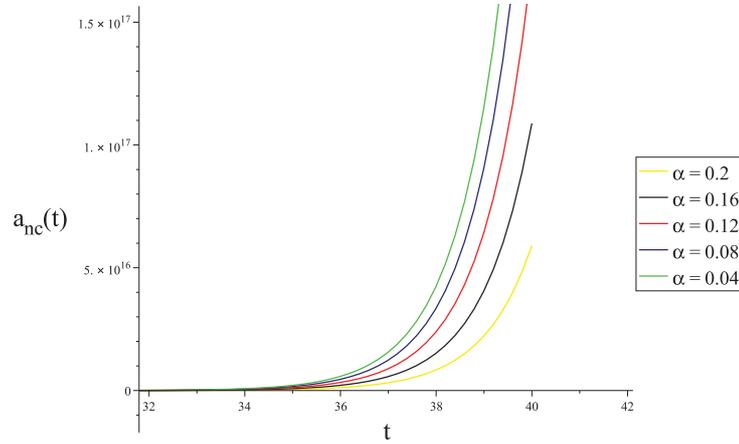
Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.2.9 Comparação entre parâmetros não comutativos

Nesse caso analisamos o modelo quando os parâmetros não comutativos são positivos e negativos separadamente.

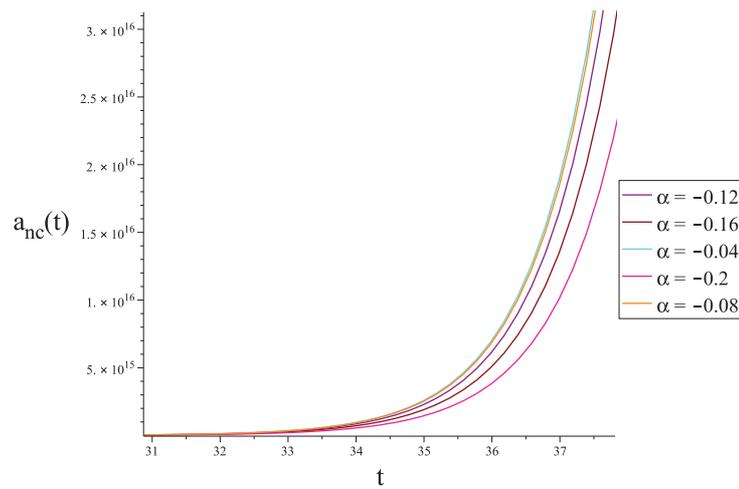
Na Figura 14, obtivemos o fator de escala não comutativo para diferentes modelos em que todos os PNC's foram tomados iguais e positivos. Nessa figura, consideramos cinco modelos diferentes em que todos os PNC's tomaram os seguintes valores: 0,04, 0,08, 0,12, 0,16 e 0,2. Vemos que o fator de escala tem uma expansão mais lenta quanto maiores os valores dos PCN's. Quando os valores dos PNC são negativos, como denotado na Figura 13, notamos que quanto menores os valores dos PNC's mais lenta é a expansão. No entanto, quando t é pequeno a expansão é mais lenta para maiores valores desses parâmetros. Isso é graças ao fato de que o valor inicial da derivada do fator de escala é maior quanto menor for o parâmetro.

Figura 13 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $C = 10$ e diferentes valores negativos de α , σ , χ e γ .



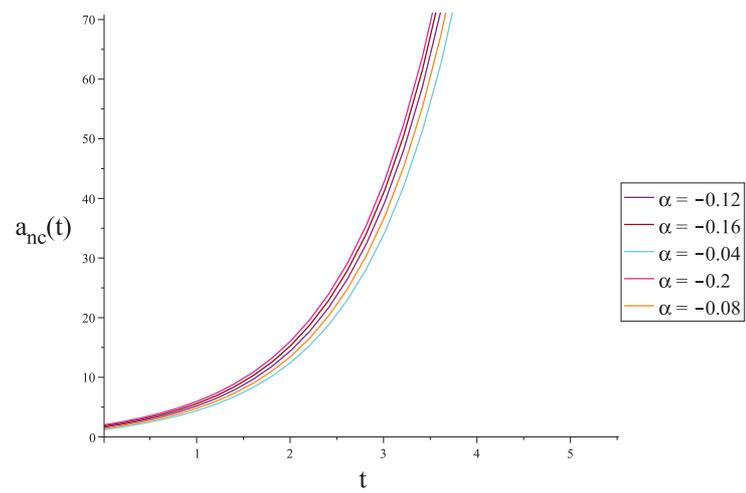
Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 14 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = -1$ e $C = 10$ e diferentes valores positivos de α , σ , χ e γ .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 15 – Zoom da figura (13), na região inicial.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3 Caso $k = 0$

A constante com $k = 0$ implica num modelo cuja geometria é plana. Para esse modelo, se $\alpha < 0$ então todos os modelos serão do tipo expansivos. Caso $\alpha > 0$ os modelos produzidos terão uma fase expansiva seguida de uma fase contrativa que chega a um *Big Crunch*. Portanto, só mostraremos os casos onde temos expansão acelerada, isto é, $\alpha < 0$. Mencionamos também que a expressão de a_{nc} não carrega o PNC χ , que só aparece em ordens superiores a 1. É importante ressaltar que nesse caso é possível obter uma solução analítica do sistema de equações (5.36) e (5.38). Dessa forma, o fator de escala não comutativo (5.15) fica dado por,,

$$a_{nc}(t) = -\frac{\alpha}{12}t^2 + \left(\frac{\sqrt{9\gamma^2 + 12(C - \alpha a_0)}}{6} \right) t + a_0 - \frac{\sigma C}{2}. \quad (5.42)$$

5.2.3.1 Variação do PNC α

Variamos o parâmetro α em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0. valores superiores a isso resultarão em soluções de expansão não aceleradas. Percebemos que quanto maior o valor do módulo do PNC, mais rápida será a expansão do modelo. Vemos isso na Figura 16 e nas Tabelas 9 e 10 abaixo.

