

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF



Tese de doutoramento

Modelos cosmológicos quânticos no contexto
da gravitação de Hořava-Lifshitz

Laysa Gonçalves Martins

21 DE MAIO DE 2019

JUIZ DE FORA–MG, BRASIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – DF

Tese de doutoramento

**Modelos cosmológicos quânticos no contexto
da gravitação de Hořava-Lifshitz**

Autora: Laysa Gonçalves Martins

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Tese de doutoramento submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Física.

21 DE MAIO DE 2019

JUIZ DE FORA-MG, BRASIL

Dedicatória

Ao desenvolvimento e incentivo a ciência:

*“Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil -
e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos (Albert Einstein)”.*

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças e iluminado o meu caminho para que pudesse estar concluindo mais uma etapa.
- Ao Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto, pela paciência, ensinamentos, apoio, disponibilidade e orientação durante todo o período do doutorado.
- Aos professores, Dr. Ilya Lvovich Shapiro, Dr. Jorge Ananias Neto, Dr. José Alberto Casto Nogales Vera e Dr. Júlio César Fabris, por terem aceitado o convite de participar da banca e contribuir de forma significativa para meu trabalho.
- Agradeço a minha família e todos os amigos do mestrado e doutorado pelo apoio, companhia, discussões e momentos de descontração.
- Aos professores do Departamento de Física assim como ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora. E aos funcionários, em especial, o secretário da nossa Pós-Graduação, o Sr. Domingos Lopes.
- Agradeço à CAPES por financiar meus quatro anos de doutorado e a FAPEMIG por financiar direta e/ou indiretamente o meu projeto de doutorado.

A vida é muito curta para ser pequena.

Mário Sérgio Cortella

Resumo

Nessa tese, obtivemos três resultados, dois desses estão relacionados a modelos cosmológicos quânticos baseados na teoria gravitacional de Hořava-Lifshitz (HL). Sendo um para o modelo de HL simplificado para o início do Universo e o segundo para um modelo de HL mais geral. Nesses modelos a matéria foi descrita por um fluido perfeito de radiação. Mostramos que esses modelos cosmológicos quânticos baseados na teoria gravitacional de HL são livres de singularidades. Determinamos ainda nessa tese, a entropia emaranhada de von Neumann para um modelo de cosmologia quântica baseado na relatividade geral. Foram estudados dois casos em que o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico e a matéria é descrita por um fluido de radiação, no primeiro caso, e de poeira no segundo caso. Para calcularmos a entropia emaranhada como uma função apenas do fator de escala, utilizamos a trajetória de Bohm para essa quantidade. Verificamos que a entropia emaranhada de von Neumann é uma função crescente, estando em acordo com a segunda lei da Termodinâmica.

Palavras chaves: Modelo de Hořava-Lifshitz, interpretação de *Muitos Mundos*, interpretação de *de Broglie-Bohm*, entropia emaranhada de von Neumann.

Abstract

On this thesis, we obtained three results, two of which are related to the quantum cosmological models based on the Hořava-Lifshitz (HL) gravitational theory. The first one for the simplified HL model for the beginning of the Universe and the second one for a more general HL model. In these models the matter was described by a perfect radiation fluid. We have shown that these quantum cosmological models based on the HL gravitational theory are free of singularities. We further determined in this thesis the entanglement entropy of von Neumann for a model of quantum cosmology based on general relativity. We studied two cases in which space-time is homogeneous and isotropic and the matter is described by a radiation fluid, in the first case and dust, in the second case. In order to calculate the entanglement entropy as a function of scale factor only, we use the Bohm trajectory for this quantity. We have verified that the von Neumann entanglement entropy is an increasing function, being in agreement with the second law of Thermodynamics.

Keywords: Hořava-Lifshitz model, interpretation of *Many Worlds*, interpretation of *de Broglie-Bohm*, von Neumann entanglement entropy.

Lista de Figuras

3.1	Campo vetorial \mathbf{dt} que evolui da hipersuperfície S_1 até a hipersuperfície S_2 .	16
5.1	$\langle a \rangle$ ou $a(T)$ para os três casos: (i) $k = 1$, $g_s = 1/5$; (ii) $k = 0$, $g_s = 1/5$; (iii) $k = -1$, $g_s = 1/5$.	64
5.2	Potencial quântico sobre a trajetória de Bohm para os três casos descritos no texto com $T_0 = 0$. Para (i) $k = 1$, $g_s = 1/5$; (ii) $k = 0$, $g_s = 1/5$; (iii) $k = -1$, $g_s = 1/5$.	65
6.1	As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$. Na esquerda $V(a)$ usamos $g_c = 10$ e na direita $g_c = 90$.	73
6.2	As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$. À esquerda para o $\langle a \rangle$ usamos $g_c = 10$ e à direita $g_c = 90$.	73
6.3	As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_c = 10$. Na esquerda, para $V(a)$, usamos $g_\Lambda = -1$ e à direita $g_\Lambda = -25$.	74
6.4	As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_c = 10$. À esquerda o $\langle a \rangle$ sendo usado $g_\Lambda = -1$ e no lado direito $g_\Lambda = -25$.	75
6.5	As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_s = -2$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. Na esquerda, usamos para $V(a)$, $g_r = 40$ e à direita $g_r = 80$.	76

6.6	As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. À esquerda o $\langle a \rangle$ usamos $g_r = 40$ e à direita $g_r = 80$	76
6.7	As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_\Lambda = 0$, $g_r = 120$, $g_c = 20$. Na esquerda, usamos para $V(a)$, $g_s = -20$ e na direita $g_s = -120$	77
6.8	As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_\Lambda = 0$, $g_r = 120$, $g_c = 20$. Na esquerda para o $\langle a \rangle$ usamos $g_s = -20$ e na direita $g_s = -120$	78
6.9	$\langle a \rangle$ e $\langle a \rangle - \alpha \sigma_a$ para dois modelos diferentes durante o intervalo de tempo $0 < \tau < 500000$. A figura da esquerda é para o modelo com: $g_c = 90$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$, $g_s = -2$ e $\mathcal{N} = 2$. A figura da direita é para o modelo com: $g_s = -20$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$ and $\mathcal{N} = 10$	79
6.10	As figuras mostram as trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_c = 10$ e na direita $g_c = 90$	81
6.11	As figuras das trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_c = 10$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_\Lambda = -1$ e na direita $g_\Lambda = -25$	82
6.12	As figuras das trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_r = 40$ e na direita $g_r = 80$	83
6.13	As figuras das trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_s = -20$ e na direita $g_s = -120$	84
6.14	Na figura da esquerda, mostramos o potencial quântico Q como uma função do tempo τ . No lado direito da figura, mostramos o potencial quântico Q como uma função do fator de escala a . Para ambas as figuras, o modelo tem os seguintes valores para os parâmetros: $g_\Lambda = -1$, $\mathcal{N} = 2$, $g_c = 10$, $g_r = 120$ and $g_s = -2$. O Q mostrado acima, corresponde à trajetória Bohmiana de a apresentado no lado esquerdo da figura 6.11.	86
7.1	Região espacial esférica dividida em dois subsistemas A e B.	92

- 7.2 *Diminuição da entropia $S(a_D)$ mantendo c_0 fixo e aumentando γ . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1/4$, $a_0 = 1/4$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1$, $a_0 = 1$ e $a_{inf} = 14345$ 96*
- 7.3 *Aumento da entropia $S(a_D)$ mantendo γ fixo e aumentando c_0 . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/6$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = 1/12$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/2$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = 1/4$ e $a_{inf} = 14345$ 96*
- 7.4 *Aumento da entropia $S(a_D)$ mantendo c_0 e a_{inf} fixos e variando γ . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1$, $a_0 = 1$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1/100$, $a_0 = (1/100)^{2/3}$ e $a_{inf} = 14345$ 99*
- 7.5 *Diminuição da entropia $S(a_D)$ mantendo γ e a_{inf} fixos e variando c_0 . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/2$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = (1/2)^{(5/3)}$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/6$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = (1/6)(1/2)^{2/3}$ e $a_{inf} = 14345$ 99*

Lista de publicações

- G. Oliveira-Neto, L.G. Martins, G.A. Monerat & E.V. Corrêa Silva; *DeBroglie-Bohm interpretation of a Hořava-Lifshitz quantum cosmology model*, Modern Physics Letters A, **33** 02 (2018) 1850014.

- G. Oliveira-Neto, L.G. Martins, G.A. Monerat & E.V. Corrêa Silva; *Quantum cosmology of a Hořava-Lifshitz model coupled to radiation*. (arXiv:1901.04640) (aceito para publicação: International Journal of Modern Physics D)

- G. Oliveira-Neto & L.G. Martins; *von Neumann entropy to a quantum cosmology model with perfect fluid*. (Em preparação)

Notações e convenções

- FRW → Métrica de Friedmann-Robertson-Walker
- RG → Teoria da Relatividade Geral
- HL → Teoria de Hořava-Lifshitz
- ME → Método Espectral
- Usaremos o sistema de unidades naturais de medida $c = \hbar = 1$. Nesse sistema, $[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [1/\text{massa}] = [1/\text{energia}]$.
- Os índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos de 1 a 3.
- A assinatura utilizada é $(-+++)$, de modo que a métrica induzida sobre as hipersuperfícies espaciais sejam positivas.
- Derivadas ordinárias

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

são indicadas por ∂_μ ou por uma vírgula. Por exemplo, a derivada de um campo escalar ϕ é

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu\phi = \phi, \mu.$$

- Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são definidos como

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}).$$

- A derivada covariante direcional é definida por:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu.$$

- O tensor curvatura ou de Riemann-Christoffel é definido por:

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}.$$

- O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são definidos, respectivamente, pelas seguintes contrações:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\kappa_{\mu\kappa\nu}, \\ R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Lista de publicações	ix
Notação e convenções	x
Conteúdo	xiii
1 Introdução	1
2 Cosmologia Relativística	7
2.1 Princípio Cosmológico e Princípio de Weyl	7
2.2 Universo de Friedmann-Robertson-Walker	8
2.3 A geometria dos espaços com curvaturas constantes	9
2.3.1 Constante de curvatura $k = 1$	9
2.3.2 Constante de curvatura $k = 0$	10
2.3.3 Constante de curvatura $k = -1$	11

3	Teoria de Hořava-Lifshitz e Cosmologia aplicada a um fluido perfeito	13
3.1	Motivação	13
3.2	Formalismo ADM	14
3.3	Curvaturas Intrínseca e Extrínseca	19
3.4	Lagrangiana e a Hamiltoniana ADM	22
3.5	Ação na teoria de Hořava-Lifshitz	29
3.6	A métrica do modelo	31
3.7	Elementos da ação	31
3.7.1	Parte cinética	31
3.7.2	Parte potencial	33
3.8	Ação completa	38
3.9	Formalismo de Schutz	40
3.9.1	Tensor momento-energia e as equações de movimento	44
3.9.2	Equações de movimento na representação de potenciais-velocidade	46
3.9.3	Universo de FRW com fluido perfeito	47
4	Quantização	50
4.1	Processo de quantização	50
4.2	Interpretação de Muitos Mundos	52
4.3	Interpretação de de Broglie-Bohm	53
5	Modelo de Hořava-Lifshitz simplificado para o início do Universo	59
5.1	O modelo quântico e o valor esperado do fator de escala	59
5.2	A interpretação de de Broglie-Bohm	62
6	Cosmologia quântica de um modelo de Hořava-Lifshitz acoplado com a radiação	66
6.1	Modelo clássico de Hořava-Lifshitz acoplado a radiação	68
6.2	Interpretação de Muitos Mundos	69
6.2.1	Equação de autovalor e método espectral	69
6.2.2	Valores esperados do fator de escala e desvio padrão	71

6.3	Interpretação de de Broglie-Bohm	80
6.3.1	Trajelórias Bohmianas de a	80
6.3.2	Potencial quântico de Bohm Q	85
6.4	Considerações finais	87
7	Entropia de von Neumann para um modelo cosmológico quântico com fluido perfeito	88
7.1	Motivação	89
7.2	Modelo cosmológico	91
7.3	Entropia de von Neumann	94
7.4	Radiação ($\omega = 1/3$)	95
7.5	Poeira ($\omega = 0$)	97
7.6	Considerações finais	100
8	Conclusões	102
9	Apêndice	108
9.1	Formalismo ADM	108
9.2	Ação para o modelo de Hořava-Lifshitz	109
9.2.1	Parte cinética	109
9.2.2	Parte potencial	111
9.3	Ação completa	120
9.4	Interpretação de de Broglie-Bohm	120
	Bibliografia	123

CAPÍTULO 1

Introdução

A relatividade geral é atualmente a mais bem sucedida teoria da gravidade, porque explica de maneira precisa vários fenômenos observacionais e também prediz vários novos, que foram confirmados ao longo dos anos. O mais recente foi a primeira detecção de ondas gravitacionais [1]. A aplicação da relatividade geral à cosmologia deu origem a uma descrição muito completa e detalhada do nascimento e evolução do Universo. Infelizmente, a relatividade geral não está livre de problemas. Em uma série de teoremas, mostrou-se que, para condições muito gerais e razoáveis, uma grande classe de espaços-tempos que satisfazem as equações de campo da relatividade geral desenvolvem singularidades [2]. Essas singularidades se desenvolvem sob condições gravitacionais extremas e, quando aparecem, a relatividade geral perde seu poder preditivo. Uma proposta para eliminar essas singularidades foi a quantização da relatividade geral. Infelizmente, foi mostrado que a relatividade geral não é uma teoria renormalizável [3]. Após essa descoberta, muitas teorias geométricas da gravidade, diferentes da relatividade geral e perturbativamente renormalizáveis, foram introduzidas. Lamentavelmente, essas teorias produzem fantasmas massivos em seu espectro físico e não são teorias unitárias [4].

Em 2009 Petr Hořava introduziu uma teoria geométrica da gravidade com uma propri-

idade diferente [5]. Em sua teoria, hoje conhecida como teoria de Hořava-Lifshitz (HL), existe uma escala anisotrópica entre espaço e tempo. Sua inspiração veio da física da matéria condensada, onde a anisotropia entre espaço e tempo é comum e é representada por um expoente crítico dinâmico z [6–9]. Para sistemas físicos que satisfazem a invariância de Lorentz $z = 1$. A motivação principal de Hořava para a introdução dessa anisotropia é que ela melhora o comportamento a curta distância da teoria. Essa anisotropia significa que a simetria de Lorentz é quebrada, pelo menos em altas energias, onde ocorre a assimetria entre espaço e tempo. Em baixas energias, a teoria HL tende a RG, recuperando a simetria de Lorentz. Como discutido por Hořava [5], uma teoria da gravidade usando essas idéias é *power-counting* renormalizável, em 3+1 dimensões, para $z = 3$. Além disso, a RG é recuperada quando para $z = 1$.

A teoria HL foi formulada, originalmente, com o auxílio do formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [10]. No formalismo ADM, a métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) é decomposta em termos da métrica tridimensional h_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), de seções espaciais, do vetor *shift* N_i e da função *lapse* N , que é visto como um campo de calibre para reparametrizações do tempo. Veremos esse formalismo com mais detalhes no capítulo 2. Em geral, todas essas quantidades dependem do espaço e do tempo. Em seu trabalho original, Hořava considerou a suposição simplificada de que N deveria depender apenas do tempo [5]. Esta suposição se tornou conhecida como a *condição projetável*. Embora muitos trabalhos tenham sido escritos sobre a teoria da HL usando a *condição projetável*, alguns autores consideraram as implicações de trabalhar na condição *não-projetável*. Em outras palavras, eles consideraram N como uma função do espaço e do tempo [11, 12]. A ação gravitacional da teoria de HL foi proposta de tal forma que a componente cinética foi construída separadamente da potencial. A componente cinética dessa teoria foi motivada pela componente cinética da RG, escrita em termos do tensor de curvatura extrínseca. Ela contém derivadas temporais da métrica espacial até a segunda ordem e um parâmetro livre (λ), que não está presente na componente cinética da relatividade geral. No limite de $\lambda \rightarrow 1$, recupera-se a componente cinética da RG. A componente potencial deve depender apenas da métrica espacial e de suas derivadas espaciais. Como uma teoria geométrica da gravidade, a componente potencial da teoria HL deve ser composta de contrações de

escalares do tensor de Riemann e suas derivadas espaciais.

Em seu trabalho original [5], Hořava considerou uma simplificação para reduzir o número de possíveis termos que contribuí para a componente potencial de sua teoria. É chamada de condição de *equilíbrio detalhado*. Embora essa condição realmente reduza o número de termos que contribuem para a componente potencial, alguns autores mostraram que, sem o uso dessa condição, é possível construir uma teoria bem definida e fenomenologicamente interessante, sem muitos outros termos extras [13,14]. Como outras teorias geométricas da gravidade, foi mostrado que a *versão projetável* da teoria HL, com a condição de *equilíbrio detalhado*, tem fantasmas e instabilidades [14,15]. A teoria HL foi aplicada à cosmologia e produziu modelos muito interessantes [16–23]. Para uma revisão recente sobre alguns aspectos da teoria HL, veja Ref. [15].