Tabela 9 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de α , com $k = 0$, $C = 1$, $\gamma = \sigma = 0,1$ e no instante $t = 1$.

α	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,000	11,232
-0,3	1,000	10,151
-0,2	1,000	9,060
-0,1	1,000	7,959

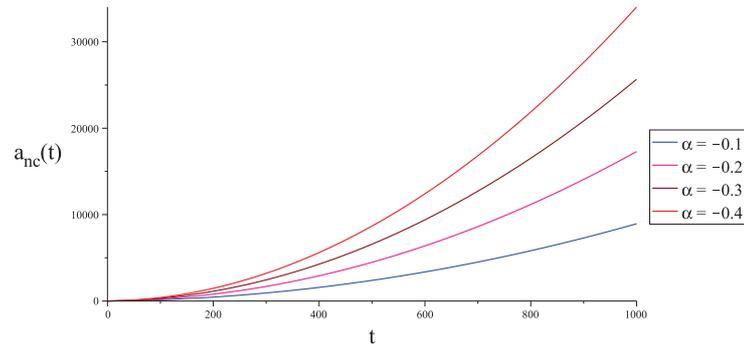
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de α , com $k = 0$, $C = 1$, $\gamma = \sigma = 0,1$ e no instante $t = 800$.

α	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	800,000	21882,349
-0,3	800,000	16529,191
-0,2	800,000	11175,259
-0,1	800,000	5820,456

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 16 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\gamma = \sigma = 0,1$, variando o valor de α .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3.2 Variação do PNC γ

Variamos o parâmetro γ em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0,4. Vemos que o sinal de γ não altera o fator de escala, de forma de quanto maior o módulo de γ , mais rápido será o crescimento de $a_{nc}(t)$. Esse fato provem do formato da solução, onde o parâmetro γ aparece elevado a segunda potência, dentro de uma raiz quadrada como mostrado na equação (5.42). Esse s fatos podem ser verificados nas Tabelas 11 e 12 e na Figura 17.

Tabela 11 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de γ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0,1$, $\sigma = 0,1$ e no instante $t = 1$.

γ	t	$a_{nc}(t)$
-0,4/0,4	1,000	8,260
-0,3/0,3	1,000	8,121
-0,2/0,2	1,000	8,020
-0,1/0,1	1,000	7,959
0	1,000	7,938

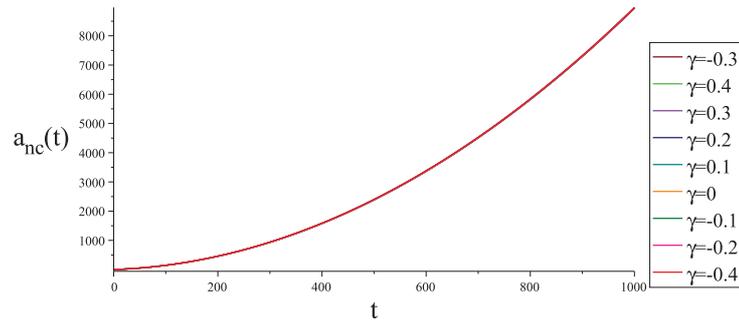
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de γ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0,1$, $\sigma = 0,1$ e no instante $t = 800$.

γ	t	$a_{nc}(t)$
-0,4/0,4	800,000	5844,546
-0,3/0,3	800,000	5833,449
-0,2/0,2	800,000	5825,368
-0,1/0,1	800,000	5820,456
0	800,000	5818,807

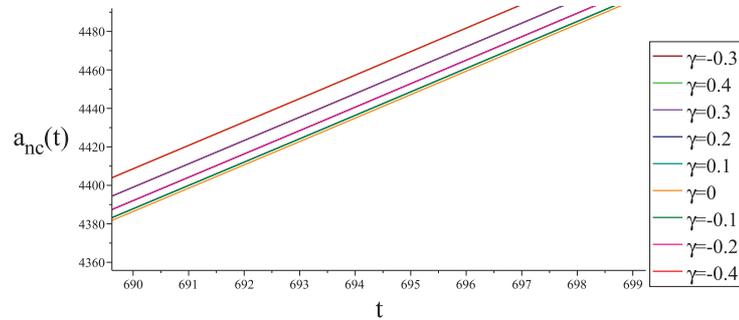
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 17 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0,1$, $\sigma = 0,1$, variando o valor de γ .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 18 – Zoom da figura (17).



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3.3 Variação do PNC σ

Variamos o parâmetro σ em intervalos de 0,1, de -0,4 até 0,4. Notamos que nesse caso, σ só altera o valor inicial de $a_{nc}(t)$, isso fica evidente nas Tabelas 13 e 14 e na Figura 19.

Tabela 13 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de σ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0,1$, $\gamma = 0,1$ e no instante $t = 1$.

σ	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	1,000	8,109
-0,3	1,000	8,059
-0,2	1,000	8,009
-0,1	1,000	7,959
0	1,000	7,909
0,1	1,000	7,859
0,2	1,000	7,809
0,3	1,000	7,759
0,4	1,000	7,709

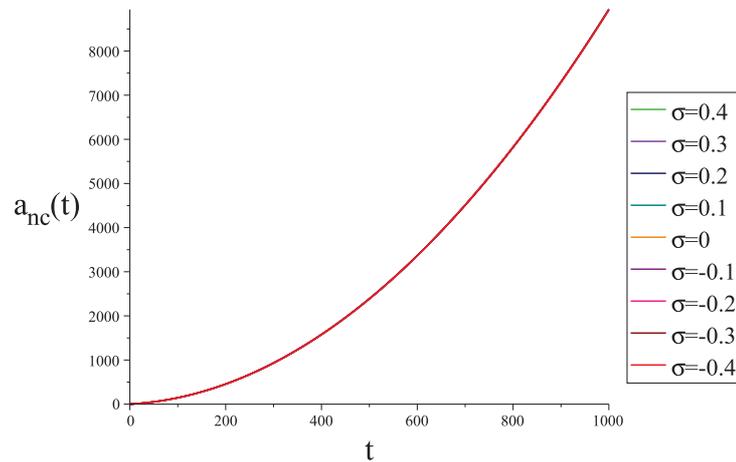
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Tabela 14 – Valor de $a_{nc}(t)$ para diferentes valores de σ , com $k = 0$, $C = 1$, $\alpha = -0,1$, $\gamma = 0,1$ e no instante $t = 800$.

σ	t	$a_{nc}(t)$
-0,4	800,000	5820,606
-0,3	800,000	5820,556
-0,2	800,000	5820,506
-0,1	800,000	5820,456
0	800,000	5820,406
0,1	800,000	5820,356
0,2	800,000	5820,306
0,3	800,000	5820,256
0,4	800,000	5820,206

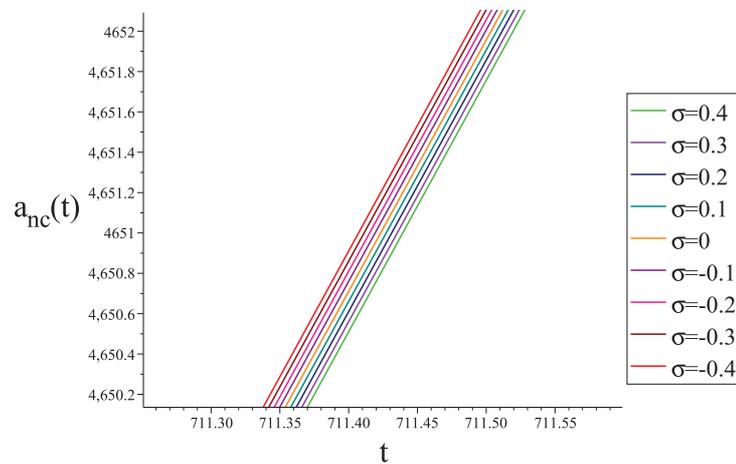
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Figura 19 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0,1$, $\gamma = 0,1$, variando o valor de σ .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 20 – Zoom da figura (19).

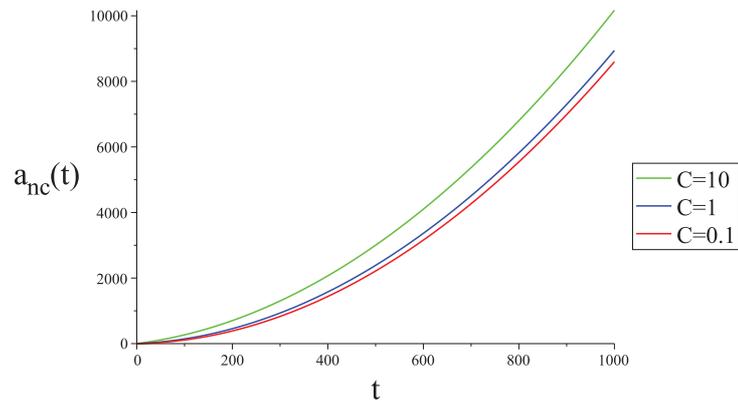


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3.4 Variação de C

Mantemos os parâmetros fixos em $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$ e $a_0 = 1$, e variamos C de 0,1 a 10. Notamos que conforme o valor de C cresce, mais rápida é a expansão do modelo, como era esperado.

Figura 21 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$ e $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$, variando o valor de C .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

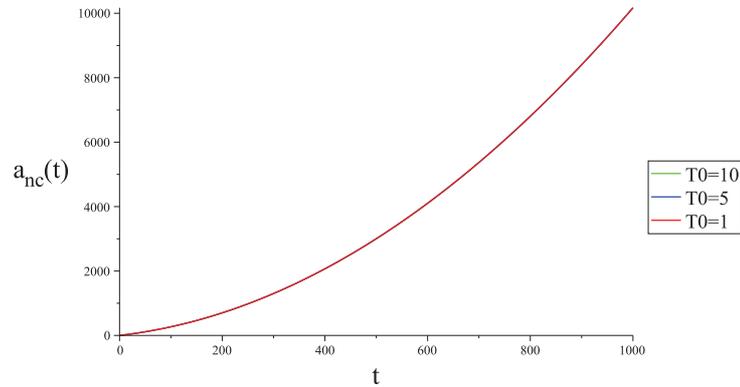
5.2.3.5 Variação de T_0

Observamos nesse caso que T_0 só influencia o valor inicial do fator de escala. Isso é esperado uma vez que nesse caso as equações estão desacopladas. É importante relatar que a equação (5.42) toma a seguinte forma quando $T_0 \neq 0$,

$$a_{nc}(t) = -\frac{\alpha}{12}t^2 + \left(\frac{\sqrt{9\gamma^2 + 12(C - \alpha a_0)}}{6} \right) t + a_0 - \frac{\sigma C}{2} + \frac{\gamma}{2}T_0. \quad (5.43)$$

O gráfico referente a essa variação é dado abaixo.

Figura 22 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$, variando o valor de T_0 .