Uma das primeiras tentativas de quantizar a interação gravitacional foi a quantização canônica da relatividade geral (QCRG). Quando aplicada a espaços-tempos cosmológicos homogêneos, a QCRG dá origem à cosmologia quântica (CQ). Embora muitos físicos acreditem que a CQ não é a teoria correta para descrever o Universo, no nível quântico, um ponto importante foi levantado por essa teoria. Esse está relacionado com a interpretação dessa teoria quântica quando aplicada a todo o Universo. A interpretação de Copenhague da mecânica quântica não pode ser aplicada a essa teoria. Uma das razões é porque não é possível utilizar uma interpretação estatística a um sistema composto de todo o Universo. Não se pode repetir as experiências para esse sistema. Duas interpretações importantes da mecânica quântica que podem ser usadas na CQ são: a interpretação de *Muitos Mundos* [29] e a interpretação de *de Broglie-Bohm* [30,63]. Em muitos aspectos, elas levam aos mesmos resultados que a interpretação de *Copenhague* e podem ser aplicados a um sistema composto de todo o Universo. A *Muitos Mundos* é a interpretação mais comumente usada em CQ, embora a interpretação de *de Broglie-Bohm* tenha sido aplicada a vários modelos de cosmologia quântica com grande sucesso. [23,31–37]. Veremos mais detalhes dessas interpretações no capítulo 4. Na maioria dos trabalhos de CQ, os autores calculam o valor esperado para o fator de escala (interpretação de *Muitos Mundos*) e a trajetória do fator de escala (interpretação de *de Broglie-Bohm*) e mostram que essa quantidade nunca vai à zero. Esses resultados dão uma forte indicação de que esses

modelos estão livres de singularidades, no nível quântico. Outra quantidade importante introduzida pela interpretação de *de Broglie-Bohm* é o potencial quântico (Q) [30, 63]. Para os modelos de CQ, na interpretação de *de Broglie-Bohm*, a determinação de Q ajuda a entender por que o fator de escala nunca desaparece. Essas interpretações da mecânica quântica e de idéias relacionadas tem sido usada por muitos autores na cosmologia quântica ao longo dos anos, como por exemplo: [23, 31–37].

Na presente tese, estudaremos dois modelos cosmológicos baseados da teoria de Hořava-Lifshitz, em nível quântico. Em ambos os modelos foram utilizadas a métrica de FRW e seus conteúdos materiais são descritos por um fluido perfeito de radiação. Consideramos a *versão projetável* dessa teoria gravitacional sem a condição de *equilíbrio detalhado*. Usamos o formalismo ADM para escrever o hamiltoniano gravitacional do modelo e o formalismo variacional de Schutz para escrever o hamiltoniano do fluido perfeito. Quantizamos canonicamente os modelos, e obtivemos as equações de Wheeler-DeWitt. Essas equações dependem de vários parâmetros provenientes da teoria de HL. Para analisar as soluções das equações de Wheeler-DeWitt, que são funções de onda do universo, foram aplicadas a interpretação de Muitos Mundos e a interpretação de *de Broglie-Bohm*. Assim, o objetivo desses trabalhos foi analisar a existência de singularidades do tipo Big Bang do ponto de vista quântico por meio das interpretações de *Muitos Mundos* e de *de Broglie-Bohm*. No primeiro caso estudamos um modelo de HL simplificado para o início do Universo, como veremos em mais detalhes no capítulo 5. No segundo caso estudamos um modelo de HL mais geral, como veremos em mais detalhes no capítulo 6. Mostramos que esses modelos cosmológicos de gravitação de Hořava-Lifshitz são livres de singularidades. Podemos entender isso ao analisar o valor esperado do fator escalar $\langle a \rangle$ e a trajetória de Bohm, os quais nunca vão à zero. Também calculamos o potencial quântico. Essa quantidade ajuda a entender por que o fator de escala nunca desaparece.

Por outro lado, sabe-se que um dos grandes interesses da física teórica atualmente é entender o Universo primordial, o qual envolve as leis da física que governam o mundo microscópico, descrito pela mecânica quântica, assim como o mundo macroscópico, governado pela relatividade geral. Além disso, esse sistema possui um número grande de partículas, nas quais o tratamento termodinâmico e estatístico se fazem necessários. Uma

quantidade física que traz informações sobre a organização do sistema é a entropia. Essa quantidade física contém informações de como o mundo microscópico reflete no mundo macroscópico, além da irreversibilidade dos processos e de ser interpretada como um canal de informação. Nesse sentido, determinamos nessa tese, a entropia emaranhada de von Neumann [53] para um modelo de cosmologia quântica baseado na RG [82]. Foram estudados dois casos em que o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico e a matéria é descrita por um fluido de radiação, no primeiro caso, e de poeira no segundo caso. Para determinarmos a entropia emaranhada como uma função apenas do fator de escala utilizamos a trajetória de Bohm para essa quantidade. Fizemos um estudo detalhado de como a entropia emaranhada como função do fator de escala assim como em função do tempo dependem dos parâmetros da teoria. Verificamos que a entropia emaranhada é uma função crescente estando em acordo com a segunda lei da Termodinâmica.

Essa tese está estruturada da seguinte maneira. O capítulo 2 apresenta uma breve revisão dos princípios fundamentais do Modelo Cosmológico Padrão, que são o Princípio Cosmológico e o Princípio de Weyl. Traz uma discussão dos modelos de Universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e uma análise da geometria para todos os casos da constante de curvatura. O capítulo 3 traz os formalismos utilizados para obtermos a forma hamiltoniana dos modelos cosmológicos baseados na teoria de Hořava-Lifshitz acoplados a um fluido perfeito. São apresentados os cálculos do formalismo ADM, que é uma formulação hamiltoniana para a parte geométrica do modelo, ou seja, referente a teoria de HL, e do formalismo de Schutz, que fornece a formulação hamiltoniana para a matéria, a qual será descrita por um fluido perfeito. No capítulo 4 é apresentado o conceito de quantização, assim como duas interpretações da mecânica quântica, a interpretação de *Muitos Mundos* e a interpretação de *de Broglie-Bohm*. Nos próximos capítulos, 5, 6 e 7, são apresentados os resultados obtidos por essa tese. No capítulo 5 foi considerado um modelo de cosmologia quântica de HL acoplado a radiação, simplificado, para o início do Universo. No capítulo 6 foi estudado um modelo de cosmologia quântica de HL acoplado a radiação, mais geral do que aquele estudado no capítulo anterior, com todos os parâmetros dessa teoria. E por fim, no capítulo 7 foi calculada a entropia emaranhada de von Neumann para um modelo cosmológico quântico baseado na RG. No capítulo de conclusões e perspectivas,

descrevemos os resultados obtidos ao longo dessa tese e apresentamos os principais projetos e perspectivas futuras associados ao presente trabalho.

Neste capítulo serão apresentados os Princípios Cosmológicos e de Weyl, os quais são a base do Modelo Cosmológico Padrão. Esses princípios quando aplicados à teorias geométricas conduzem a um elemento de linha, cujos modelos cosmológicos são descritos pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Para os modelos de FRW foram analisadas as geometrias para todos os casos da constante de curvatura.

2.1 Princípio Cosmológico e Princípio de Weyl

Há dois princípios importantes que dão base ao Modelo Cosmológico Padrão, sendo eles, o Princípio Cosmológico e o Princípio de Weyl [39]. Segundo o Princípio Cosmológico não há nenhuma localização especial para o observador no Universo. Isso implica que o Universo é homogêneo e isotrópico acima de 200 Mpc [39], isto é, o Universo é o mesmo em todos os lugares e em todas as direções, quando se consideram grandes escalas. Assim, a homogeneidade assegura a invariância por translação, enquanto que a isotropia garante que o Universo é invariante por rotação. O Princípio de Weyl se refere a uma rede imaginária de coordenadas, que são constituídas por linhas. As linhas dessa rede são geodésicas por

onde as galáxias se movimentam e o conjunto delas forma uma hipersuperfície espacial isotrópica e homogênea, estando em acordo com o Princípio Cosmológico. Essas linhas de galáxias estão se movendo separadamente e de maneira a se separarem umas das outras e não interagem entre si. Nesse sentido, o Princípio de Weyl propõe que o Universo seja equivalente a um fluido perfeito. Com boa aproximação, podemos considerar o seguinte tensor momento-energia para um fluido perfeito, o qual descreve a matéria no Universo, em sua forma contravariante:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde U^μ é a quadri-velocidade do fluido em um sistema de referencial comóvel, ρ é a densidade do fluido perfeito e p é a sua pressão. Devido a homogeneidade e isotropia estabelecidas pelo Princípio Cosmológico, a pressão p e a densidade ρ devem possuir apenas dependência temporal.

2.2 Universo de Friedmann-Robertson-Walker

Devido a homogeneidade e isotropia impostas pelo Princípio Cosmológico, vamos estudar modelos cosmológicos caracterizados pela presença da curvatura constante k em sua geometria. Esses modelos cosmológicos são descritos pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker, o qual é uma solução exata das equações de campo de Einstein da relatividade geral, que descreve um Universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico.

No modelo de FRW o espaço tridimensional com curvatura constante é dado por um termo espacial do intervalo invariante, o qual pode ser obtido através do tensor de Riemann tridimensional definido da seguinte maneira [39],

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (2.2)$$

onde k pode assumir os valores 0, +1, -1. Devido a homogeneidade e isotropia, o intervalo invariante tridimensional $d\sigma^2$ pode ser escrito em coordenadas esféricas como:

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.3)$$

onde θ e ϕ são os ângulos esféricos, r é o raio da esfera e $\lambda(r)$ é uma função radial a ser determinada. Destacamos que o papel da exponencial na equação para a métrica tridimensional dada em (2.3) é para manter a função $\lambda(r)$ positiva.

Por meio das equações (2.2) e (2.3), pode-se determinar a função $\lambda(r)$. Assim, o intervalo invariante dado pela equação (2.3) é dado por:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.4)$$

Como o Princípio Cosmológico impõe que todos os pontos do espaço devem se contrair ou se expandir igualmente, deve-se introduzir uma função com dependência temporal multiplicando o intervalo invariante dado em (2.4). Essa função será denotada por $a(t)$ e será denominada de fator de escala. Assim, teremos:

$$d\sigma^2 = a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.5)$$

Para o intervalo invariante quadridimensional teremos:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.6)$$

onde a equação (2.6) é conhecida como elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker. Para um Universo primordial, quando $a(t) \rightarrow 0$, essa quantidade representa uma singularidade física.

2.3 A geometria dos espaços com curvaturas constantes

Vamos fazer um estudo do significado das diferentes geometrias dos espaços para cada valor da constante de curvatura k presente no elemento de linha de FRW. Para isso, considere apenas a parte espacial da equação (2.6) e que $t = t_0$, assim, $a(t_0) = a_0$, logo teremos que:

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.7)$$

2.3.1 Constante de curvatura $k = 1$

Substituindo $k = 1$ na equação (2.7), obtemos:

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.8)$$

Observe que quando $r \rightarrow 1$, temos uma singularidade na equação (2.8). Vamos, por conveniência, introduzir uma nova variável χ , cuja forma será dada por,

$$r = \sin \chi. \quad (2.9)$$

Substituindo a equação (2.9) em (2.8), temos que,

$$d\sigma^2 = a_0^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.10)$$

Uma alternativa para entender a geometria desse espaço é introduzi-lo em um novo espaço euclidiano quadridimensional descrito pela equação,

$$d\sigma^2 = db^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.11)$$

Considere as seguintes transformações:

$$b = a_0 \cos \chi, \quad (2.12)$$

$$x = a_0 \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.13)$$

$$y = a_0 \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.14)$$

$$z = a_0 \sin \chi \cos \theta. \quad (2.15)$$

Calculando os elementos diferenciais das equações (2.12)-(2.15) e utilizando (2.10) para substituir em (2.11), podemos encontrar:

$$b^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) descreve uma superfície esférica tridimensional de raio a_0 e intervalos de coordenadas $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Portanto, o Universo com a curvatura $k = 1$ é descrito por uma superfície esférica tridimensional sendo denominado Universo fechado.

2.3.2 Constante de curvatura $k = 0$

Substituindo $k = 0$ na equação (2.7), obtemos:

$$d\sigma^2 = a_0^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.17)$$

Inserindo as seguintes transformações de coordenadas:

$$x = a_0 r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.18)$$

$$y = a_0 r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.19)$$

$$z = a_0 r \cos \theta, \quad (2.20)$$

obtém-se a seguinte equação:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.21)$$

A equação (2.21) descreve o espaço euclidiano tridimensional em coordenadas cartesianas. A geometria representada pelo elemento de linha (2.17) é plana. Portanto, o Universo que possui curvatura $k = 0$ é descrito por um espaço plano e é chamado de aberto [39].

2.3.3 Constante de curvatura $k = -1$

Substituindo $k = -1$ na equação (2.7), obtemos:

$$d\sigma^2 = a_0^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.22)$$

Observe que quando $r \rightarrow -1$, temos uma singularidade na equação (2.22). Por conveniência, vamos introduzir uma nova variável χ , cuja forma será dada por,

$$r = \sinh \chi. \quad (2.23)$$

Substituindo a equação (2.23) em (2.22), temos que,

$$d\sigma^2 = a_0^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.24)$$

Para entender a geometria deste espaço devemos introduzi-lo em um espaço plano de Minkowski quadridimensional descrito pela equação,

$$d\sigma^2 = -db^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.25)$$

Considere as seguintes transformações:

$$b = a_0 \cosh \chi, \quad (2.26)$$

$$x = a_0 \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.27)$$

$$y = a_0 \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.28)$$

$$z = a_0 \sinh \chi \cos \theta. \quad (2.29)$$

Calculando os elementos diferenciais das equações (2.26)-(2.29) e utilizando (2.24) para substituir em (2.25), podemos encontrar:

$$b^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2. \quad (2.30)$$

A equação (2.30) descreve uma superfície hiperbólica com intervalos de coordenadas $0 \leq \chi \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Portanto, o Universo com a curvatura $k = -1$ é descrito por um espaço hiperbólico sendo denominado Universo aberto.

Teoria de Hořava-Lifshitz e Cosmologia aplicada a um fluido perfeito

Nesse capítulo será apresentado o referencial teórico necessário para a determinação da ação de HL. Nesse sentido, apresentaremos os formalismo ADM e de Schutz.

3.1 Motivação

A algum tempo, questiona-se sobre a relatividade geral não ser uma teoria fundamental da gravidade e da necessidade de ser alterada, quando se considera altas energias. Dentre as muitas propostas que existem sobre uma teoria da gravidade que complementa a teoria de Einstein a altas energias, foi apresentada em 2009 por Petr Hořava [5], uma teoria geométrica da gravidade. Essa teoria propõe modificações na relatividade geral quando se está no limite ultravioleta (UV), já que o procedimento de quantização apresenta dificuldades.

Em sua teoria, hoje conhecida como teoria de Hořava-Lifshitz (HL), existe uma escala anisotrópica entre espaço e tempo no regime para altas energias. Sua inspiração veio da física da matéria condensada, onde a anisotropia entre espaço e tempo é comum e é

representada por um expoente crítico dinâmico z [6–8, 11],

$$t \rightarrow b^z t \quad \mathbf{x} \rightarrow b\mathbf{x},$$

onde b é um parâmetro de escala. A principal motivação de Hořava para a introdução dessa anisotropia é que ela melhora o comportamento a curta distância da teoria. Assim, no limite de altas energias, tem-se que as derivadas espaciais de maior ordem não estão acompanhadas pelas derivadas temporais, ocasionando numa quebra de simetria de Lorentz. Para sistemas físicos que satisfazem a invariância de Lorentz, tem-se que $z = 1$.

Devido à assimetria entre espaço e tempo presente em sua teoria geométrica da gravidade, Hořava decidiu formulá-la usando o formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) [76], que divide o espaço-tempo quadridimensional em seções espaciais tridimensionais. Dessa maneira, ele consegue inserir as derivadas espaciais de ordem superior na lagrangiana, sem que seja necessário inserir tais derivadas na coordenada temporal. Esse tema será tratado na próxima seção.

3.2 Formalismo ADM

O formalismo ADM recebe este nome, pois foi um trabalho desenvolvido por Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner (ADM) no final da década de 1950 e início da década de 1960 [52]. O formalismo ADM é uma formulação hamiltoniana da relatividade geral, e também é conhecido por foliação da relatividade geral. Nesse formalismo o espaço-tempo quadri-dimensional é descrito por superfícies tridimensionais, conhecidas por hipersuperfícies, que evoluem no tempo. Isso permite, do ponto de vista matemático, decompor o espaço-tempo em espaço + tempo, de modo que os campos tensoriais são trabalhados apenas no espaço tridimensional, isto é, nas hipersuperfícies. No formalismo ADM, a métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) é decomposta em termos da métrica tridimensional h_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), de seções espaciais. Nesse formalismo, os verdadeiros graus de liberdade do campo gravitacional estão nas hipersuperfícies espaciais que folheiam o espaço-tempo, e a dinâmica do campo gravitacional pode ser entendida como a evolução no tempo dessas hipersuperfícies.

Das dez componentes independentes da métrica $g_{\alpha\beta}$ de espaços-tempos quadri-dimensionais, somente seis destas podem ser calculadas a partir das equações de Einstein. As quatro componentes restantes representam uma liberdade que se tem em aplicar transformações de coordenadas nas seis componentes “dinâmicas” que puderem ser calculadas. Nesse sentido, os autores do formalismo ADM utilizaram esse fato para reescreverem o formalismo da relatividade geral de tal forma que a métrica do espaço-tempo quadri-dimensional fosse separada em três partes: a primeira delas conteria as seis componentes “dinâmicas” de $g_{\alpha\beta}$ e representariam as seis componentes independentes de métricas, simétricas, h_{ij} , de hipersuperfícies tri-dimensionais, tipo-espaço, que chamaremos de Σ 's. Todavia os graus de liberdade não são os h_{ij} , mas as classes de equivalência dos h_{ij} sobre as transformações de coordenadas na 3-dimensões espaciais. As outras duas partes corresponderiam as quatro componentes independentes restantes de $g_{\alpha\beta}$ e seriam representadas pelo escalar N e pelo vetor N_i , o qual é definido sobre as hipersuperfícies tri-dimensionais, tipo-espaço com métrica h_{ij} . A função *lapse* N e o vetor *shift* N_i , não são quantidades dinâmicas, tendo que ser fixados externamente e elas especificam a maneira pela qual as hipersuperfícies, tri-dimensionais, tipo-espaço, “evoluíram” para dar origem ao espaço-tempo quadri-dimensional.

Por meio desse formalismo, podemos entender como podemos representar a forma dinâmica da relatividade geral. O espaço-tempo quadri-dimensional, dado pela métrica $g_{\mu\nu}$, será constituído pela evolução das seções espaciais, descritas pela métrica h_{ij} , com a ajuda de N e N_i . Assim podemos identificar que h_{ij} desempenha o papel de variável “dinâmica” dessa teoria. Nesse sentido, vamos reescrever todas as quantidades relevantes para as descrições Lagrangiana e Hamiltoniana da RG em termos das quantidades h_{ij} , N_i e N , para a partir da Hamiltoniana resultante obtermos a versão quântica dessa teoria. Começamos por reescrever a métrica $g_{\mu\nu}$.

Consideraremos duas hipersuperfícies tri-dimensionais, tipo-espaço definidas, respectivamente, nos instantes de tempo t (S_1) e $t + dt$ (S_2), como mostra a figura 3.1.

Para se calcular a distância entre pontos de uma mesma hipersuperfície, será introduzido em cada hipersuperfície, um tensor métrico h_{ij} , com assinatura Euclidiana. Para o

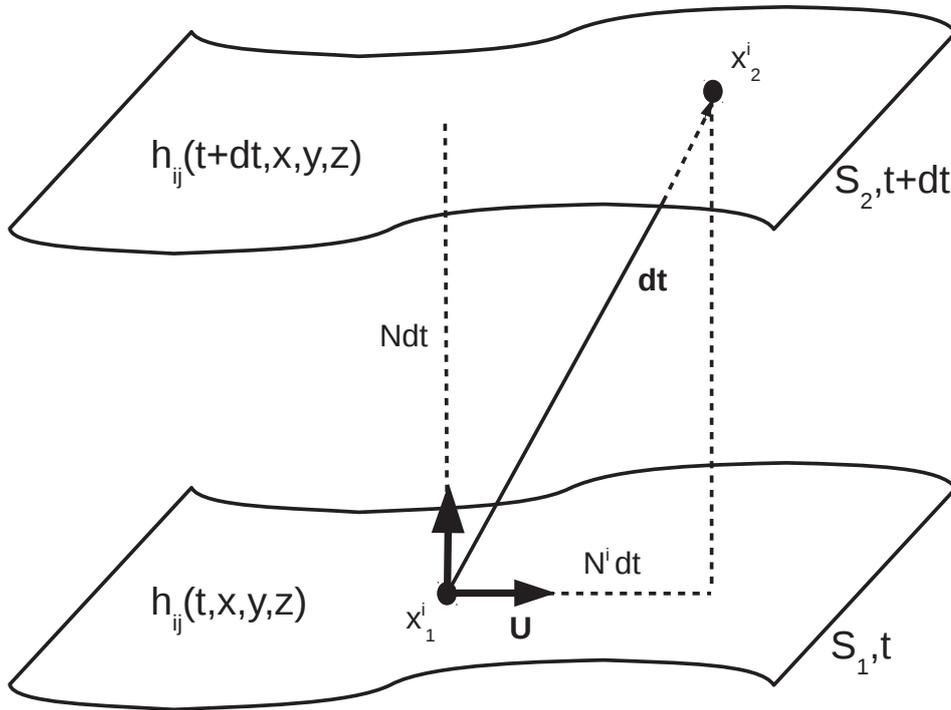


Figura 3.1: Campo vetorial \mathbf{dt} que evolui da hipersuperfície S_1 até a hipersuperfície S_2 .

caso de coordenadas cartesianas, essas métricas podem ser escritas como:

$$h_{ij}(t, x, y, z), \quad (3.1)$$

$$h_{ij}(t + dt, x, y, z). \quad (3.2)$$

As distâncias entre os pontos em uma mesma hipersuperfície serão dadas genericamente por:

$${}^{(3)}ds^2 = h_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.3)$$

onde h_{ij} pode assumir os valores (3.1) ou (3.2) dependendo em que hipersuperfície estejam os pontos em questão, e x^i são as coordenadas cartesianas de cada hipersuperfície.

Suponhamos agora que cada ponto da hipersuperfície S_1 “evolui”, para um ponto da superfície S_2 segundo a ação de um campo vetorial \vec{dt} , definido sobre S_1 , como mostrado na figura 3.1: $\vec{dt} = dt\hat{t}$. Esse campo vetorial, tem em cada ponto de S_1 uma direção genérica no espaço-tempo quadri-dimensional, de tal forma que ele tem projeções não-nulas sobre

as direções da normal \hat{n} e das tangentes \hat{x}_i a hipersuperfície S_1 , no ponto em questão. Essas projeções tem os seguintes valores, respectivamente:

$$\hat{n} \rightarrow Ndt, \quad (3.4)$$

$$\hat{U} \rightarrow N^i dt, \quad (3.5)$$

onde cada índice i em (3.5) corresponde ao valor da projeção de \vec{dt} sobre as direções \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} sobre S_1 . Por meio dessas duas projeções, poderemos calcular o intervalo entre os eventos x_1^i em S_1 e x_2^i em S_2 . Ao compararmos esse resultado com o intervalo calculado com a métrica $g_{\alpha\beta}$ do espaço-tempo quadri-dimensional, obteremos uma relação entre $g_{\alpha\beta}$ e as quantidades h_{ij} , N^i e N .

A separação entre x_1^i e x_2^i na direção da normal \hat{n} , de S_1 , dá o tempo próprio τ entre as superfícies S_1 e S_2 , e é obtido em termos de (3.4) por:

$$d\tau^2 = N^2 dt^2. \quad (3.6)$$

Já a distância própria entre esses dois pontos em S_1 , será dada pela separação entre x_1^i e a projeção de x_2^i ($P(x_2^i)$) sobre a superfície S_1 , podendo ser escrita da seguinte maneira em termos de (3.5):

$$P(x_2^i) = x_1^i + dx_1^i + N^i dt, \quad (3.7)$$

onde dx_1^i representa um deslocamento infinitesimal sobre a superfície S_1 . Com a ajuda de (3.1) e (3.7), podemos escrever:

$$\begin{aligned} P(x_2^i) - x_1^i &= dx_1^i + N^i dt, \quad \text{variação infinitesimal} \\ de^2 &= h_{ij}(dx_1^i + N^i dt)(dx_1^j + N^j dt). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assim, podemos entender que $h_{ij}(t, x^i)dx^i dx^j$ é uma quantidade infinitesimal de distância de uma hipersuperfície. O tempo próprio está relacionado com o tempo de coordenada pela função *lapse* N , por meio de $d\tau = N(t, x^i)dt$. A interpretação física de N e N^i é que a função *lapse* representa a taxa de fluxo do tempo próprio com respeito à t . Já a quantidade N^i representa o movimento tangencial da superfície S_1 depois de uma mudança infinitesimal do tempo. Para um melhor entendimento veja a figura 3.1.

A distância entre os eventos x_1^i e x_2^i , pode ser encontrada usando o Teorema de Pitágoras (pseudo) no espaço-tempo, quadri-dimensional, com assinatura Lorentziana e hiperbólico. Obtendo assim:

$$ds^2 = (\text{distância coordenada})^2 - (\text{tempo próprio})^2,$$

isto é,

$$ds^2 = de^2(\text{entre } P(x_2^i) \text{ e } x_1^i \text{ sobre } S_1) - d\tau^2(\text{entre } S_2 \text{ e } S_1). \quad (3.9)$$

Substituindo as equações dadas por (3.6) e (3.8), na equação (3.9), temos que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - N^2 dt^2, \\ ds^2 &= h_{ij} [dx^i dx^j + dx^i N^j dt + dx^j N^i dt + N^i dt N^j dt] - N^2 dt^2, \\ ds^2 &= h_{ij} N^i N^j dt^2 + h_{ij} N^i dt dx^j + h_{ij} dx^i N^j dt + h_{ij} dx^i dx^j - N^2 dt^2, \\ ds^2 &= (N_j N^j - N^2) dt^2 + N_j dt dx^j + N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde usamos que h_{ij} abaixa os índices contravariantes de tensores em S_1 , assim como $h^{ij} \equiv (h_{ij})^{-1}$, levanta os índices covariantes de tensores de S_1 . Destacamos que o índice 1 foi retirado em dx^i , equação (3.8), por simplicidade.

Ao se comparar (3.10) com o intervalo em função de $g_{\alpha\beta}$, obtemos que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.11) \\ ds^2 &= g_{0\nu} dx^0 dx^\nu + g_{i\mu} dx^i dx^\mu, \\ ds^2 &= g_{00} dx^0 dx^0 + g_{0j} dx^0 dx^j + g_{i0} dx^i dx^0 + g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned}$$

sabemos que $dx^0 = dt$, daí podemos identificar que:

$$\begin{aligned} g_{00} dx^0 dx^0 &= (N_j N^j - N^2) dt^2, \\ g_{0j} dx^0 dx^j &= N_j dt dx^j, \\ g_{i0} dx^i dx^0 &= N_i dx^i dt, \\ g_{ij} dx^i dx^j &= h_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned}$$

obtemos os seguintes valores das componenetes de $g_{\alpha\beta}$ em termos das quantidades de h_{ij} , N_i e N :

$$g_{tt} = N_j N^j - N^2; \quad g_{ti} = N_i; \quad g_{kt} = N_k; \quad g_{ik} = h_{ik}, \quad (3.12)$$

podemos escrever $g_{\alpha\beta}$ como sendo,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} N_j N^j - N^2 & N_k \\ N_i & h_{ik} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

A inversa de $g_{\alpha\beta}$, equação (3.13), é obtida diretamente ao invertermos (3.13) e é dada por:

$$g^{tt} = -\frac{1}{N^2}; \quad g^{tm} = \frac{N^m}{N^2}; \quad g^{kt} = \frac{N^k}{N^2}; \quad g^{km} = h^{km} - \frac{N^k N^m}{N^2}, \quad (3.14)$$

assim $g^{\alpha\beta}$ pode ser escrita como:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^m/N^2 \\ N^k/N^2 & h^{km} - N^k N^m/N^2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

As equações (3.12) e (3.13) fornecem a métrica do espaço-tempo quadri-dimensional em termos das quantidades introduzidas no split 3+1 (h_{ij}, N_i, N).

Também temos que:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = \sqrt{N^2 \det h_{ij}} = N\sqrt{h}.$$

Em resumo, vimos que o espaço-tempo quadri-dimensional agora é dividido em hipersuperfícies tridimensionais, nas quais o tempo é constante. A quantidade conhecida por função *lapse* descreve o movimento de uma hipersuperfície Σ_1 para uma outra hipersuperfície Σ_2 , a qual está num tempo posterior em relação a hipersuperfície Σ_1 . O movimento na própria hipersuperfície é dada por meio do vetor *shift*. As quantidades h_{ij} , N e N^i são as novas variáveis que definem o campo, uma vez que contêm a mesma informação que a métrica do espaço-tempo original.

3.3 Curvaturas Intrínseca e Extrínseca

Agora é necessário reescrever a curvatura no contexto do split 3+1, pois essa quantidade é fundamental na descrição da gravitação em relatividade geral. Para isso, observe que inicialmente estávamos interessados em descrever as seções espaciais tri-dimensionais em relação a um espaço-tempo quadri-dimensional. Nesse sentido, é importante conhecer

além da curvatura intrínseca, saber a sua curvatura em relação ao espaço-tempo quadridimensional, em que essa hipersuperfície está inserida. Essa quantidade que mede a curvatura de uma dada hipersuperfície n -dimensional em relação a um espaço $n + 1$ dimensional, em que esta hipersuperfície está embebida, é o tensor covariante de rank 2, simétrico, K_{ij} , chamado de curvatura extrínseca. Esse tensor é definido sobre a hipersuperfície n -dimensional.

A expressão matemática de K_{ij} , pode ser entendida como sendo a derivada covariante, no espaço-tempo $n + 1$ -dimensional, sobre a hipersuperfície n -dimensional, da normal a esta hipersuperfície:

$$K_{ij} = n_{i;j}. \quad (3.16)$$

Agora, vamos reescrever algumas das quantidades que aparecem na relatividade geral utilizando o formalismo ADM. Para isso, vamos reescrever a curvatura extrínseca K_{ij} , cuja medida é dada pelo tensor de Riemann, $R^i{}_{jkm}$, em função de h_{ij} , N_i , N .

A obtenção da expressão de $R^i{}_{jkm}$, em termos das quantidades introduzidas no split 3+1, é obtida usando a métrica h_{ij} da hipersuperfície espacial tridimensional. Obtendo:

$$R^i{}_{jkm} = \Gamma_{jm,k}^i - \Gamma_{jk,m}^i + \Gamma_{lk}^i \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^l, \quad (3.17)$$

onde

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{im} (h_{mj,k} + h_{mk,j} + h_{jk,m}). \quad (3.18)$$

Para reescrevermos uma expressão para K_{ij} vamos partir da sua expressão dada por (3.16) e do valor da normal n_i a hipersuperfície tri-dimensional. Observando a definição da componente do vetor \vec{dt} sobre a componente normal a superfície (3.4), podemos escrever o vetor normal como sendo dado por:

$$\hat{n} = N e_t. \quad (3.19)$$

Calculando a derivada covariante deste vetor, teremos que:

$$\begin{aligned} n_{i;k} &= \frac{\partial n_i}{\partial x^k} - {}^{(4)}\Gamma_{ik}^\sigma n_\sigma, \\ n_{i;k} &= -{}^{(4)}\Gamma_{ik}^\sigma n_\sigma, \end{aligned}$$

onde $n_{i;k}$ é a derivada covariante no espaço-tempo quadri-dimensional, $\partial n_i/\partial x^k = 0$ pois a normal não possui componente i e ${}^{(4)}\Gamma_{ik}^i$, assim a componente contravariante do Γ pode ser espacial ou temporal e ik são as componentes covariantes, as quais são espaciais pois foram fixadas inicialmente quando decidimos calcular o K_{ij} .

$$\begin{aligned}\Gamma_{0ik} &= \frac{1}{2}g_0^\beta [g_{\beta i,k} + g_{\beta k,i} - g_{ik,\beta}], \\ \Gamma_{0ik} &= -N [g^{00}\Gamma_{0ik} + g^{0m}(3)\Gamma_{mik}],\end{aligned}$$

usando (3.15):

$$\begin{aligned}\Gamma_{0ik} &= \frac{1}{2}\delta_0^0 [g_{0i,k} + g_{0k,i} - g_{ik,0}], \\ &= -N \left[-\frac{1}{N^2}\Gamma_{0ik} + \frac{N^m}{N^2}\Gamma_{mik} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} \right], \\ &= \frac{1}{N} [\Gamma_{oik} - N^m\Gamma_{mik}],\end{aligned}$$

usando a fórmula explícita de Γ em termos de $g_{\alpha\beta}$ (3.18):

$$\Gamma_{0ik} = \frac{1}{2N} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} - 2N_m\Gamma_{ik}^m \right],$$

usando (3.18) e a simetria de Γ_{ik}^m nos índices ik ,

$$n_{i;k} = \frac{1}{2N} \left[N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} \right], \quad (3.20)$$

onde $|$ significa derivação covariante sobre a hipersuperfície tri-dimensional. Das equações (3.16) e (3.20), obtemos imediatamente o resultado procurado:

$$K_{ik} = \frac{1}{2N} \left[N_{i|k} + N_{k|i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial t} \right]. \quad (3.21)$$

Agora que já conhecemos como escrever a curvatura intrínseca e a curvatura extrínseca de hipersuperfícies tri-dimensionais em termos de h_{ij} , N_i e N , vamos reescrever o tensor de Riemann de espaços-tempos quadri-dimensionais em função dessas curvaturas. Para isso, utilizaremos as equações de Gauss-Codazzi [40], equação (3.16), que são escritas em uma base ortonormal composta por uma base da hipersuperfície mais o vetor unitário normal \hat{n} , sendo obtido [76]:

$${}^{(4)}R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}R^m{}_{ijk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij}K_k{}^m - K_{ik}K_j{}^m), \quad (3.22)$$

$${}^{(4)}R^n{}_{ijk} = \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} {}^{(4)}R_{nijk} = -\frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij|k} - K_{ik|j}), \quad (3.23)$$

$${}^{(4)}R^{in}{}_{in} = (n_\alpha n^\alpha)^{-1} [K^2 - K_{ij}K^{ij}] - (n^\alpha n^\beta{}_{;\beta})_{;\alpha} + (n^\alpha n^\beta{}_{;\alpha})_{;\beta}. \quad (3.24)$$

As equações (3.22) e (3.23) são conhecidas por equações de Gauss e Codazzi.