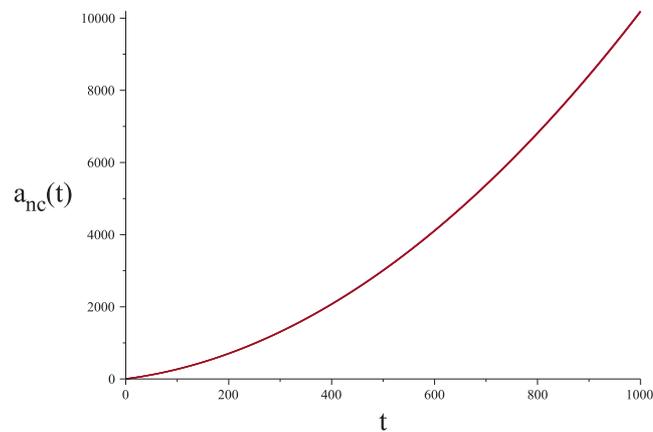


Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3.6 Variação de a_0

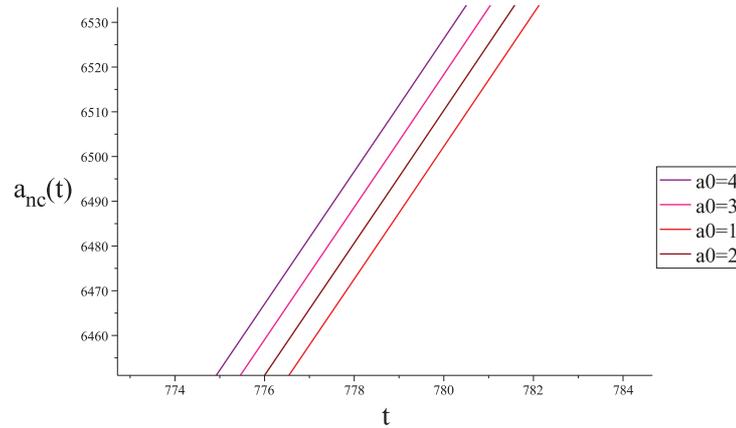
Mantemos os parâmetros fixos em $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$ e $C = 10$, e variamos a_0 . Ao variar a condição inicial do fator de escala de 1 a 4, vemos que quanto maior o valor desse parâmetro, maior é o valor inicial do $a_{nc}(t)$ e mais rápida é a expansão do universo.

Figura 23 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$, $C = 1$ e $\alpha = -0,1$, $\sigma = \gamma = 0,1$, variando o valor de a_0 .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

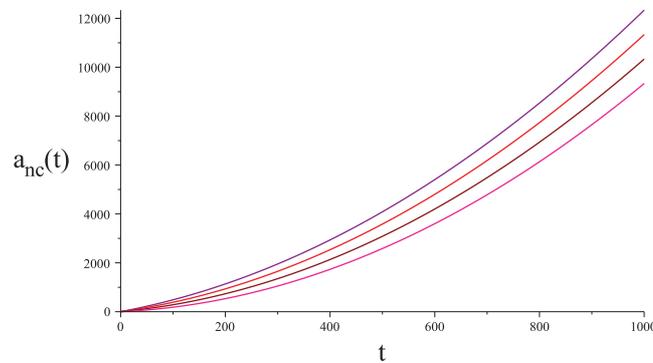
Figura 24 – Zoom da figura (23).



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3.7 Variação de v_0

Nesse caso variamos a velocidade inicial do modelo de 1 a 4, mantendo os PNC fixos em, $\alpha = -0, 1$, $\sigma = \gamma = 0, 1$. Vemos que quanto maior v_0 , mais intensa é a expansão, sem alterar o valor inicial de $a_{nc}(t)$.

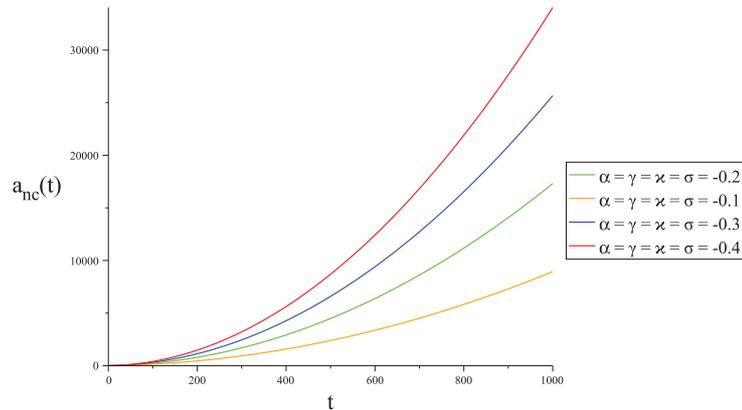
Figura 25 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$ e $\alpha = -0, 1$, $\sigma = \gamma = 0, 1$, variando o valor de v_0 .

Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.3.8 Comparação entre parâmetros não comutativos

Nesse caso podemos notar que α tem um peso maior na forma do fator de escala, como esperado da equação (5.42), predominando sobre os outros dois parâmetros.

Figura 26 – Gráfico de $a_{nc}(t)$ para $k = 0$ e $C = 1$ e diferentes valores negativos de α , σ e γ .



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.2.4 Comparação entre modelos com constantes de curvatura diferentes

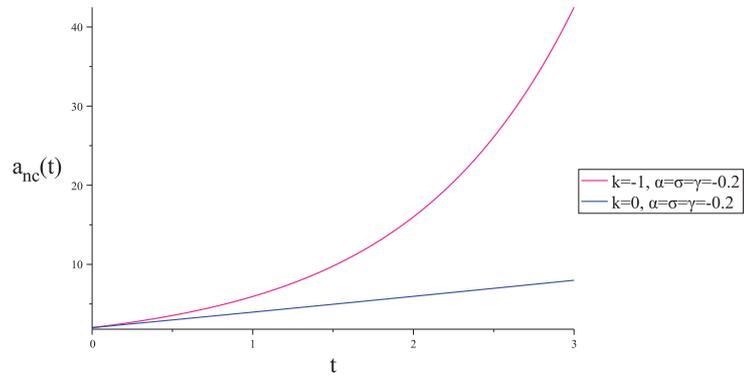
Nessa seção nos dedicamos a analisar diferentes modelos de $a_{nc}(t)$ com constantes de curvatura k diferentes. Comparamos o caso em que $k = 0$ e $k = -1$, visto que nesses casos, os modelos são sempre expansivos se o valor de α for negativo.