3.4 Lagrangiana e a Hamiltoniana ADM

Como sabemos, a ação de Hilbert-Einstein que nos fornece as equações de Einstein, via o princípio variacional, é dada por:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} {}^{(4)}R, \quad (3.25)$$

onde ${}^{(4)}R$ é o escalar de curvatura do espaço-tempo e g é o determinante da métrica quadridimensional $g_{\alpha\beta}$. Considere o sistema de unidades adotado em *Notações e convenções*. Usando as equações de Gauss-Codazzi, podemos reescrever a densidade de Lagrangiana \mathcal{L}_G , a partir de (3.25) da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} {}^{(4)}R = \sqrt{-g} [{}^{(4)}R^{ij}{}_{ij} + 2{}^{(4)}R^{in}{}_{in}]. \quad (3.26)$$

De (3.22), obtemos que:

$${}^{(4)}R^{ij}{}_{ij} = [{}^{(3)}R + (n_\alpha n^\alpha)^{-1} (K_{ij}K^{ij} - K^2)], \quad (3.27)$$

onde $K \equiv K^i{}_i = trK$. De (3.24), obtemos que:

$${}^{(4)}R^{in}{}_{in} = (n_\alpha n^\alpha)^{-1} [K^2 - K_{ij}K^{ij}] - (n^\alpha n^\beta{}_{;\beta})_{;\alpha} + (n^\alpha n^\beta{}_{;\alpha})_{;\beta}. \quad (3.28)$$

Introduzindo as equações (3.27) e (3.28) na equação (3.26) ficamos com:

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g_{\mu\delta} R^{\delta}{}_{\alpha\mu\beta} = g^{\alpha\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = R^{\mu\beta}{}_{\mu\beta}, \\ &= 2R^{01}{}_{01} + 2R^{02}{}_{02} + 2R^{03}{}_{03} + R^{12}{}_{12} + R^{13}{}_{13} + R^{21}{}_{21} + \\ &+ R^{23}{}_{23} + R^{31}{}_{31} + R^{32}{}_{32}, \quad R^{0i}{}_{0i} = R^{i0}{}_{i0} \\ &= 2R^{ni}{}_{ni} + R^{ij}{}_{ij}, \end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta, \mu, \delta = 0, 1, 2, 3$. Temos que:

$${}^{(4)}R^m{}_{ijk} = {}^{(3)}R^m{}_{ijk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij}K_k{}^m - K_{ik}K_j{}^m),$$

que é a equação (3.22). Então, ${}^{(4)}R^{mi}{}_{jk} = {}^{(3)}R^{mi}{}_{jk} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K^i{}_j K^m{}_k - K^i{}_k K^m{}_j)$,

$${}^{(4)}R^{ij}{}_{ij} = {}^{(3)}R^{ij}{}_{ij} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K^j{}_i K^i{}_j - K^j{}_j K^i{}_i).$$

Se definirmos:

$$\begin{aligned} trK &= g^{ij}K_{ij} = g_{ij}K^{ij} = K^j{}_j = K, \\ trK^2 &= (K^2)_{j^j} = K_j{}^m K_m{}^j = g_{j\delta} K^{\delta m} g_{mi} K^{ij}, \end{aligned}$$

teremos,

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R^{ij}{}_{ij} &= {}^{(3)}R^{ij}{}_{ij} + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (trK^2 - (trK)^2) \\ &= {}^{(3)}R + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} (K_{ij}K^{ij} - K^2) \end{aligned}$$

onde os termos de divergência já foram eliminados antes da operação acima.

Assim, podemos escrever:

$$\mathcal{L}_G = {}^{(3)}R + \frac{1}{n_\alpha n^\alpha} [K^2 - K_{ij}K^{ij}] - 2(n^\alpha n^\beta{}_{;\beta})_{;\alpha} + 2(n^\alpha n^\beta{}_{;\alpha})_{;\beta}, \quad (3.29)$$

o termo $(n^\alpha n^\beta{}_{;\beta})_{;\alpha}$ significa uma divergência (variação ao longo da fronteira espacial) e o termo $n^\alpha n^\beta{}_{;\alpha}$ significa variação perpendicular a fronteira espacial (fronteira temporal). Com esse resultado (3.29) e com a ajuda da expressão para elemento de volume quadri-dimensional em termos das quantidades introduzidas no split 3+1:

$$\sqrt{-{}^{(4)}g}d^4x = Nh^{\frac{1}{2}}dtd^3x, \quad (3.30)$$

poderemos reescrever a ação (3.25). Antes de fazermos isso, devemos comentar um pouco acerca da expressão (3.30). O lado esquerdo significa um elemento de evolução covariante, ou seja, não definimos direções em que a interação deve ser feita. Já no lado direito, estamos fixamos uma orientação ao longo do vetor com módulo Ndt e normal a hipersuperfície, tipo-espaço, tri-dimensional com métrica h_{ij} e elemento de volume $\sqrt{h}d^3x$. Essa quebra da covariância é necessária devido a maneira com que o formalismo ADM é escrito. Caso

não modifiquemos o elemento de volume, poderíamos correr o risco, ao fazermos a integração de \mathcal{L}_G , dado em termos das quantidades de uma hipersuperfície sobre o elemento de diferentes hipersuperfícies. Perderíamos assim, dessa maneira “dinâmica” de entendermos a relatividade geral, introduzida pelo formalismo ADM. Agora, usando (3.29) e (3.30), a expressão para S_G (3.25), fica escrita como:

$$\begin{aligned}
S_G &= \frac{1}{16\pi} \int \left[{}^{(3)}R + \frac{1}{n^\alpha n_\alpha} (K^2 - K_{ij}K^{ij}) \right] N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x + \\
&- \frac{1}{8\pi} \int_{\text{fronteira tipo-espaço}} (n^\alpha n_{\alpha;\beta}) n_\alpha h_{\text{fronteira}}^{\frac{1}{2}} d^3x + \\
&+ \frac{1}{8\pi} \int_{\text{fronteira tipo-tempo}} (n^\alpha n^\beta{}_{;\alpha}) \tilde{n}_\beta \sqrt{-h_{\text{fronteira}}} d^3x, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

onde cada umas das divergências em (3.29) foram integradas e deram origem a termos nas fronteiras, hipersuperfícies tri-dimensionais, do tipo-espaço (normal tipo-tempo $\rightarrow n_\alpha$) e do tipo-tempo (normal tipo-espaço $\rightarrow \tilde{n}_\beta$).

Vamos considerar aqui, como é feito em geral, que as hipersuperfícies, tri-dimensionais, tipo-espaço, que estamos considerando, não tem fronteiras, ou seja, são fechadas ou compactas. Com isso, o último termo em (3.31), uma integral sobre a fronteira do tipo-tempo, se anula.

Também vamos considerar, assim como ADM, que a contribuição sobre a fronteira da integral tipo-espaço em (3.31), não deve contribuir para variações da geometria no quadri-volume interior a esta fronteira. Assim, o termo sobre a fronteira do tipo-espaço em (3.31) será anulado, obtendo:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{16\pi} \int [{}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2] N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x + \\
&+ \int \mathcal{L}_{\text{Matter}} [\phi^A, h_{ij}, N_i, N] N h^{\frac{1}{2}} dt d^3x, \tag{3.32}
\end{aligned}$$

onde consideramos explicitamente que \hat{n} é um vetor tipo-tempo normalizado ($n_\alpha n^\alpha = 1$), e $\mathcal{L}_{\text{Matter}}$ se refere a densidade de Lagrangiana de outros campos fundamentais, representados aqui genericamente por ϕ^A , ($A = 1, \dots, N$) que não o campo gravitacional: matéria, gauges, etc, A expressão (3.32), representa a ação da relatividade geral e outros campos acoplados minimamente a gravitação em forma Lagrangiana no formalismo ADM. Uma vez que obtivemos a forma Lagrangiana da teoria, podemos passar a obtenção da sua representação Hamiltoniana.

Começamos por identificar o espaço de fase da relatividade geral. Como havíamos dito anteriormente, os graus de liberdade dinâmicos da teoria estão contidos nas métricas das hipersuperfícies tri-dimensionais, espaciais, h_{ij} . O vetor *shift* N^i e função *lapse* N são apenas funções que especificam a maneira pela qual devemos evoluir os Σ' s para obtermos o espaço-tempo desejado. Desta forma, as coordenadas canônicas do nosso problema serão apenas os h'_{ij} s e os seus momentos canonicamente conjugados, que chamaremos de Π^{ij} 's, definidos como usualmente a partir da seguinte derivada:

$$\Pi^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}}, \quad (3.33)$$

onde \mathcal{L}_G é a densidade de Lagrangiana gravitacional obtida diretamente de (3.32) ($\mathcal{L}_G = N\sqrt{h}({}^{(3)}R + K_{ij}K^{ij} - K^2)$); \dot{h}_{ab} é a derivada desta métrica em relação ao parâmetro tempo; Π^{ab} é simétrico por definição ($\Pi^{ab} = \Pi^{ba}$).

Se fizermos explicitamente a derivação indicada em (3.33), com a ajuda de (3.21), em que temos:

$$\left(K_{ab} = \frac{1}{2}N^{-1} \left[-\dot{h}_{ab} + N_{b|a} + N_{a|b} \right] \Rightarrow \frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{h}_{ab}} = -\frac{1}{2}N^{-1} \right),$$

obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} \left\{ \sqrt{h}N \left[{}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right] \right\}, \\ &= \sqrt{h}N \left[\frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K_{ab}K^{ab}) - \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K^2) \right], \end{aligned}$$

lembre-se que: $K \equiv K^a_a \equiv h^{ab}K_{ab}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} &= \sqrt{h}N \left[\frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (h^{ac}h^{bd}K_{ab}K_{cd}) - \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (h^{ab}K_{ab}h^{cd}K_{cd}) \right], \\
&= \sqrt{h}N \left[h^{ac}h^{bd} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) K_{cd} + h^{ac}h^{bd}K_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K_{ab}h_c^a h_d^b) - \right. \\
&\quad \left. - h^{ab}h^{cd}K_{cd} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) - h^{ab}h^{cd}K_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (h_c^a h_d^b K_{ab}) \right], \\
&= \sqrt{h}N \left[h^{ac}h^{bd} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) K_{cd} + h^{ac}h^{bd}K_{ab} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) h_c^a h_d^b - \right. \\
&\quad \left. - h^{ab}h^{cd}K_{cd} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) - h^{ab}h^{cd}K_{ab} \sqrt{h}N \left[h^{ac}h^{bd} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) K_{cd} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + h^{ac}h^{bd}K_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (K_{ab}h_c^a h_d^b) - h^{ab}h^{cd}K_{cd} \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h^{ab}h^{cd}K_{ab}h_c^a h_d^b \left(-\frac{1}{2}N^{-1} \right) \right] \right], \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{h} [K^{ab} + K^{cd}h_c^a h_d^b - h^{ab}K - h^{cd}h_c^a h_d^b K], \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{h} [K^{ab} + K^{ab} - h^{ab}K - h^{ab}K],
\end{aligned}$$

$$\Pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} [h^{ab}K - K^{ab}]. \quad (3.34)$$

Como, observando diretamente de (3.32), a \mathcal{L}_G não depende das derivadas temporais de N_i e N , os momenta definidos dessas quantidades são nulos. Esse resultado indica, que a teoria da relatividade geral é uma teoria com vínculos. Resultados da teoria que trata da formulação Hamiltoniana de sistemas com vínculos (THSV), nos informam que devido a inexistência dos momenta das quantidades das derivadas temporais de N_i e N , N_i e N não são variáveis dinâmicas da teoria. Ou em outras palavras, nós partimos de um espaço de configuração maior do que o necessário para a descrição da teoria. A THSV garante que devemos reduzir o espaço de configuração, deixando de lado N_i e N e tomando apenas os h'_{ij} s como variáveis dinâmicas da teoria. Ainda da THSV, sabemos que quando escrevermos a ação (3.32) em sua forma Hamiltoniana, obteremos além de outros termos, parcelas, que serão funções dos h_{ij} 's e suas primeiras derivadas, que aparecerão multiplicadas pelos N e N_i respectivamente e N e N_i só aparecerão nessas parcelas, da maneira mencionada. Essas parcelas são os chamados vínculos da teoria, e serão impostos sobre os sistemas físicos, juntamente com as equações dinâmicas, ao exigirmos que as

variações da ação em relação aos N'_i s e os N sejam nulas sobre a *trajetória* física. A função *lapse* e o vetor *shift* são chamados de multiplicadores de Lagrange. Assim, com esse conhecimento vindo da THSV poderíamos passar ao cálculo explícito da densidade de Hamiltoniana da relatividade geral \mathcal{H}_G no formalismo ADM.

Da expressão geral da densidade de Hamiltoniana em termos das variáveis canônicas e da densidade de Lagrangiana, podemos escrever (lembre-se que as variáveis canônicas são dadas apenas pelos h'_{ij} s) e seus momenta canonicamente conjugados:

$$\mathcal{H}_G = \Pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G. \quad (3.35)$$

Com a ajuda da expressão da ação (3.32), de onde podemos ler a densidade de Lagrangiana \mathcal{L}_G , e dos momenta Π^{ab} (3.34), obtemos depois de alguma álgebra, a seguinte expressão para \mathcal{H}_G :

$$\mathcal{H}_G = N \left[h^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right) - h^{\frac{1}{2}(3)}R \right] + N_b \left[-2\Pi^{ab}{}_{|a} \right] + 2 \left(2N_b\Pi^{ab} \right)_{|a}, \quad (3.36)$$

onde $\Pi \equiv tr\Pi_{ab} = \Pi^a{}_a$. O último termo em (3.36) contribui somente no termo na fronteira, para a Hamiltoniana \mathcal{H}_G , o qual iremos desprezar. Logo, podemos reescrever \mathcal{H}_G da seguinte forma:

$$\mathcal{H}_G = N \left[G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - h^{\frac{1}{2}(3)}R \right] + N_j \left[-2\Pi^{ij}{}_{,i} \right], \quad (3.37)$$

onde introduzimos:

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \quad (3.38)$$

que é a forma contravariante da métrica do superespaço, descoberta por DeWitt (a demonstração de que G_{ijkl} pode ser dado pela equação (3.38) pode ser vista no apêndice 9.1). E que possui as seguintes simetrias:

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk} = G_{klij}. \quad (3.39)$$

A partir da densidade de Hamiltoniana \mathcal{H}_G (3.37), podemos escrever a ação da relatividade geral S_G , em sua forma Hamiltoniana, no formalismo ADM:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int \left[\Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - NH_G - N_i H^i{}_G \right] dt d^3x, \quad (3.40)$$

onde $\mathcal{H}_G = -NH_G - N_i H^i_G$ e $d^4x = dt d^3x$. Observe que $\sqrt{\hbar}N$ entrou tanto no cálculo do vínculo dos momenta quanto de \mathcal{H}_G , via a definição da densidade de Lagrangiana \mathcal{L}_G , onde:

$$H_G = G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - \hbar^{\frac{1}{2}}{}^{(3)}R, \quad (3.41)$$

é conhecido como a superhamiltoniana e,

$$H_G^j = -2\Pi^{ij}{}_{|i}, \quad (3.42)$$

é conhecido como supermomentum.

Se variarmos S_G (3.40) em relação a N e N_j e igualarmos o resultado a zero, obtemos respectivamente as seguintes equações:

$$H_G = 0, \quad (3.43)$$

$$H_G^j = 0, \quad (3.44)$$

que representam os vínculos da superhamiltoniana e do supermomentum, respectivamente. Eles são análogos as 4 equações de Einstein para o vácuo ($R_{ab} = 0$), que envolvem a componente temporal:

$$R_{00} = 0, \quad (3.45)$$

$$R_{0j} = 0. \quad (3.46)$$

E se variármos S_G (3.40), em relação a h_{ab} e Π^{ab} obteremos as seguintes equações (12 no total):

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta S_G}{\delta \Pi^{ab}} = 2\hbar^{-\frac{1}{2}}N \left(\Pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\Pi \right) + 2N_{(b|a}, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{ab} &= -\frac{\delta S_G}{\delta h_{ab}} = -N\hbar^{-\frac{1}{2}} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2}{}^{(3)}R h^{ab} \right) + \\ &+ \frac{1}{2}N\hbar^{-\frac{1}{2}}h^{ab} \left(\Pi_{cd}\Pi^{cd} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right) - 2N\hbar^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ac}\Pi_c{}^b - \frac{1}{2}\Pi\Pi^{ab} \right) + \\ &+ \hbar^{\frac{1}{2}} (N^{[a|b} - h^{ab}N_{|c}{}^{]c}) + \hbar^{\frac{1}{2}} \left(\hbar^{-\frac{1}{2}}N^c\Pi^{ab} \right)_{|c} - 2\Pi^c({}^aN^b)_{|c}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

E pode-se mostrar que essas equações são equivalentes as demais equações de Einstein para o vácuo. (A contagem de equações em cada formalismo é como se segue):

Einstein \rightarrow 10 equações independentes - 4 vínculos [(3.45) e (3.46)]=6 equações dinâmicas de segunda ordem;

ADM \rightarrow formalismo Hamiltoniano dobra o número de equações pois transforma de segunda ordem para primeira ordem \rightarrow 6 equações independentes para h_{ab} (3.47) + 6 equações independentes para $\dot{\Pi}^{ab}$ (3.48)=12 equações dinâmicas de primeira ordem. Assim, tivemos sucesso em escrever a relatividade geral em sua forma Hamiltoniana.

Se tivermos outros campos além do campo gravitacional no sistema físico sendo investigado, por exemplo, ϕ^A , a ação total S , para esse sistema na forma Hamiltoniana, no formalismo ADM fica dado por:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left[\Pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \Pi_{\phi^A} \dot{\phi}^A - NH - N_i H^i \right] dt d^3x, \quad (3.49)$$

onde Π_{ϕ^A} é o momento canonicamente conjugado ao campo ϕ^A definido a partir da variação da densidade de Lagrangiana da matéria L_{Matter} em relação a $\dot{\phi}^A$, H é dado por:

$$H = H_G + H_{Matter}, \quad (3.50)$$

e H_{Matter} é a superhamiltoniana da matéria, e H^i é dado por:

$$H^i = H^i_G + H^i_{Matter}, \quad (3.51)$$

e H^i_{Matter} é o supermomentum da matéria. Ao igualarmos as equações (3.50) e (3.51) a zero, obtemos os vínculos da superhamiltoniana e do supermomentum para o caso com a matéria.

3.5 Ação na teoria de Hořava-Lifshitz

Em seu trabalho original, Hořava considerou a suposição simplificada de que a função *lapse* N deveria depender apenas do tempo [5]. Esta suposição se tornou conhecida como a *condição projetável*. Embora muitos trabalhos tenham sido escritos sobre a teoria da HL usando a *condição projetável*, alguns autores consideraram as implicações de trabalhar na condição *não-projetável*. Em outras palavras, eles consideraram N como uma função do espaço e do tempo [11,12]. A ação gravitacional da teoria de HL foi proposta de tal forma

que a componente cinética foi construída separadamente do potencial. A componente cinética foi motivada pelo que vem da RG, escrita em termos do tensor da curvatura extrínseca. Ela contém derivadas temporais da métrica espacial até a segunda ordem e um parâmetro livre (λ), que não está presente na componente cinética da relatividade geral. No limite de $\lambda \rightarrow 1$, recupera-se a componente cinética da RG. A componente potencial deve depender apenas da métrica espacial e de suas derivadas espaciais. Como uma teoria geométrica da gravidade, a componente potencial da teoria HL deve ser composta de contrações de escalares do tensor de Riemann e suas derivadas espaciais.

Em seu trabalho original [5], Hořava considerou uma simplificação para reduzir o número de possíveis termos que contribui para a componente potencial de sua teoria. É chamada de condição de *equilíbrio detalhado*. Embora essa condição realmente reduza o número de termos que contribuem para a componente potencial, alguns autores mostraram que, sem o uso dessa condição, é possível construir uma teoria bem definida e fenomenologicamente interessante, sem muitos outros termos extras [13,14]. Como outras teorias geométricas da gravidade, foi mostrado que a *versão projetável* da teoria HL, com a condição de *equilíbrio detalhado*, tem fantasmas e instabilidades [14,15]. A teoria HL foi aplicada à cosmologia e produziu modelos muito interessantes [16–23]. Para uma revisão recente sobre alguns aspectos da teoria HL, veja Ref. [15].

A ação na teoria de Hořava-Lifshitz para a versão projetável, isto é, a função *lapse* N dependendo apenas tempo, e sem a condição de *equilíbrio detalhado* é definida por [18]:

$$\begin{aligned}
S = & \frac{M_p^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^3x dt N \sqrt{h} [K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_{pl}^{-2} - g_1 R - \\
& - M_{pl}^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R_{ij} R^{ij}) - M_{pl}^4 (g_4 R^3 + g_5 R R_j^i R_i^j + \\
& + g_6 R_j^i R_k^j R_i^k + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk})], \tag{3.52}
\end{aligned}$$

onde g_i e λ são parâmetros associados à gravidade de HL, M_p é a massa de Planck, K_{ij} são as componentes do tensor de curvatura extrínseca e K representa seu traço, R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci calculado para a métrica das seções espaciais h_{ij} , R é o escalar de Ricci calculado para h_{ij} , h é o determinante de h_{ij} e ∇_i representa as derivadas covariantes. Os índices latinos i e j vão de um à três.

3.6 A métrica do modelo

No presente modelo, usamos a seguinte métrica de FRW,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \right]. \quad (3.53)$$

Podemos reescrever a equação (3.53) em sua forma matricial, a qual é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -N^2 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

onde h_{ij} é dado por,

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

cuja matriz inversa de (3.55) é,

$$h^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1 - kr^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

3.7 Elementos da ação

Nessa seção serão apresentados os resultados do cálculo para a ação do modelo de HL correspondente a parte cinética e a parte potencial. Esses resultados fazem parte do manuscrito do Luíz Guilherme Rezende Rodrigues. Para mais detalhes desses cálculos veja o apêndice 9.2.

3.7.1 Parte cinética

Esta seção é dedicada aos cálculos da ação referentes a parte cinética do modelo. Para calcular, utilizaremos o conceito de curvatura extrínseca dado pela equação (3.21). Para o caso em que consideraremos a métrica dada pela equação (3.53), a curvatura extrínseca se torna:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right]. \quad (3.57)$$

As componentes de K_{ij} diferentes de zero são dadas por:

$$K_{rr} = -\frac{\dot{a}a}{N(1-kr^2)}. \quad (3.58)$$

$$K_{\theta\theta} = -\frac{\dot{a}ar^2}{N}. \quad (3.59)$$

$$K_{\varphi\varphi} = -\frac{\dot{a}ar^2\text{sen}^2\theta}{N}. \quad (3.60)$$

Os índices de (9.2)-(9.4) podem ser levantados da seguinte maneira,

$$K^{ij} = h^{li}h^{mj}K_{lm}.$$

Dessa forma obtém-se:

$$K^{rr} = -\frac{\dot{a}(1-kr^2)}{Na^3}, \quad (3.61)$$

$$K^{\theta\theta} = -\frac{\dot{a}}{Na^3r^2}, \quad (3.62)$$

$$K^{\varphi\varphi} = -\frac{\dot{a}}{Na^3r^2\text{sen}^2\theta}. \quad (3.63)$$

Assim $K_{ij}K^{ij}$ pode ser escrito como:

$$K_{ij}K^{ij} = \frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2}. \quad (3.64)$$

Contraindo os índices de K_{ij} , obtemos:

$$K = -\frac{3\dot{a}}{Na}. \quad (3.65)$$

Utilizando a equação (9.9) podemos obter que,

$$K^2 = \frac{9\dot{a}^2}{N^2a^2}. \quad (3.66)$$

Para se obter a parte cinética, devemos substituir as equações (9.8) e (9.10) em (3.52), o que nos fornece:

$$S_{cin} = \frac{M_p^2}{2} \int_{\mathcal{M}} dx^3 dt N \frac{r^2 a^3 \text{sen} \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \lambda \frac{9\dot{a}^2}{N^2 a^2} \right). \quad (3.67)$$

3.7.2 Parte potencial

Nesta subsecção iremos apresentar os elementos da parte potencial. Para isso, serão necessários a definição de alguns elementos e propriedades que seguem abaixo:

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^i{}_{mk}\Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^i{}_{ml}\Gamma^m{}_{jk}, \quad (3.68)$$

$$R_{ij} = h^{kl}R_{kilj}, \quad (3.69)$$

$$R_{ijkl} = h_{im}R^m{}_{jkl}, \quad (3.70)$$

$$R = h^{ij}R_{ij}, \quad (3.71)$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}h^{li}(h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{kj,l}), \quad (3.72)$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{klij}, \quad (3.73)$$

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0. \quad (3.74)$$

Aplicando as fórmulas acima, obtém-se:

$$R = h^{rr}R_{rr} + h^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + h^{\varphi\varphi}R^{\varphi\varphi}. \quad (3.75)$$

$$R_{rr} = h^{rr}R_{rrrrr} + h^{\theta\theta}R_{\theta r\theta r} + h^{\varphi\varphi}R_{\varphi r\varphi r}, \quad (3.76)$$

onde

$$R_{rrrr} = h_{rr}R^r{}_{rrr}, \quad (3.77)$$

e

$$R^r{}_{rrr} = 0. \quad (3.78)$$

O resultado dado por (9.22) implica que:

$$R_{rrrr} = 0, \quad (3.79)$$

$$R_{\theta r\theta r} = h_{\theta\theta}R^\theta{}_{r\theta r}, \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} R^\theta{}_{r\theta r} &= \Gamma^\theta{}_{rr,\theta} - \Gamma^\theta{}_{r\theta,r} + \Gamma^\theta{}_{r\theta}\Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{rr} \\ &- \Gamma^\theta{}_{rr}\Gamma^r{}_{r\theta} - \Gamma^\theta{}_{\theta r}\Gamma^\theta{}_{r\theta} - \Gamma^\theta{}_{\varphi r}\Gamma^\varphi{}_{r\theta}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde

$$\Gamma^{\theta}_{rr} = 0. \quad (3.82)$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta,r} = \frac{1}{r}. \quad (3.83)$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{kr}{1 - kr^2}. \quad (3.84)$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0. \quad (3.85)$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0. \quad (3.86)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{rr} = 0. \quad (3.87)$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = 0. \quad (3.88)$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi r} = 0. \quad (3.89)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\theta} = 0. \quad (3.90)$$

Agora, basta substituir os símbolos de Christoffel (9.26)-(9.34) calculados em (9.25) para obter:

$$R^{\theta}_{r\theta r} = \frac{k}{1 - kr^2}. \quad (3.91)$$

Finalmente, basta substituir (9.35) em (9.24) obtendo:

$$R_{\theta r\theta r} = [a^2 r^2] \left[\frac{k}{1 - kr^2} \right] = \frac{a^2 r^2 k}{1 - kr^2}. \quad (3.92)$$

De maneira análoga é calculado:

$$R_{\varphi r\varphi r} = h_{\varphi\varphi} R^{\varphi}_{r\varphi r}, \quad (3.93)$$

calculando o termo $R^\varphi_{r\varphi r}$, temos que:

$$\begin{aligned} R^\varphi_{r\varphi r} &= \Gamma^\varphi_{rr,\varphi} - \Gamma^\varphi_{r\varphi,r} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{rr} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{rr}, \\ &- \Gamma^\varphi_{rr}\Gamma^r_{r\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta r}\Gamma^\theta_{r\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^\varphi_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}. \quad (3.95)$$

Ao substituir (9.26), (9.28), (9.34) e (9.39) em (9.38), obtemos:

$$R^\varphi_{r\varphi r} = \frac{k}{1 - kr^2}. \quad (3.96)$$

Finalmente substituindo (9.40) em (9.37), teremos:

$$R_{\varphi r\varphi r} = \frac{ka^2r^2 \text{sen}^2\theta}{1 - kr^2}. \quad (3.97)$$

Substituindo (9.23), (9.36) e (9.41) em (9.20), obtemos:

$$R_{rr} = \frac{2k}{1 - kr^2}. \quad (3.98)$$

De forma análoga é calculado:

$$R_{\theta\theta} = h^{rr}R_{r\theta r\theta} + h^{\theta\theta}R_{\theta\theta\theta\theta} + h^{\varphi\varphi}R_{\varphi\theta\varphi\theta}. \quad (3.99)$$

Pela assimetria dada em (9.17), obtém-se:

$$R_{\theta\theta\theta\theta} = 0, \quad (3.100)$$

e

$$R_{r\theta r\theta} = R_{\theta r\theta r} = \frac{ka^2r^2}{1 - kr^2}. \quad (3.101)$$

Fazendo o cálculo de:

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = h_{\varphi\varphi}R^\varphi_{\theta\varphi\theta}, \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} R^\varphi_{\theta\varphi\theta} &= \Gamma^\varphi_{\theta\theta,\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi,\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\theta} \\ &- \Gamma^\varphi_{r\theta}\Gamma^r_{\theta\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\theta\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0, \quad (3.104)$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \cot \theta, \quad (3.105)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1 - kr^2), \quad (3.106)$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0. \quad (3.107)$$

Finalmente substituindo (9.29), (9.30), (9.34) e (9.48)-(9.51) em (9.47), obtemos:

$$R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = kr^2. \quad (3.108)$$

Substituindo (9.52) em (9.46), temos:

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = ka^2r^4 \text{sen}^2\theta. \quad (3.109)$$

Substituindo (9.44), (9.45) e (9.53) em (9.43), obtemos:

$$R_{\theta\theta} = 2kr^2. \quad (3.110)$$

Calculando o último termo, temos:

$$R_{\varphi\varphi} = h^{rr} R_{r\varphi r\varphi} + h^{\theta\theta} R_{\theta\varphi\theta\varphi} + h^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi\varphi\varphi}. \quad (3.111)$$

Novamente pela antissimetria, temos:

$$R_{r\varphi r\varphi} = \frac{ka^2r^2 \text{sen}^2\theta}{1 - kr^2}, \quad (3.112)$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = ka^2r^4 \text{sen}^2\theta, \quad (3.113)$$

$$R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = 0. \quad (3.114)$$

Substituindo as equações (9.56)-(9.58) em (9.55), temos que:

$$R_{\varphi\varphi} = 2kr^2 \text{sen}^2\theta. \quad (3.115)$$

As equações (9.42), (9.54) e (9.60) podem ser generalizadas de acordo com a métrica,

$$R_{ij} = \frac{2k}{a^2} h_{ij}. \quad (3.116)$$

Finalizando este cálculo, vamos substituir as equações (9.42), (9.54) e (9.60) em (9.19) para determinar o seguinte escalar de Ricci:

$$R = \frac{6k}{a^2}. \quad (3.117)$$

Esse resultado leva a:

$$R^2 = \frac{216k^3}{a^6}. \quad (3.118)$$

Os índices de (9.61) podem ser levantados da seguinte maneira:

$$R^{ij} = \frac{2k}{a^2} h^{ij}. \quad (3.119)$$

Com (9.61) e (9.65), obtém-se:

$$R^{ij} R_{ij} = \frac{12k^2}{a^4}. \quad (3.120)$$

Calculando também:

$$R^i_j = \frac{2k}{a^2} h^i_j. \quad (3.121)$$

Assim,

$$R^i_j R^j_i = \frac{12k^2}{a^4}. \quad (3.122)$$

Substituindo (9.62) e (9.68), temos que:

$$RR^i_j R^j_i = \frac{72k^3}{a^6}. \quad (3.123)$$

Calculando o outro elemento, obtemos que:

$$R^i_j R^j_k R^k_i = \frac{24k^3}{a^6}. \quad (3.124)$$

Por outro lado, como a expressão dada por (9.61) depende apenas da métrica e de escalares, podemos escrever:

$$\nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} = 0. \quad (3.125)$$

Para o cálculo do último termo, o qual envolve o laplaciano, que para uma função genérica f é dada por:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{h} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right].$$

Para o caso em que $f = R$, teremos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 R &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \frac{\partial R}{\partial r} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Como o escalar de Ricci, equação (9.62), não depende das coordenadas r , θ e φ , temos que:

$$\nabla^2 R = 0. \quad (3.127)$$

O resultado dado por (9.73) implica em:

$$R \nabla^2 R = 0. \quad (3.128)$$

3.8 Ação completa

Considerando $g_0 M_p^2 = 2\Lambda$, $g_1 = -1$, como em [18] e substituindo os elementos calculados em (9.8), (9.10), (9.62), (9.64), (9.66), (9.69), (9.70), (9.71), (9.74), na ação total de Hořava-Lifshitz, equação (3.52), obtém-se:

$$\begin{aligned} S &= \beta \int dt N \left[3(1-3\lambda) \frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + 6ka - 2\Lambda a^3 - M_p^{-2} \left\{ \frac{12k^2}{a} (3g_2 + g_3) \right\} \right. \\ &\left. - M_p^{-4} \left\{ \frac{24k^3}{a^3} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right\} \right], \end{aligned}$$

o qual pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} S &= \eta \int dt N \left[- \frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + \frac{1}{3(1-3\lambda)} \left(6ka - 2\Lambda a^3 - \frac{12k^2}{a M_p^2} (3g_2 + g_3) \right) \right. \\ &\left. - \frac{24k^3}{a^3 M_p^4} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right], \end{aligned} \quad (3.129)$$

onde

$$\beta = \frac{M_p^2}{2} \int d^3x \frac{r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.130)$$

$$\eta = 3\beta(3\lambda - 1), \quad (3.131)$$

$$V_0 = \int d^3x \frac{r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.132)$$

$$1 = \frac{3M_p^2 V_0 (3\lambda - 1)}{2}, \quad (3.133)$$

$$g_c = \frac{2}{3\lambda - 1}, \quad (3.134)$$

$$g_\Lambda = \frac{2\Lambda}{3(3\lambda - 1)}, \quad (3.135)$$

$$g_r = 6V_0(3g_2 + g_3), \quad (3.136)$$

$$g_s = 18V_0^2(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6), \quad (3.137)$$

onde $g_c > 0$ representa a constante de acoplamento de curvatura, g_Λ está associado com a constante cosmológica, g_r corresponde fisicamente ao termo de radiação, enquanto que a constante de acoplamento g_s comporta-se como a matéria *rígida*, de acordo com a equação de estado ($p = \rho$). As constantes de acoplamento g_Λ , g_r e g_s podem ser positivas ou negativas, todavia seu sinal não altera a estabilidade da gravidade HL.

A equação (3.133) implica que:

$$V_0 = \frac{2}{3(3\lambda - 1)M_p^2}. \quad (3.138)$$

Substituindo as quantidades definidas acima e utilizando a condição (3.138) na ação (3.129), temos que:

$$S = \eta \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.139)$$

Assim podemos escrever a seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.140)$$

O momento canonicamente conjugado a variável a é:

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}} \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N} \right] = -\frac{2\dot{a}a}{N}. \quad (3.141)$$

A Hamiltoniana do modelo é dada por:

$$\mathcal{H} = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.142)$$

A equação (3.142) corresponde a Hamiltoniana da parte geométrica do modelo estudado.

3.9 Formalismo de Schutz

No estudo dos modelos cosmológico quânticos contidos nessa tese, iremos adotar para o conteúdo material do Universo a descrição fornecida pelo fluido perfeito relativístico. O formalismo de Schutz foi proposto no começo da década de 1970 por Bernard F. Schutz [77, 78]. Nesse formalismo a quadri-velocidade U_ν é descrita em termos de seis potenciais escalares termodinâmicos $(\mu, \epsilon, \varsigma, \beta, \theta, S)$, conhecidos por potenciais velocidades. A quadri-velocidade U_ν pode ser expressa na na forma [77],

$$U_\mu = \frac{1}{\mu} (\epsilon_{,\mu} + \varsigma \beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (3.143)$$

onde μ é a entalpia, os potenciais ς e β estão relacionados à rotação, S é a entropia específica e os potenciais ϵ e θ não possuem interpretações físicas claras.

Os potenciais velocidade tem sua dinâmica descrita por equações de movimento de primeira ordem. O objetivo principal desse formalismo é obter a forma hamiltoniana para matéria descrita por um fluido perfeito. Uma das vantagens desse formalismo de potenciais velocidade, quando aplicado a espaços-tempos homogêneos e isotrópicos, é nos permitir associar uma variável tempo aos graus de liberdade do fluido. Nesse sentido, no formalismo de Schutz é possível fazer uma associação com o formalismo variacional de Hamilton por meio de uma ação, a qual contém os efeitos gravitacionais e a matéria envolvida. Variando essa ação, obtém-se as equações de movimento para os potenciais.