5.2.4.1 Caso $k = 0$ e $k = -1$

Nesse caso, escolhemos valores negativos para α nos modelos com curvatura plana, a fim de obter um fator de escala expansivo, passível de comparação com os modelos com curvatura negativa. Os PNCs foram variados em intervalos de 0,1, de -0,2 a 0,2, enquanto os outros foram mantidos em $C = 10$, $a_0 = 1$ e $T_0 = 0$.

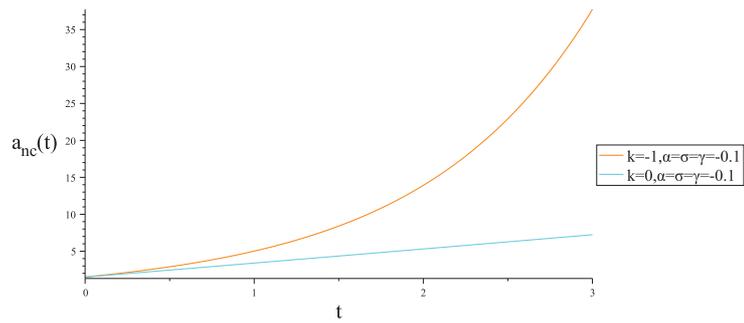
Pudemos perceber que os modelos com $k = -1$ são muito mais expansivos em comparação com os modelos de curvatura nula, como retratado nas Figuras 27 à 30 abaixo. Vemos, entretanto, que α predomina muito mais em modelos com curvatura $k = 0$, como vemos na Figura 30, onde durante os instantes iniciais do modelo, a curva correspondente a $k = 0$ é mais expansiva do que o modelo $k = -1$, que posteriormente domina sobre o modelo de curvatura plana.

Figura 27 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = \gamma = \sigma = \chi = -0,2$.



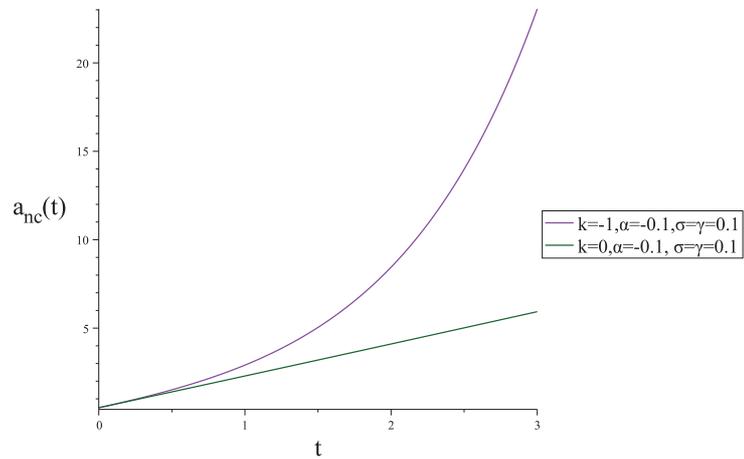
Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 28 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = \gamma = \sigma = \chi = -0,1$.



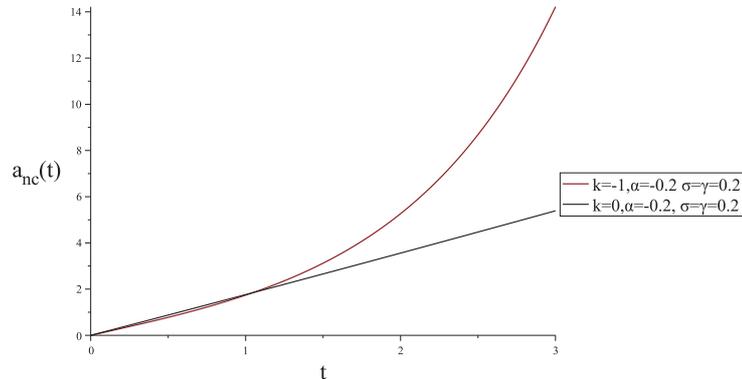
Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 29 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = -0,1$ e $\gamma = \sigma = \chi = 0,1$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

Figura 30 – Comparação entre modelos com $k = 0$ e $k = -1$, com $C = 10$, $\alpha = -0,2$ e $\gamma = \sigma = \chi = 0,2$.



Fonte: Figura elaborada pelo autor.

5.3 ESTIMATIVA DE PARÂMETROS NÃO COMUTATIVOS

Nessa seção, vamos obter valores para os parâmetros não comutativos α e γ a partir de dados observacionais pertinentes a algumas quantidades cosmológicas que estão relacionadas com os parâmetros não comutativos. Nos restringimos a apenas esses dois dos quatro parâmetros, pois os parâmetros χ e σ dependem de valores da função $T_{nc}(t)$ em um determinado instante de tempo. No presente momento não temos dados observacionais relacionados a essa quantidade.

Assim, para obter estimativas de α e γ , consideramos a Hamiltoniana não comutativa (5.2) em termos de suas variáveis não comutativas,

$$\mathcal{H}_{nc} = N \left[-\frac{P_{a_{nc}}^2}{12a_{nc}} + \frac{P_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\omega}} - 6ka_{nc} + \Lambda a_{nc}^3 \right]. \quad (5.44)$$

Queremos estimar o valores dos parâmetros baseado em dados observacionais, por isso devemos escolher constantes que gerem um modelo similar ao observado. Assim escolhemos um fluido do tipo poeira ($\omega = 0$), constante de curvatura nula ($k = 0$). Também escolhemos uma constante cosmológica nula ($\Lambda = 0$), pois a origem da expansão acelerada no nosso modelo será a não comutatividade. Assim, no calibre conforme ($N = a_{nc}(t)$), (5.44) se torna,