Considere um fluido perfeito composto por bárions. Os bárions podem sofrer transmutação, assim a massa dessa amostra de bárions não é conservada, porém o número N_B de bárions permanece constante. Pode-se definir a massa de repouso dessa amostra de N_B bárions como sendo $m_H N_B$, onde m_H é a massa do átomo de hidrogênio no estado fundamental. A energia interna U dessa amostra será dada pela diferença entre a massa

total M e $m_H N_B$, isto é,

$$U = M - m_H N_B. \quad (3.144)$$

Dividindo a equação (3.144) por sua massa de repouso $m_H N_B$, obtemos:

$$\frac{U}{m_H N_B} = \frac{M}{m_H N_B} - \frac{m_H N_B}{m_H N_B}, \quad (3.145)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\tilde{U} = \frac{M}{m_H N_B} - 1, \quad (3.146)$$

onde $\tilde{U} = U/m_H N_B$ é a energia interna específica, cuja medida foi feita num referencial momentaneamente em repouso no fluido. Dividindo a equação (3.146) pelo volume da amostra que contém os N_B bárions, teremos:

$$\frac{\tilde{U}}{V} = \frac{M}{m_H N_B V} - \frac{1}{V}, \quad (3.147)$$

agrupando alguns termos de (3.147),

$$\frac{(\tilde{U} + 1)}{V} = \frac{M}{m_H N_B V}. \quad (3.148)$$

Finalmente podemos escrever (3.148) como sendo:

$$\frac{M}{V} = \frac{m_H N_B}{V} (\tilde{U} + 1). \quad (3.149)$$

A partir da equação (3.149) podemos notar que M/V é a densidade de bárions do fluido ρ e que $m_H N_B/V$ é equivalente à densidade de massa de repouso em seu estado fundamental, que será denotada por ρ_0 , a qual também foi medida num referencial momentaneamente em repouso no fluido. Daí podemos reescrever (3.149) como:

$$\rho = \rho_0 (\tilde{U} + 1). \quad (3.150)$$

Nesse sentido, vamos supor que o fluido seja caracterizado por uma equação de estado da forma $p = p(\rho_0, \tilde{U})$.

Por outro, temos pela primeira lei da Termodinâmica, que a quantidade de energia adicionada ao fluido é dada por

$$dQ = dU + p dV, \quad (3.151)$$

dividindo por $m_H N_B$, obtemos:

$$\frac{dQ}{m_H N_B} = d\left(\frac{U}{m_H N_B}\right) + pd\left(\frac{V}{m_H N_B}\right), \quad (3.152)$$

onde podemos a partir das quantidades encontradas anteriormente escrever a equação (3.152), como:

$$dq = d\tilde{U} + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (3.153)$$

onde dq é a quantidade de energia por unidade de massa de repouso, adicionada ao fluido num processo quase-estático.

No formalismo estudado temos a equação de estado que depende de duas variáveis, que são a entropia específica $S(\rho_0, \tilde{U})$ e a temperatura $T(\rho_0, \tilde{U})$, tais que:

$$d\tilde{U} + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = TdS = \delta q. \quad (3.154)$$

Pode-se definir a massa inercial, denominada também por entalpia, como

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0}, \quad (3.155)$$

onde a quantidade $\rho + p$ faz o papel de massa inercial por unidade de volume num fluido perfeito. Usando a equação (3.150) podemos reescrever a equação (3.155) como

$$\mu = \frac{\rho_0(1 + \tilde{U}) + p}{\rho}, \quad (3.156)$$

que após uma simplificação, obtemos;

$$\mu = 1 + \tilde{U} + \frac{p}{\rho_0}, \quad (3.157)$$

Para eliminar \tilde{U} da equação (3.154), iremos diferenciar a equação (3.157), dessa forma temos:

$$d\mu = d\tilde{U} + \frac{dp}{\rho_0} + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right). \quad (3.158)$$

Isolando a quantidade $d\tilde{U}$ da expressão (3.158) e substituindo em (3.154), obtemos:

$$d\mu - \frac{dp}{\rho_0} = TdS, \quad (3.159)$$

que pode ser reescrita como:

$$dp = \rho_0(d\mu - TdS). \quad (3.160)$$

Note que ρ_0 e \tilde{U} podem ser expressos como funções de μ e S , assim a equação de estado assume a forma de $p = p(\mu, S)$. Para obter uma relação deste tipo, primeiramente note que se

$$p = \omega\rho, \quad (3.161)$$

que é uma equação de estado de um fluido perfeito em sua forma mais geral, sendo ω uma constante que caracteriza o tipo de fluido estudado. Substituindo a equação (3.161) em (3.153) e com o uso da equação (3.150) e após algumas manipulações algébricas, obtem-se a seguinte expressão:

$$(1 + \tilde{U})d[\ln(1 + \tilde{U}) - \omega \ln \rho_0] = TdS, \quad (3.162)$$

de onde podemos identificar que,

$$T = 1 + \tilde{U}, \quad (3.163)$$

e

$$S = \ln(1 + \tilde{U}) - \omega \ln \rho_0. \quad (3.164)$$

Vamos reescrever a equação (3.164), para isso vamos inicialmente dividi-la por ω e aplicar a propriedade do quociente do logaritmo, obtendo:

$$\frac{S}{\omega} = \ln \left[\frac{(1 + \tilde{U})^{\frac{1}{\omega}}}{\rho_0} \right]. \quad (3.165)$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da equação (3.165) e isolando ρ_0 , temos que:

$$\rho_0 = (1 + \tilde{U})^{\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.166)$$

Também podemos expressar a equação (3.166) em termos da entalpia μ e da entropia S .

Para isso, vamos substituir a equação (3.161) na equação (3.155), obtendo:

$$\mu = \frac{\rho(\omega + 1)}{\rho_0}, \quad (3.167)$$

e substituindo a equação (3.150) em (3.167), temos que:

$$(1 + \tilde{U}) = \frac{\mu}{(\omega + 1)}. \quad (3.168)$$

Finalmente, substituindo a equação (3.168) em (3.166), obtemos:

$$\rho_0 = \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.169)$$

Como $p = \omega\rho$, $\rho = \rho_0(1 + \tilde{U})$ e usando a equação (3.169) temos que a pressão p do fluido perfeito por ser expressa por:

$$p = \omega \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{1 + \frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}, \quad (3.170)$$

esta é a equação de estado escrita em termos da entalpia μ e da entropia S .

3.9.1 Tensor momento-energia e as equações de movimento

O fluido perfeito relativístico de uma componente é definido por uma equação de estado do tipo $p = p(\mu, S)$ e do tensor momento-energia dado pela equação (2.1). Num referencial comóvel, sua forma é $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. Como estamos estudando um fluido perfeito, o tensor de energia-momento não apresenta viscosidade e nem condução de calor. Usando a equação (3.155), podemos reescrever (2.1) como sendo:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \mu U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (3.171)$$

A condição de conservação do número de bárions reescrita em termos de ρ_0 é dada por:

$$(\rho_0 U^\nu)_{;\nu} = 0. \quad (3.172)$$

Além disso, a condição de normalização da quadri-velocidade é

$$U^\nu U_\nu = -1, \quad (3.173)$$

o que conduz a

$$(U^\nu U_\nu)_{;\beta} = 0, \quad (3.174)$$

Exigindo que o tensor momento-energia tenha divergência nula, isto é,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (3.175)$$

as equações de movimento podem ser expressas na forma de leis de conservação. As imposições de (3.172) e de (3.173) e as quatro equações em (3.175) determinam completamente o movimento de um fluido, cuja equação de estado é conhecida.

A interpretação física das quatro equações dadas em (3.175), podem ser entendidas se as componentes paralela e perpendicular à quadri-velocidade forem separadas. Para a componente paralela, podemos escrever:

$$U_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (3.176)$$

Utilizando as equações (3.172), (3.173) e (3.174) chega-se a

$$U^\mu p_{,\nu} - \rho_0 U^\nu \mu_{,\nu} = 0, \quad (3.177)$$

e de 3.160,

$$\rho_0 T U^\mu S_{,\nu} = 0, \quad (3.178)$$

ou seja, o movimento de um fluido perfeito relativístico conserva a entropia por bárions. Podemos perceber também que como $dq = TdS$ não há fluxo de calor em qualquer elemento do fluido durante seu movimento.

Para a componente perpendicular, tem-se três equações de movimento independentes. Vamos utilizar a definição do tensor projeção:

$$P^\sigma{}_\mu = \delta^\sigma{}_\mu + U^\sigma U_\mu, \quad (3.179)$$

o qual projeta tensores perpendicularmente a U^ν . Aplicando (3.179) em (3.175) e utilizando as equações (3.172), (3.173) e (3.174), temos que:

$$-P^\sigma{}_\nu p_{,\nu} = \mu \rho_0 U_{\sigma;\nu} U^\nu, \quad (3.180)$$

fazendo $U^\nu = \delta^\nu_0$, obtemos

$$-\vec{\nabla} p = (\rho + p) \frac{d\vec{v}}{d\tau}, \quad (3.181)$$

onde \vec{v} é a tri-velocidade e τ é o tempo próprio. A equação acima é a lei de força usual, sendo a quantidade $(\rho + p)$ chamada de massa inercial por unidade de volume.

3.9.2 Equações de movimento na representação de potenciais-velocidade

Considere a quadri-velocidade dada pela equação (3.143). Sob a imposição de (3.173), obtém-se

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu}(\phi_{,\sigma} + \alpha\beta_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma})(\phi_{,\nu} + \alpha\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}), \quad (3.182)$$

ou seja, a entalpia é uma função de todos os potenciais-velocidade.

Para que a formulação em termos da quadri-velocidade explicitada pela equação (3.143) seja interessante, é necessário que as conhecidas equações de um fluido perfeito possam ser reproduzidas com o uso de uma ação apropriada. Conforme dito anteriormente, a representação de Schutz está associada a um princípio variacional cuja densidade lagrangiana é especialmente simples

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(p), \quad (3.183)$$

onde p é a pressão do fluido.

Considere a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(16\pi p). \quad (3.184)$$

Fazendo a variação da ação com relação aos potenciais-velocidade são encontradas cinco equações acopladas não-lineares de primeira ordem,

$$U^\nu \phi_{,\nu} = -\mu, \quad (3.185)$$

$$U^\nu \alpha_{,\nu} = 0, \quad (3.186)$$

$$U^\nu \beta_{,\nu} = 0, \quad (3.187)$$

$$U^\nu \theta_{,\nu} = T, \quad (3.188)$$

$$U^\nu S_{,\nu} = 0, \quad (3.189)$$

além de uma equação não-linear de segunda ordem,

$$(\rho_0 U^\nu)_{;\nu} = 0, \quad (3.190)$$

que indica a conservação do número de bárions. As equações (3.185) e (3.188) traduzem o caráter dinâmico dos potenciais ϕ e θ sendo suas evoluções determinadas pelas condições termodinâmicas do fluido. Mudanças nestes potenciais causam mudanças no movimento do fluido visto num referencial comóvel.

De posse da lagrangiana do fluido pode-se obter seus momentos canonicamente conjugados. Através de um cálculo simples, obtém-se:

$$P_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\sqrt{-g}\rho_0 U^0, \quad (3.191)$$

$$P_S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{S}} = -\sqrt{-g}\rho_0 U^0 \theta = \theta P_\phi, \quad (3.192)$$

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad (3.193)$$

Com isso, a hamiltoniana fica escrita como:

$$\begin{aligned} H &= \mu U_0 P_\phi - \sqrt{-g}\rho, \\ &= -\sqrt{-g}[p + (\rho + p)U_0 U^0], \\ &= \sqrt{-g}T^0_0, \end{aligned} \quad (3.194)$$

como era de se esperar.

3.9.3 Universo de FRW com fluido perfeito

É conveniente, por questão de praticidade, escrever a hamiltoniana do fluido em termos dos potenciais-velocidade bem como impor simetrias que sejam coerentes com o cenário cosmológico cuja descrição foi proposta. Em razão disso passa-se ao estudo caracterizado pela métrica de FRW, a qual é escrita como:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (3.195)$$

Neste cenário a ação do fluido,

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} p,$$

pode ser reescrita como

$$S_f = \beta \left(\int dt N a^3 \rho \right),$$

onde

$$\beta = \int dx^3 \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - kr^2}},$$

é um fator de fase global. A integração acima pode ser normalizada em todo espaço de tal modo a absorver este termo.

Usando (3.170), tem-se:

$$S_f = \beta \int dt \left[Na^3 \omega \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{\frac{1}{\omega} + 1} e^{-\frac{S}{\omega}} \right]. \quad (3.196)$$

Mas de (3.182)

$$\mu = [-g^{\mu\nu}(\phi_{,\mu} + \theta S_{,\mu})(\phi_{,\nu} + \theta S_{,\nu})]^{\frac{1}{2}}.$$

Como os potenciais são escalares, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mu &= [-g^{00}(\phi_{,0} + \theta S_{,0})^2]^{\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{1}{N}(\dot{\phi} + \theta \dot{S}). \end{aligned}$$

Substituindo a equação acima em (3.196), obtem-se

$$S_f = \beta \int dt \left[N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 \frac{\omega}{(\omega + 1)^{1 + \frac{1}{\omega}}} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1 + \frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}} \right],$$

de onde podemos identificar que:

$$\mathcal{L} = N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 \frac{\omega}{(\omega + 1)^{1 + \frac{1}{\omega}}} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1 + \frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.197)$$

Com isso, os momentos canonicamente conjugados a ϕ e S ficam sendo

$$P_\phi = N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{\frac{1}{\omega}(\omega+1) - \frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}, \quad (3.198)$$

e

$$P_S = \theta P_\phi. \quad (3.199)$$

Então a hamiltoniana do fluido, H_f , pode ser reescrita como:

$$NH_f = (\dot{\phi} + \theta \dot{S}) P_\phi - N^{-\frac{1}{\omega}} a^3 \frac{\omega}{(\omega + 1)^{1 + \frac{1}{\omega}}} (\dot{\phi} + \theta \dot{S})^{1 + \frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (3.200)$$

Utilizando (3.197), obtém-se após algumas manipulações algébricas:

$$H_f = \frac{P_\phi^{\omega+1} e^S}{a^{3\omega}}.$$

Para reescrever a hamiltoniana numa forma mais simples, introduz-se a seguinte transformação canônica

$$\begin{aligned} T &= -P_S e^{-S} P_\epsilon^{-(\omega+1)}, \\ P_T &= P_\epsilon^{\omega+1} e^S, \\ \bar{\epsilon} &= \epsilon - (\omega + 1) \frac{P_S}{P_\epsilon}, \\ \bar{P}_\epsilon &= P_\epsilon, \end{aligned}$$

e assim

$$H_f = \frac{P_T}{a^{3\omega}}, \quad (3.201)$$

onde, pela primeira vez, surge linearmente um momento canônico na teoria associado aos graus de liberdade do fluido perfeito.

De posse desta hamiltoniana da matéria, pode-se escrever a hamiltoniana total, H , que deve reger o comportamento dinâmico do universo,

$$H = H_g + H_f, \quad (3.202)$$

onde H_g é a hamiltoniana associada à ação da gravitação a qual é obtida com a utilização da formulação ADM da relatividade geral e H_f é a hamiltoniana do fluido perfeito.

Finalmente a hamiltoniana total do modelo é obtida ao somar as equações (3.142) e (3.201), obtendo:

$$H = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{P_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (3.203)$$

O espaço de fase desse modelo é descrito pelo fator de escala a , uma variável associada ao fluido T [64] e seu momentum conjugado canonicamente P_a e P_T , respectivamente. Todos eles são funções apenas da coordenada temporal t . Nesse caso, onde consideramos uma métrica de FRW, temos apenas o vínculo da superhamiltoniana dado ao igualarmos a equação (3.203) a zero.

CAPÍTULO 4

Quantização

Nessa seção será apresentado o referencial teórico necessário para a interpretação da função de onda obtida pela quantização do sistema. Serão utilizadas duas interpretações da mecânica quântica, a interpretação de *Muitos Mundos* e a interpretação de de Broglie-Bohm.

4.1 Processo de quantização

A quantização é uma correspondência entre teorias clássicas e quânticas. Podemos ver na literatura que essa correspondência não é realizada de uma única forma. Existem vários tratamentos e métodos para a quantização, para mais detalhes veja [41]. Podemos entender a quantização como sendo um procedimento que permite associar grandezas clássicas, que são valores reais das funções, à operadores autoadjuntos no espaço de Hilbert, os quais são quânticos. Um desses procedimentos de quantização foi proposto por Dirac. Nesse procedimento, Dirac propôs fazer a descrição Hamiltoniana do sistema clássico, ficando conhecido por quantização canônica. Este processo está relacionado com a consequência do Princípio da Correspondência, segundo o qual a dinâmica das médias dos operadores

deve corresponder a evolução temporal da respectiva quantidade clássica.

Assim, o modelo descrito por (3.203) será quantizado segundo o formalismo de Dirac considerando sistemas vinculados [42–45]. Para isso, primeiramente, introduziremos uma função de onda, a qual é função das variáveis canônicas a e T ,

$$\psi = \psi(\hat{a}, \hat{T}). \quad (4.1)$$

Usaremos a representação de Schrödinger para os operadores \hat{a} e \hat{T} e seus respectivos operadores momentos conjugados \hat{P}_a e \hat{P}_T . Nessa representação os operadores coordenadas estão dadas por funções multiplicativas e os operadores momentos tem as seguintes expressões:

$$\hat{P}_a^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{m}{a} \frac{\partial}{\partial a}, \quad (4.2)$$

$$\hat{P}_T \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (4.3)$$

onde m é um parâmetro que explica a ambiguidade no fator de ordenação das quantidades \hat{a} e \hat{P}_a . Para uma discussão mais detalhada desses operadores e seu ordenamento, veja [46, 47], respectivamente. Finalmente, devemos exigir que o vínculo (3.203), na sua forma operacional, aniquile a função de onda,

$$\left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{m}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{4i}{a^{3\omega}} \frac{\partial}{\partial T} + 4 \left(-g_c k a + g_\Lambda a^3 + \frac{g_r k^2}{a} + \frac{g_s k}{a^3} \right) \right] \psi(a, T) = 0, \quad (4.4)$$

essa é a conhecida equação de Wheeler-DeWitt para o presente modelo.

O operador \hat{H} é auto-adjunto [65] com respeito ao produto interno,

$$(\Psi, \Phi) = \int_0^\infty da \Psi(a, \tau)^* \Phi(a, \tau), \quad (4.5)$$

se as funções de onda estão restritas ao conjunto daquelas que satisfazem $\Psi(0, \tau) = 0$ ou $\Psi'(0, \tau) = 0$, onde o prime \prime significa a derivada parcial em relação a a . Nessa tese, consideramos as funções de onda satisfazendo o primeiro tipo de condição de contorno e também exigimos que elas desapareçam quando a for para ∞ .

Depois disso, usaremos duas interpretações da mecânica quântica para a função de onda, que são a interpretação de *Muitos Mundos* e a interpretação de *de Broglie-Bohm*, as quais serão apresentadas nas próximas seções.

4.2 Interpretação de Muitos Mundos

Em 1953, Hug Everett III após ter se formado em engenharia química, iniciou seus estudos na Universidade de Princeton, sendo que a sua pesquisa no doutorado em física ocorreu sob a supervisão do físico norte-americano John Archibald Wheeler [48]. O tema de sua pesquisa de doutorado foi sobre os fundamentos da mecânica quântica. Nessa época, John Archibald Wheeler estava interessado em cosmologia e relatividade geral, consequentemente também tinha interesses na quantização dessas teorias. A quantização dessas teorias envolvem o espaço-tempo e o Universo, assim seria necessário uma função de onda universal. A função de onda na interpretação de Copenhague não é compatível com uma teoria quântica de todo o Universo, visto que é necessário a existência de um domínio clássico para dar sentido a função de onda, o qual, nesse caso, não existiria. Uma outra razão pela qual a interpretação de Copenhague não pode ser aplicada a CQ, como visto na introdução, diz respeito a interpretação estatística dos resultados.

Alguns anos mais tarde, em 1957, Everett apresentou os resultados de sua pesquisa de doutorado por meio de sua tese intitulada *On the foundations of quantum mechanics* e publicada sobre o título "*Relative state*" *formulation of quantum mechanics* [29]. Entretanto, seu trabalho ficou ignorado por mais de uma década. Por volta de 1970, Bryce DeWitt interessado em obter uma nova interpretação da mecânica quântica, para prosseguir na sua teoria da quantização da gravitação, retomou aos estudos de Everett [49, 50] e utilizou a expressão interpretação de *Muitos Mundos*. Para mais detalhes veja [48].

De acordo com [51], Everett denominou sua visão da interpretação da mecânica quântica como sendo a interpretação dos *estados relativos*. Um exemplo desse *estado relativo* seria o estado de um observador sendo definido em relação ao estado do sistema que ele observa. Em 1973, uma versão um pouco diferente, mas que muitas vezes é apresentada como se fosse idêntica à primeira, é a chamada interpretação dos *Muitos Mundos* [51]. Essa interpretação de *Muitos Mundos* foi proposta por Bryce DeWitt, o qual considerou que os diferentes ramos, seriam na verdade diferentes mundos, ou Universos paralelos. A principal diferença entre as visões de Everett e a de DeWitt é que, para o primeiro, haveria apenas um único Universo, de comportamento completamente quântico, em que as

ramificações só acontecem em interações envolvendo medidas por artefatos macroscópicos. Na visão de Dewitt, cada ramo representa um Universo clássico diferente, sendo bem mais ampla no sentido físico, ao aceitar a existência de inúmeros Universos físicos além do que percebemos.

Na interpretação de *Muitos Mundos*, não há colapso da função de onda para um determinado valor durante a medida. Todos os resultados possíveis, ou todas as potencialidades, acontecem ao mesmo tempo, porém cada um, em um mundo ou universo paralelo. Nessa interpretação, todas as histórias ou ramos possíveis coexistem em uma espécie de multiverso, que vai se ramificando toda vez que uma observação é feita. Cada ramo corresponderia assim a um resultado da medição quântica, e o que acontece em cada ramo, não teria acesso ao que acontece no outro ramo.

Assim, para se interpretar uma quantidade física que caracteriza um sistema utilizaremos o conceito de valor esperado dessa quantidade, o qual é dado por:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x |\Psi(x, t)|^2 dx}{\int_0^\infty |\Psi(x, t)|^2 dx}, \quad (4.6)$$

onde x é a posição, t é o tempo e $\Psi(x, t)$ é a função de onda universal.

4.3 Interpretação de de Broglie-Bohm

Em 1927, no congresso de Solvay, Louis de Broglie apresentou sua teoria da onda piloto que descreve fenômenos quânticos. No entanto, sua teoria da onda piloto apresentava duas dificuldades. A primeira era referente a explicação do processo de medida quântica a partir de sua formulação e a segunda diz respeito ao fato de *de Broglie* não conseguir dar uma explicação física para a onda piloto, a qual era definida no espaço de configurações e não no espaço-tempo. Mas em 1952, David Bohm deu continuidade ao trabalho de de Broglie, desenvolvendo uma teoria física.

A interpretação de *de Broglie-Bohm* tem por objetivo descrever um sistema físico que é composto por uma partícula e por uma função de onda. Essa partícula segue uma trajetória contínua, sendo guiada pela função de onda. Assim, a função de onda nessa teoria não possui apenas o caráter estatístico proposto pela interpretação de Copenhague.

Nessa teoria, o elemento adicional a função, é a partícula, entendida no sentido clássico. Nesse sentido, a partícula descreve uma trajetória contínua no espaço-tempo. Dessa forma, podemos perceber que a interpretação da mecânica quântica proposta por essa teoria é uma teoria causal do movimento de ondas e partículas, sendo consistente com as probabilidades, apesar de não requerê-las.

Na proposta feita por de Broglie, a partícula A possui uma velocidade que é determinada pela onda, a qual é chamada de onda piloto, guiando a partícula e que se propaga no espaço-tempo. Essa velocidade é dada por:

$$\frac{d\vec{x}_A(t)}{dt} = \frac{\vec{j}_A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)}{|\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)|}, \quad (4.7)$$

onde as quantidades \vec{x}_A são vetores clássicos da posição da partícula A , $\vec{j}_A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$ é a corrente quântica referente a partícula A e $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$ é a onda piloto associada. A equação (4.7) é para um sistema de n partículas não relativístico em 3 dimensões espaciais. Ao analisarmos essa equação percebemos que ela difere das equações da mecânica newtoniana devido ao fato de não haver derivadas de segunda ordem em relação ao tempo, isto é, não inclui aceleração.

A onda piloto satisfaz a equação de conservação, dada por:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t^2} + \sum_{A=1}^n \vec{\nabla}_A \cdot \vec{j}_A = 0, \quad (4.8)$$

onde \vec{j}_A é a mesma corrente quântica presente na interpretação de Copenhague.

A função de onda do sistema estudado pode ser determinada através da equação de Schrödinger, que é:

$$i\hbar \frac{d\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)}{dt} = \hat{H}\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t), \quad (4.9)$$

onde \hat{H} é o operador hamiltoniano do sistema, o qual contém o termo cinético e os termos de interação entre as partículas. Nesse sentido, podemos reescrever a equação (4.9) como sendo:

$$i\hbar \frac{d\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)}{dt} = \left[- \sum_{A=1}^n \frac{\hbar^2}{2M_A} \nabla_A^2 + V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \right] \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t), \quad (4.10)$$

onde M_A é a massa das partículas, ∇_A^2 é o operador laplaciano referente a partícula A e $V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$ é o potencial de interação entre as partículas.

De acordo com [48], a corrente quântica dada em (4.7) pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}\vec{j}_A(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) &= \frac{1}{M_A} \text{Im} \left[\psi^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \vec{\nabla}_A \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t) \right], \\ &= \frac{1}{M_A} \vec{\nabla}_A S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t),\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde $S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$ é a fase da função de onda. Utilizando (4.11) podemos reescrever (4.7) como sendo,

$$\vec{p}_A = M_A \frac{d\vec{x}_A}{dt} = \vec{\nabla}_A S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t), \quad (4.12)$$

onde \vec{p}_A é o momento linear da partícula A . Podemos entender através da equação (4.12) que a partícula é guiada por uma fase que só depende das coordenadas e do tempo sobre ela. Para resolvermos a equação (4.12), temos que especificar a condição inicial $x(0) = x_0$. Essa especificação constitui a única informação extra introduzida pela teoria que não está contida em $\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$. A velocidade inicial é fixada uma vez que conhecemos $S(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, t)$. Um conjunto de movimentos possíveis associados com uma mesma onda é gerado pela variação de \vec{x}_0 . Assim, será necessário introduzir a noção de probabilidade, devido a essa possível indeterminação. Considere o postulado:

- A probabilidade de que uma partícula no conjunto esteja situada entre os pontos \vec{x} e $\vec{x} + d\vec{x}$ no instante t é dada por,

$$R^2(\vec{x}, t) d^3x, \quad (4.13)$$

onde $R^2 = |\psi|^2$.

Esse postulado considera a probabilidade que uma partícula realmente esteja em uma posição precisa em um instante t . E não a probabilidade de encontrar a partícula se for feita uma medida. Nesse sentido, esse postulado seleciona a partir de todos os movimentos governados pela lei dada em (4.12), aqueles que são compatíveis com a distribuição inicial $R^2(\vec{x}, 0) = R_0^2(\vec{x})$.

Agora, queremos introduzir o conceito de partícula na mecânica quântica e para isso, devemos decompor a equação de Schrödinger em duas equações reais. Inicialmente, vamos

considerar que temos uma única partícula e escreveremos a função de onda $\psi = \psi(\vec{x}, t)$, solução da equação de Schrödinger, em sua forma polar,

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}, t) &= R(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}, \\ \psi(\vec{x}, t) &= R(\vec{x}, t) (\cos(S(\vec{x}, t)/\hbar) + i \sin(S(\vec{x}, t)/\hbar)),\end{aligned}\quad (4.14)$$

onde $R = R(\vec{x}, t)$ é a amplitude real não negativa ($R \geq 0 \forall x, t$) de $\psi(\vec{x}, t)$ e $S = S(\vec{x}, t)$ é a sua fase real. Se escrevermos $\psi(\vec{x}, t)$ em termos de suas partes reais e imaginárias,

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_1(\vec{x}, t) + i\psi_2(\vec{x}, t) \quad (4.15)$$

temos que,

$$\begin{aligned}R(\vec{x}, t) &= (\psi_1^2(\vec{x}, t) + \psi_2^2(\vec{x}, t))^{1/2} = (\psi^*(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t))^{1/2}, \\ \frac{S(\vec{x}, t)}{\hbar} &= \tan^{-1} \left(\frac{\psi_2(\vec{x}, t)}{\psi_1(\vec{x}, t)} \right) = \left(\frac{1}{2i} \right) \ln \left(\frac{\psi(\vec{x}, t)}{\psi^*(\vec{x}, t)} \right).\end{aligned}\quad (4.16)$$

Reescrevemos a equação (4.10) para uma única partícula de massa M , temos,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V \right) \psi(\vec{x}, t), \quad (4.17)$$

substituindo a função de onda em sua forma polar e separando a equação acima em suas partes real e imaginária, respectivamente, obtemos as seguintes equações (para mais detalhes veja o apêndice 9.3):

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2}{2M} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R(\vec{x}, t)}{R(\vec{x}, t)} + V = 0. \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial R^2(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2(\vec{x}, t) \vec{\nabla} S(\vec{x}, t)}{M} \right) = 0. \quad (4.19)$$

As equações (9.75) e (9.76) formam um sistema acoplado de equações diferenciais parciais que dadas as condições iniciais $R_0(\vec{x}) = R(\vec{x}, 0)$ e $S_0(\vec{x}) = S(\vec{x}, 0)$, determinam $R(\vec{x}, t)$ e $S(\vec{x}, t)$. Apesar de podermos utilizar as equações (9.75) e (9.76) para descrever a teoria, na prática é mais conveniente obtermos $\psi(\vec{x}, t)$ da equação de Schrödinger (4.17).

Essa interpretação propõe associar com a onda $\psi(\vec{x}, t)$, que é física e que se propaga no espaço, uma partícula pontual de massa M , que segue a trajetória $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Uma vez

que ambas dependem do mesmo parâmetro M , podendo também depender da carga e do momento magnético μ , percebemos que a onda exerce uma força na partícula, assim é apropriado tratarmos a onda e a partícula como aspectos de um único sistema físico. Para vermos a conexão entre a onda e a partícula, notamos que a equação (9.75) tem a forma de uma equação de Hamilton-Jacobi clássica,

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2}{2M} + Q + V = 0, \quad (4.20)$$

a menos do termo:

$$Q(\vec{x}, t) \equiv -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R(\vec{x}, t)}{R(\vec{x}, t)}, \quad (4.21)$$

que é conhecido como potencial quântico. Podemos perceber que quando $Q \neq 0$, a trajetória da partícula será diferente da trajetória clássica. O limite clássico na teoria de de Broglie-Bohm acontece quando o potencial quântico Q é desprezível perante os demais termos da equação (4.20). Assim, a equação (4.20) fornece a dinâmica do sistema. É importante ressaltar que para um único potencial clássico podem existir vários potenciais quânticos, os quais serão determinados pelas condições de contorno, tais como presença de fendas, anteparos, dentre outros. É dessa maneira que as condições experimentais influenciam no sistema quântico [48].

Para o caso em que se considera o ordenamento dos operadores quânticos, o potencial quântico é dado por [79]:

$$Q(\vec{x}, t) \equiv -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R(\vec{x}, t)}{R(\vec{x}, t)} - \frac{m}{x} \frac{\nabla R(\vec{x}, t)}{R(\vec{x}, t)}, \quad (4.22)$$

onde x é o módulo de \vec{x} , M é a massa da partícula e m é o parâmetro de ordenamento dos operadores.

Para se determinar a aceleração das trajetórias bohmianas, basta derivar a equação (4.12), considerando uma única partícula, em relação ao tempo e usar a equação (4.20), obtendo:

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla} V - \vec{\nabla} Q. \quad (4.23)$$

A equação (4.23) tem a forma da segunda lei de Newton, aonde a partícula é submetida a uma força quântica $-\vec{\nabla} Q$ e uma força clássica $-\vec{\nabla} V$. Essa equação pode ser considerada

a lei de movimento da partícula. A única informação que deve ser adicionada aquelas contidas em $\psi(\vec{x}, t)$, com o objetivo de obter uma única trajetória para todos os instantes de tempo, é \vec{x}_0 . A especificação de \vec{x} e $\psi(\vec{x}, t)$, em um dado momento, define o estado de um sistema individual. Nessa seção tratamos de um caso genérico, mas para os modelos estudados por nós a quantidade x será representada pelo fator de escala a .

Modelo de Hořava-Lifshitz simplificado para o início do Universo

Nessa seção, consideramos a interpretação de De Broglie-Bohm de um modelo de cosmologia quântica de Hořava-Lifshitz simplificado na presença de um fluido perfeito para radiação. O modelo já foi estudado na Ref. [18]. Lá os autores resolveram a equação Wheeler-DeWitt correspondente, encontraram a função de onda e calcularam um valor aproximado do valor esperado do fator de escala. Aqui, calculamos o valor esperado do fator de escala exato e a trajetória de Bohm para o fator de escala desse modelo e mostramos que ele nunca vai à zero. Esse resultado dá uma forte indicação de que o modelo é livre de singularidades, no nível quântico. Também comparamos essa trajetória com o valor esperado do fator de escala. Finalmente, calculamos o potencial quântico para esse modelo. Essa quantidade ajuda a entender por que o fator de escala nunca se anula.

5.1 O modelo quântico e o valor esperado do fator de escala

Seguindo os autores da Ref. [18], estudamos, aqui, os modelos de cosmologia quântica de Friedmann-Robertson-Walker no contexto da gravidade HL projetável sem a condição

de equilíbrio detalhado. O conteúdo de matéria dos modelos é um fluido perfeito com equação de estado: $p = \omega\rho$, onde p é a pressão do fluido e ρ sua densidade de energia. A constante de curvatura das seções espaciais pode ser positiva ($k = 1$), negativa ($k = -1$) ou zero ($k = 0$). O modelo pode ser escrito em sua forma hamiltoniana com o auxílio do formalismo da ADM [76] e o formalismo variacional de Schutz [77, 78]. Como obtido no capítulo 3, o hamiltoniano total é dado pela equação (3.203). Como vimos no capítulo 3, o espaço de fase desse modelo é descrito pelo fator de escala a , uma variável associada ao fluido T e seus momentos canonicamente conjugados P_a e P_T , respectivamente. Todos eles são funções apenas da coordenada temporal t . Vamos considerar o *gauge* $N = a^{3\omega}$.