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{P_{a_{nc}}^2}{12} + P_{T_{nc}} a_{nc}. \quad (5.45)$$

As equações de movimento são computadas utilizando os parênteses de Poisson deformados (5.3)-(5.7). Tal como fizemos nas seções anteriores, todos os termos de ordem

superiores a dois dos PNC serão descartados. Assim, as equações de Hamilton são,

$$\dot{a}_{nc} = \{a_{nc}, H_{nc}\} = \frac{-P_{a_{nc}}}{6} + \gamma a_{nc}, \quad (5.46)$$

$$\dot{P}_{a_{nc}} = \{P_{a_{nc}}, H_{nc}\} = \alpha a_{nc} - P_{T_{nc}}, \quad (5.47)$$

$$\dot{T}_{nc} = \{T_{nc}, H_{nc}\} = \frac{-\chi}{6} P_{a_{nc}} + a_{nc} - \sigma P_{T_{nc}}, \quad (5.48)$$

$$\dot{P}_{T_{nc}} = \{P_{T_{nc}}, H_{nc}\} = \frac{\alpha}{6} P_{a_{nc}} - \gamma P_{T_{nc}}. \quad (5.49)$$

Ao observar essas quatro equações, notamos que χ e σ só estão presentes na equação que envolve T_{nc} , (5.48). Isso significa que não podemos estimar seus valores visto que não temos dados observacionais relacionados a essa variável T_{nc} .

Combinando as equações (5.46), (5.47) e (5.49), chegamos na seguinte expressão,

$$P_{T_{nc}} = C - \alpha a_{nc} + \gamma P_{a_{nc}}. \quad (5.50)$$

Utilizando a equação acima na equação (5.47), obtemos,

$$\dot{P}_{a_{nc}} = 2\alpha a_{nc} - \gamma P_{a_{nc}} - C. \quad (5.51)$$

Podemos reescrever a equação (5.46) na seguinte forma,

$$P_{a_{nc}} = -6(\dot{a}_{nc} - \gamma a_{nc}), \quad (5.52)$$

e substituí-la na equação (5.51) para obter o seguinte resultado,

$$\dot{P}_{a_{nc}} = 2\alpha a_{nc} + 6\gamma \dot{a}_{nc} - C. \quad (5.53)$$

Se introduzirmos a equação (5.53) na derivada em relação a t da equação (5.46), chegamos ao seguinte resultado,

$$\ddot{a}_{nc} + \frac{\alpha}{3} a_{nc} = \frac{C}{6}. \quad (5.54)$$

Essa equação diferencial ordinária de segundo grau não homogênea descreve um Universo expansivo se imposta a condição $\alpha < 0$. Nesse caso a solução geral da equação é dada por,

$$a_{nc}(t) = A_1 e^{\lambda_+ t} + A_2 e^{\lambda_- t} + \frac{C}{2|\alpha|}, \quad (5.55)$$

onde $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{|\alpha|}{3}}$. A_1 e A_2 são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais do fator de escala e sua derivada. Podemos considerar tais condições como,

$$a_{nc}(t = t_0) = a_0, \quad (5.56)$$

$$\dot{a}_{nc}(t = t_0) = \dot{a}_0, \quad (5.57)$$

para o fator de escala e sua derivada, respectivamente. Onde a_0 e t_0 são o fator de escala e o tempo de equidade entre um universo dominado por radiação e matéria. Isto é $a_0 = a_{eq} \approx 2,84 \times 10^{-4}$ e $t_0 = t_{eq} \approx 3,5 \times 10^5$ anos [34]. Essas condições iniciais foram escolhidas pois denotam os momentos iniciais de quando o Universo passa a ser dominado por matéria. Introduzindo as condições (5.56) e (5.57), junto da expressão acima, na solução (5.55) podemos determinar A_1 e A_2 em função de a_0 e \dot{a}_0 ,

$$A_1 = \left(\frac{a_0}{2} + \frac{\dot{a}_0}{2\lambda_+} + \frac{C}{4|\alpha|} \right), \quad (5.58)$$

$$A_2 = \left(\frac{a_0}{2} - \frac{\dot{a}_0}{2\lambda_+} + \frac{C}{4|\alpha|} \right). \quad (5.59)$$

A solução particular de (5.54) fica na seguinte forma,

$$a_{nc}(t) = \left(\frac{a_0}{2} + \frac{\dot{a}_0}{2\lambda_+} + \frac{C}{4|\alpha|} \right) e^{\lambda_+ t} + \left(\frac{a_0}{2} - \frac{\dot{a}_0}{2\lambda_+} + \frac{C}{4|\alpha|} \right) e^{\lambda_- t} + \frac{C}{2|\alpha|}. \quad (5.60)$$

Podemos escrever a condição (5.57) em função de (5.56). Para isso, precisamos encontrar a equação de Friedmann não comutativa, usando o vínculo da Hamiltoniana (5.44), isto é,

$$\mathcal{H}_{nc} = 0 \rightarrow \frac{P_{a_{nc}}^2}{12} + P_{T_{nc}} a_{nc} = 0. \quad (5.61)$$

Utilizando os resultados (5.50) e (5.52) na equação acima, chegamos a,

$$3\dot{a}_{nc}^2 + 3\gamma\dot{a}_{nc}a_{nc} + \alpha a_{nc} - C a_{nc} = 0. \quad (5.62)$$

Aplicamos (5.56) e (5.57) em (5.62) para obter o seguinte resultado,

$$\dot{a}_0 = -\frac{a_0\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_0\gamma}{2}\right)^2 + \frac{a_0}{3}(a_0|\alpha| + C)}. \quad (5.63)$$

O próximo passo é eliminar termos de ordem superiores dos parâmetros não comutativos. Para isso, vamos expandir as funções exponenciais de (5.60) e manter somente os termos de ordem menor do que dois. Assim,

$$e^{\lambda_+ t} = 1 + \sqrt{\frac{|\alpha|}{3}}t + \frac{|\alpha|}{6}t^2 + \frac{1}{3!} \frac{|\alpha|^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}t^3 + \dots \quad (5.64)$$

$$e^{\lambda_- t} = 1 - \sqrt{\frac{|\alpha|}{3}}t + \frac{|\alpha|}{6}t^2 - \frac{1}{3!} \frac{|\alpha|^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}t^3 + \dots \quad (5.65)$$

Aplicando essas aproximações em (5.60), após eliminar os termos de segunda ordem da equação (5.63), resulta na seguinte expressão,

$$a_{nc}(t) \approx \sqrt{\frac{a_0 C}{3}}t + \frac{Ct^2}{12} - \frac{a_0\gamma}{2}t + \frac{|\alpha|}{18} \sqrt{\frac{a_0 C}{3}}t^3. \quad (5.66)$$

Tabela 15 – Tabela de valores de α e γ para diferentes fatores de escala de um Universo dominado por fluido poeira.

a_{nc}	$t(10^9 \text{ anos})$	γ	α
1	13,4560	$-3,383508693 \cdot 10^{-14}$	$-9,3205802 \cdot 10^{-34}$
0,9	12,0224		
0,8	10,5167	$-3,696273322 \cdot 10^{-14}$	$-3,54776760 \cdot 10^{-33}$
0,7	8,9511		
0,6	7,3488	$-4,225200304 \cdot 10^{-14}$	$-1,22479763 \cdot 10^{-32}$
0,5	5,7470		
0,4	4,1973	$-5,275372044 \cdot 10^{-14}$	$-6,22285557 \cdot 10^{-32}$
0,3	2,7629		
0,2	1,5148	$-8,644813651 \cdot 10^{-14}$	$-1,24819559 \cdot 10^{-30}$
0,1	0,5370		

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Esse resultado (5.66) consiste numa aproximação da solução (5.60) em primeira ordem dos parâmetros não comutativos α e γ . Através dele iremos estimar os valores de tais parâmetros. Isso é feito usando dois valores conhecidos de a_{nc} em determinados instantes de tempo que são substituídos em (5.66). Tais valores podem ser encontrados na primeira e segunda colunas da Tabela (15). Precisamos considerar ainda a constante da densidade de energia do fluido C . Para um fluido do tipo poeira podemos tratá-la como $C = \Omega_0 H_0^2$ onde $\Omega_0 = 0,2825$ e $H_0 = 70(km/s)/Mpc$, que são o parâmetro de densidade de matéria e o parâmetro de Hubble [3, 4]. Com essas considerações construímos a Tabela 15. Nessa tabela podemos observar cinco valores para α e γ para diferentes épocas do Universo. Assim como propomos anteriormente, esses valores são pequenos, da ordem de 10^{-14} e 10^{-30} para γ e α , respectivamente. Além disso, conforme o Universo expande, o módulo dos valores dos parâmetros decresce, se aproximando de zero, concordando com a ideia inicialmente proposta de que tais parâmetros seriam mais importantes em um Universo primordial, sendo os valores atuais somente vestígios das interações presentes nesse estágio anterior do Universo.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho procuramos descrever a expansão acelerada do Universo através da não comutatividade entre variáveis dinâmicas relacionadas à geometria, ao fluido e aos *momenta* canonicamente conjugados dos modelos cosmológicos tratados. Tal não comutatividade foi proposta usufruindo da ideia de que sua origem é proveniente de vestígios de interações quânticas do Universo primordial e portanto estariam presente até o Universo atual.

Para que pudéssemos introduzir essas não comutatividades na teoria, usamos o formalismo ADM e o formalismo de Schutz, pra obter uma formulação Hamiltoniana da relatividade geral com um fluido perfeito. Nesse estudo, consideramos a matéria do Universo como um fluido do tipo de radiação. Propusemos duas formas distintas de se introduzir a não comutatividade no nosso modelo: o formalismo de Faddeev-Jackiw e um método usando transformações de variáveis.

Nesse trabalho estamos considerando o caso mais geral possível de não comutatividade entre as variáveis dinâmicas da teoria, para esse modelo. Ao aplicarmos o método de Faddeev-Jackiw, concluímos que tal formalismo não é capaz de prover um modelo cosmológico que carregue todos os parâmetros não comutativos introduzidos em primeira ordem dos parâmetros não comutativos, recaindo a um caso já explorado na literatura.

Recorremos ao método direto para o tratamento dessas não comutatividades obtendo de fato equações que carregam, em primeira ordem, os quatro parâmetros não comutativos α , γ , χ e σ . Em nossa análise, variamos individualmente cada um desses parâmetros presentes nas equações diferenciais do fator de escala não comutativo enquanto os restante eram fixados e percebemos que sua influência é fundamental na dinâmica do fator de escala. Também analisamos as diferenças que os outros parâmetros causam em a_{nc} , que são a constante de curvatura k , a energia inicial do fluido C e as condições iniciais a_0 , T_0 e v_0 .

Quando a constante de curvatura k é negativa só obtivemos modelos de expansão infinita em um tempo infinito, ou seja, não há singularidades. Nesse caso a influência dos parâmetros pode ser bem mais facilmente analisada e resumida da seguinte forma: α , γ e σ atuam como forças atrativas, visto que quanto maior seu valor menor a taxa de expansão do Universo. Já χ é vista de forma oposta, como uma força repulsiva, uma vez que uma valor maior desse parâmetro implica numa expansão mais intensa. As constante C , v_0 e a_0 possuem um comportamento similar: quanto maior seu valor, mais intensa é a expansão, no entanto, um maior valor de C e v_0 implica em menores valores iniciais do fator de escala. T_0 , assim como no caso anterior, só altera o valor inicial de a_{nc} .

Finalmente, quando $k = 0$, os modelos obtidos podem ser de caráter expansivo ou de período expansivo e contrativo, como no caso em que $k = 1$. Assim, como desejamos

estudar modelos de expansão acelerada, mantivemos o valor de $\alpha < 0$ de forma que só tivemos Universos expansivos. É importante ressaltar que esse é o único caso em que uma solução analítica foi obtida. Além disso a_{nc} não depende de χ . Outros parâmetros tem comportamento particular: o sinal de γ é irrelevante, aumentando a expansão do fator de escala quanto maior seu módulo; σ somente altera o valor inicial de a_{nc} e α aumenta a expansão conforme seu valor diminui. Nesse caso, também ressaltamos que T_0 e a_0 só alteram o valor inicial do fator de escala. C e v_0 aumentam a taxa de expansão quanto maior seu valor.

Ao comparar os modelos de diferentes curvaturas, nos restringimos aos casos em que o tipo de modelo é compatível, isto é, comparamos $k = 0$ (com $\alpha < 0$) com $k = -1$, uma vez que são esses os modelos expansivos. Nesses modelos, vemos claramente que a expansão dos modelos de curvatura negativa são bem mais intensas do que as de curvatura nula.

Na última seção do quinto capítulo, é obtido um conjunto de cinco possíveis valores dos parâmetros não comutativos α e γ a partir de quantidades observadas na natureza. Essa estimativa corrobora com as premissas de que tais parâmetros devem ser pequenos e mais importantes no Universo primordial, visto que conforme o Universo evolui, mais os parâmetros se aproximam de zero. σ e χ não foram obtidos pois necessitam de dados observacionais indisponíveis.

Em suma, a introdução desses 4 parâmetros não comutativos altera profundamente a dinâmica do fator de escala e pode, em certos casos, gerar modelos cosmológicos de expansão acelerada.

REFERÊNCIAS

- [1] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, The Astrophysical Journal vol. **142** (1965) 419.
- [2] S. Dodelson, *Modern cosmology: Anisotropies and inhomogeneities in the universe.*, (Academic, San Diego, Calif. and London - 2002)
- [3] S. Perlmutter *et al*, *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, The Astrophysical Journal vol. **517** (1999) 565.
- [4] A. Riess *et al*, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, The Astronomical Journal vol. **116** (1998) 1009.
- [5] H.S. Snyder, *Quantized space-time*, Physical Review **71** (1947) 38.
- [6] C.S. Yang, *On quantized space-time*, Physical Review **72** (1947) 874.
- [7] O. Obregon and I. Quiros, *Can noncommutative effects account for the present speed up of the cosmic expansion?*, Phys. Rev. **D84** (2011) S6.
- [8] E. M. C. Abreu, M. V. Marcial, A. C. R. Mendes, W. Oliveira and G. Oliveira-Neto, *Noncommutative cosmological models coupled to a perfect fluid and a cosmological constant*, Journal of High Energy Physics **2012** (2012) 38.
- [9] H. García-Compeán, O. Obregon and C. Ramírez, *Noncommutative quantum cosmology*, Phys. Rev. **D88** (2002) 161301.
- [10] B.P. Abbott *et al*, *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 241103.
- [11] B.P. Abbott *et al*, *Binary Black Hole Mergers in the First Advanced LIGO Observing Run*, Phys. Rev. X **6** (2016) 156.
- [12] B.P. Abbott, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.
- [13] B.P. Abbott *et al*, *GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2*, Phys. Rev. Lett. **118** (2017) 221101.
- [14] B.P. Abbott *et al*, *GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **119** (2017) 141101.
- [15] B.P. Abbott *et al*, *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. **119** (2017) 161101.
- [16] K. Akiyama *et al*, *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*, The Astrophysical Journal **875** (2019) L4.
- [17] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s relativity*, (Clarendon Press, Oxford UK - 1992).
- [18] R.M. Wald, *General Relativity*, (University of Chicago Press, Chicago U.S.A. and London U.K. - 1984)

- [19] B.F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge U.K. - 2009).
- [20] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (John Wiley and Sons, New York U.S.A - 1972).
- [21] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman and Company, San Francisco U.S.A - 1973).
- [22] P.A.M. Dirac, *Generalized Hamiltonian Dynamics*, Canadian Journal of Mathematics **2** (1950) 129.
- [23] P.A.M. Dirac, *The Hamiltonian Form of Field Dynamics*, Canadian Journal of Mathematics **3** (1951) 1.
- [24] P.G. Bergmann, *Non-Linear Field Theories*, Physical Review **75** (1949) 680.
- [25] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, *Republication of: The dynamics of general relativity*, General Relativity and Gravitation **40** (2008) 1997.
- [26] R. L. Seliger and G. B. Whitham, *Variational principles in continuum mechanics*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **305** (1968) 1.
- [27] B.F. Schutz, *Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle*, Phys. Rev. D **2** (1970) 2762.
- [28] B.F. Schutz, *Hamiltonian Theory of a Relativistic Perfect Fluid*, Phys. Rev. D **4** (1971) 3559.
- [29] L. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems*, Phys. Rev. Lett **60** (1988) 1692.
- [30] J. Barcelos-Neto and E. S. Cheb-Terrab, *Faddeev-Jackiw Quantization in Superspace*, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **54** (1992) 133.
- [31] E.M.C. Abreu, *Noncommutativity and Duality through the Symplectic Embedding Formalism*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **59** (2010) 1.
- [32] G.A. Monerat, E.V.C Silva, C. Neves, G. Oliveira-Neto, L.G.R. Rodrigues, M.S. Oliveira, *Can noncommutativity affect the whole history of the universe?*, International Journal of Modern Physics D **26** (2017) 175022.
- [33] G. Oliveira-Neto and A. R. Vaz, *Noncommutative cosmological model in the presence of a phantom fluid*, The European Physical Journal Plus **132** (2017) 1009.
- [34] R.A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, (Wiley, Chichester U.K. - 2003).