Como vimos no capítulo 4, a versão quântica da teoria é obtida substituindo os momentos por suas expressões de operador correspondentes, equações (4.2) e (4.3). Em seguida, exigindo que a superhamiltoniana em sua forma operatorial aniquile a função de onda $\psi(a, T)$. A equação resultante é a equação de Wheeler-DeWitt (4.4),

$$\left[\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{m}{a^2} \frac{\partial}{\partial a} - \frac{4i}{a^{3\omega}} \frac{\partial}{\partial T} + 4 \left(-g_c k a + g_\Lambda a^3 + \frac{g_r k^2}{a} + \frac{g_s k}{a^3} \right) \right] \psi(a, T) = 0, \quad (5.1)$$

onde m é um parâmetro que explica a ambiguidade no fator de ordenação das quantidades a e P_a no primeiro termo da equação (3.203). Vamos restringir nossa atenção para o caso $m = 1$. Agora, realizamos a seguinte separação de variáveis em $\psi(a, T)$

$$\psi(a, T) = e^{-iET} \psi(a). \quad (5.2)$$

Introduzindo a equação (5.2) na equação (5.1), descobrimos a seguinte equação para $\psi(a)$

$$\left[a^2 \frac{d^2}{da^2} - a \frac{d}{da} + 4 \left(-g_c k a^4 + g_\Lambda a^6 + g_r k^2 a^2 + g_s k + E a^{3-3\omega} \right) \right] \psi(a) = 0, \quad (5.3)$$

Vamos considerar uma forma simplificada da equação (5.3), obtida para o caso $g_c = g_\Lambda = g_r = 0$. A motivação para fazer essa simplificação é o fato de que podemos negligenciar os termos com esses coeficientes no início do Universo. Em particular, vamos estudar a solução para o modelo com radiação ($\omega = 1/3$) usando a interpretação de *de Broglie-Bohm*. Introduzindo essas modificações na equação (5.3), obtemos:

$$\left[a^2 \frac{d^2}{da^2} - a \frac{d}{da} + 4 \left(g_s k + E a^2 \right) \right] \psi(a) = 0. \quad (5.4)$$

Uma solução para a equação (5.4) é dada por [18]:

$$\psi_E(a) = aJ_{\sqrt{1-4kg_s}}(2\sqrt{E}a), \quad (5.5)$$

onde J é a função de Bessel de primeira ordem. Agora, introduzindo $\psi_E(a)$ na equação (5.2), é possível construir um pacote de ondas da expressão resultante. Para fazer isso, é preciso integrar a expressão resultante, sobre E , de 0 até ∞ , com uma função peso apropriada. Fazendo isso, encontra-se o seguinte pacote de ondas [18]:

$$\psi(a, T) = \frac{a^{1+\sqrt{1-4kg_s}}}{(\gamma - iT)^{1+\sqrt{1-4kg_s}}} e^{-\frac{a^2}{\gamma - iT}}, \quad (5.6)$$

onde γ é uma constante positiva arbitrária. Por simplicidade, escolhemos $\gamma = 1$. Queremos agora escrever $\psi(a, T)$, equação (5.6), em sua forma polar

$$\psi(a, T) = R(a, T)e^{iS(a, T)}. \quad (5.7)$$

Depois de algum cálculo, obtemos

$$\psi(a, T) = \frac{a^{1+\sqrt{1-4kg_s}}}{(1+T^2)^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4kg_s}}{2}}} e^{-\frac{a^2}{(1+T^2)}} e^{i\left[(1+\sqrt{1-4kg_s})\tan^{-1}(T) - \frac{Ta^2}{(1+T^2)}\right]}. \quad (5.8)$$

Da equação (5.8), podemos identificar $R(a, T)$ e $S(a, T)$ como

$$R(a, T) = \frac{a^{1+\sqrt{1-4kg_s}}}{(1+T^2)^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4kg_s}}{2}}} e^{-\frac{a^2}{(1+T^2)}}, \quad (5.9)$$

$$S(a, T) = \left(1 + \sqrt{1 - 4kg_s}\right) \tan^{-1}(T) - \frac{Ta^2}{(1 + T^2)}. \quad (5.10)$$

De $\psi(a, T)$, equação (5.8), é possível calcular o valor esperado do fator de escala, usando a expressão (4.6), adaptada para a presente situação:

$$\langle a \rangle(T) = \frac{\int_0^\infty \psi(a, T)a\psi^*(a, T)da}{\int_0^\infty \psi(a, T)\psi^*(a, T)}. \quad (5.11)$$

Portanto, introduzindo $\psi(a, T)$, equação (5.8) na equação (5.11), obtemos a seguinte expressão exata para o valor esperado do fator de escala

$$\langle a \rangle(T) = \sqrt{1+T^2} \left(\frac{1-4kg_s + \sqrt{1-4kg_s}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\Gamma(\sqrt{1-4kg_s})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \sqrt{1-4kg_s})}. \quad (5.12)$$

5.2 A interpretação de de Broglie-Bohm

Agora, queremos descrever esse modelo na interpretação de *de Broglie-Bohm*. Nessa interpretação, podemos calcular a trajetória do fator de escala usando a equação (4.12). Inicialmente, precisamos escrever o momento canonicamente conjugados a a em termos da derivada temporal de a . Isso pode ser obtido a partir da equação (3.141) escrita no *gauge* $N = a$, dada por:

$$P_a = -2\dot{a}. \quad (5.13)$$

Depois substituindo o resultado obtido na equação (5.13) na equação (4.12), apropriadamente escrita para a presente situação, obtemos:

$$\dot{a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial S(a, T)}{\partial a}. \quad (5.14)$$

Nós agora, trocamos diretamente a derivada com respeito à coordenada temporal t na equação (5.14) pela derivada em relação à variável de tempo $T(t)$, porque no *gauge* atual $T(t) = t$. Introduzindo a fase $S(a, T)$, equação (5.10) na equação (5.14) e realizando a derivada parcial e integração indicadas, obtemos a seguinte trajetória do fator de escala

$$a(T) = a_0 \sqrt{\frac{1 + T^2}{1 + T_0^2}}, \quad (5.15)$$

onde T_0 é o valor inicial de T e a_0 é uma constante positiva que dá o valor de $a(T_0)$. Comparando o valor esperado do fator de escala, equação (5.12) e a equação para a trajetória de *de Broglie-Bohm*, equação (5.15), notamos que essas expressões depende de T da mesma forma. Se fixarmos $T_0 = 0$ na equação (5.15) e compararmos esta com a equação (5.12), teremos que a equação do valor esperado do fator de escala (5.12) e sua trajetória de De Broglie-Bohm, equação (5.15) serão os mesmos se:

$$a_0 = \left(\frac{1 - 4kg_s + \sqrt{1 - 4kg_s}}{\sqrt{2}} \right) \frac{\Gamma(\sqrt{1 - 4kg_s})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \sqrt{1 - 4kg_s})}, \quad (5.16)$$

Como não há restrições quanto ao sinal de T , ele pode assumir valores positivos e negativos. Portanto, a equação da trajetória (5.15), representa um universo que se contrai de um tamanho infinito quando $T \rightarrow -\infty$, para um tamanho mínimo a_0 , equação (5.16)

em $T = 0$ e, em seguida, expande para um tamanho infinito quando $T \rightarrow +\infty$. Então, nesse modelo, o universo não tem começo e é livre de singularidades, no nível quântico. A singularidade removida da versão clássica do modelo, pelo fato de que o tamanho mínimo do fator de escala não é mais zero. Classicamente, no início do universo, quando o fator de escala ($a(t)$) vai para zero, algumas propriedades do fluido perfeito como a pressão e a densidade de energia são singulares, porque são inversamente proporcionais a alguma potência de $a(t)$. No presente *gauge*, onde $T(t) = t$, é claro que se pode associar esse instante com o valor zero da variável do fluido perfeito $T(t)$. Por outro lado, na versão quântica do modelo, uma vez que temos uma forte indicação de que o fator de escala nunca vai a zero, todas as propriedades do fluido perfeito, mencionadas acima, são bem definidas no início do universo. Observando a expressão de $\langle a \rangle$, equação (5.12), ou $a(T)$, equação (5.15), as quais são as mesmas para a_0 dado pela equação (5.16), notamos que elas dependem de dois parâmetros: k e g_s . Após um estudo numérico detalhado sobre como $\langle a \rangle$ ou $a(T)$ dependem desses parâmetros, chegamos às seguintes conclusões. Como k e g_s aparecem sempre juntos, como $-4kg_s$, nas expressões de $\langle a \rangle$ ou $a(T)$, temos três casos diferentes: (i) $-4kg_s < 0$, (ii) $-4kg_s = 0$ e (iii) $-4kg_s > 0$. É importante notar que para o caso (i) $\langle a \rangle$ ou $a(T)$ será real apenas se a condição $1 - 4kg_s > 0$ é satisfeita. Essa restrição, nos valores do parâmetro g_s , para o caso (i), mostra as limitações da presente simplificação utilizada para obter a solução (5.5). Esperamos, em um trabalho futuro, resolver a equação (5.3) completa. Se o valor de g_s for fixado tal que $-4kg_s$ tenha o mesmo valor absoluto, para os casos (i) e (iii), obtém-se que: $\langle a \rangle$ e $a(T)$ sempre tem o maior a_0 para o caso (iii), o próximo para o caso (ii) e finalmente para o caso (i). Também é possível ver que: $\langle a \rangle$ e $a(T)$ sempre contrai e expande mais rapidamente para o caso (iii), o próximo para o caso (ii) e finalmente para o caso (i). Esses resultados estão de acordo com o modelo clássico correspondente [18]. Um exemplo comparando o valor esperado do fator de escala ou a trajetória de *de Broglie-Bohm* para esses três casos é mostrado na figura 5.1.

Usando o potencial quântico $Q(a, T)$, é possível entender porque a equação da trajetória do fator de escala (5.15) não vai para zero quando $T \rightarrow 0$. Para obter o potencial quântico $Q(a, T)$, basta substituir (5.9) na equação (4.22), apropriadamente escrita para a presente

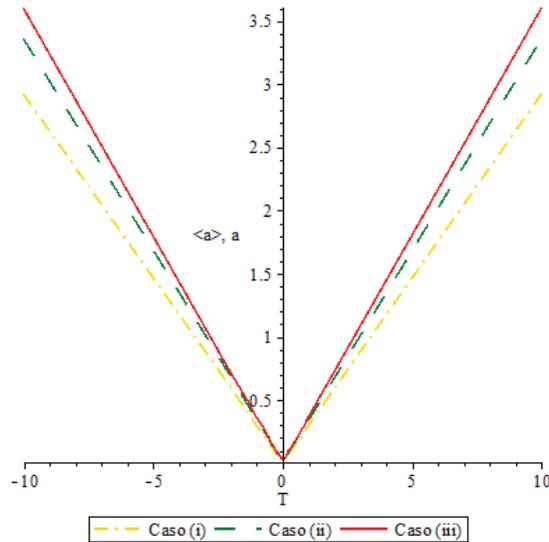


Figura 5.1: $\langle a \rangle$ ou $a(T)$ para os três casos: (i) $k = 1$, $g_s = 1/5$; (ii) $k = 0$, $g_s = 1/5$; (iii) $k = -1$, $g_s = 1/5$.

situação,

$$Q(a, T) = \frac{4kg_s}{a^2} + \frac{4(1 + \sqrt{1 - 4kg_s})}{1 + T^2} - \frac{4a^2}{(1 + T^2)^2}, \quad (5.17)$$

onde fizemos $M = 1$ e $m = 1$.

Observando a equação (5.4) vemos que o potencial clássico é dado por:

$$V(a, T) = \frac{-4kg_s}{a^2}. \quad (5.18)$$

Agora, temos que avaliar a equação do potencial quântico (5.17) sobre a equação da trajetória de *de Broglie-Bohm* (5.15) com a_0 dado pela equação (5.16) e estabelecendo $T_0 = 0$. Podemos escrever o potencial quântico como uma função de $T(Q(T))$

$$Q(T) = \left[\frac{4kg_s}{a_0^2} + 4(1 + \sqrt{1 - 4kg_s}) - 4a_0^2 \right] \frac{1}{1 + T^2}. \quad (5.19)$$

Depois de um estudo detalhado de $Q(T)$, equação (5.19), descobrimos que para os três casos considerados acima: (i) $-4kg_s < 0$, (ii) $-4kg_s = 0$ e (iii) $-4kg_s > 0$, $Q(T)$ é positivo e finito em $T = 0$, diminui à medida que o valor absoluto de T aumenta e vai assintoticamente para zero quando $T \rightarrow \pm\infty$, para todos os valores possíveis de g_s (dependendo de cada caso). Um exemplo do potencial quântico, sobre a trajetória de *de Broglie-Bohm* $Q(T)$, para as três situações descritas no texto é mostrado na figura 5.2.

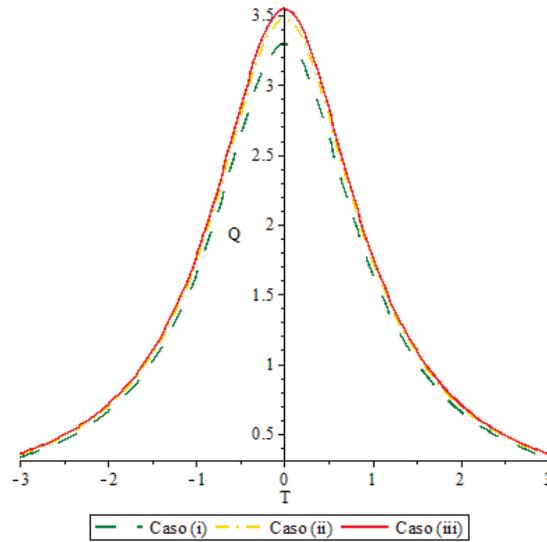


Figura 5.2: Potencial quântico sobre a trajetória de Bohm para os três casos descritos no texto com $T_0 = 0$. Para (i) $k = 1$, $g_s = 1/5$; (ii) $k = 0$, $g_s = 1/5$; (iii) $k = -1$, $g_s = 1/5$.

É interessante notar que, para o caso (i) $-4kg_s < 0$, observando o potencial clássico $V(a, T)$, equação (5.18), notamos que $V(a, T)$ dá origem a um poço de potencial quando $T \rightarrow 0$. O potencial efetivo, que é dado pela soma de $V(a, T)$, equação (5.18) com $Q(a, T)$, equação (5.19), é positivo e finito em $T = 0$, diminui à medida que o valor absoluto de T aumenta e vai assintoticamente para zero quando $T \rightarrow \pm\infty$, para todos os possíveis valores de g_s . Para o caso (ii) $-4kg_s = 0$, o potencial clássico $V(a, T)$, equação (5.18), é zero. Para esse caso, o modelo se torna semelhante ao correspondente em cosmologia quântica baseado na RG acoplado a um fluido perfeito para radiação. A interpretação de *de Broglie-Bohm* desse modelo já foi tratada na Ref. [82] e seus resultados estão de acordo com os nossos. Para o caso (iii) $-4kg_s > 0$, observando o potencial clássico $V(a, T)$, equação (5.18), notamos que $V(a, T)$, juntamente com $Q(a, T)$, também produz uma barreira de potencial que impede que o valor do fator de escala de ir a zero, em $T = 0$. Portanto, para os três casos, haverá uma barreira de potencial, em $T = 0$, que impede que o valor do fator de escala de ir a zero.

Cosmologia quântica de um modelo de Hořava-Lifshitz acoplado com a radiação

Nessa seção, quantizamos canonicamente um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico de Hořava-Lifshitz, com seções de constantes espaciais positivas e acoplado à radiação. Consideramos a versão projetável dessa teoria gravitacional sem a condição de equilíbrio detalhado. Usamos o formalismo da ADM para escrever o hamiltoniano gravitacional do modelo e o formalismo variacional de Schutz para escrever o hamiltoniano do fluido perfeito. Encontramos a equação de Wheeler-DeWitt para o modelo. Essa equação depende de vários parâmetros provenientes da teoria de HL. Estudamos o caso em que os valores dos parâmetros da teoria de HL são escolhidos, de tal forma que as soluções para a equação de Wheeler-DeWitt são limitadas.

Inicialmente, resolvemos usando a interpretação de *Muitos Mundos*. Usando pacotes de ondas calculados com as soluções para a equação de Wheeler-DeWitt, obtemos o valor esperado do fator escalar $\langle a \rangle$. Mostramos que essa quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca vai para zero. Esse resultado dá uma indicação de que o modelo é livre de singularidades, no nível quântico. Melhoramos esse resultado mostrando que se subtraírmos um desvio padrão de $\langle a \rangle$, essa quantidade ainda é positiva. Nós também

estudamos como o valor esperado do fator de escala depende de cada um dos parâmetros de HL. Usamos também a interpretação de *DeBroglie-Bohm*. Calculamos as trajetórias de Bohm para o fator de escala e mostramos que ela nunca vai à zero. Mostramos que cada trajetória está de acordo com o $\langle a \rangle$ correspondente. Também calculamos o potencial quântico. Essa quantidade ajuda a entender por que o fator de escala nunca desaparece. Neste trabalho, estudaremos a versão da CQ do modelo atual com $k = 1$, sem negligenciar qualquer parâmetro de HL e usando as interpretações de *Muitos Mundos* e de *de Broglie-Bohm*. Levando em conta as observações cosmológicas atuais, o modelo atual não será capaz de descrever a atual expansão acelerada do Universo. Não é nossa intenção descrever o presente estágio de nosso Universo com o modelo apresentado aqui. Por outro lado, é nossa intenção descrever um estágio *possível* do nosso Universo primordial. Claro que, após esse estágio inicial, o Universo teria que passar por uma transição onde os parâmetros de HL mudariam para permitir uma expansão acelerada.

Na seção 6.1, construímos a versão clássica do modelo cosmológico homogêneo e isotrópico de HL, com seção de constante espacial positiva e acoplada à radiação. Na seção 6.2, quantizamos a versão clássica do modelo e resolvemos a equação de Wheeler-DeWitt resultante. Usando as soluções, construímos pacotes de onda e calculamos os valores esperados do fator de escala. Estudamos como o valor esperado do fator de escala depende de cada um dos parâmetros de HL. Por fim, avaliamos o comportamento do valor esperado do fator de escala após a subtração, a partir dele, de um desvio padrão de a . Na seção 6.3, calculamos as trajetórias de Bohm para o fator de escala e os potenciais quânticos correspondentes. Nós investigamos como eles dependem dos parâmetros do modelo de HL. Comparamos também as trajetórias de Bohm para o fator de escala com os correspondentes valores esperados dessa quantidade. A seção 6.4 resume nossos principais pontos e resultados.

6.1 Modelo clássico de Hořava-Lifshitz acoplado a radiação

No presente trabalho, consideraremos o Hamiltoniano total dado em (3.203).

$$H = N\mathcal{H} = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c a + g_\Lambda a^3 + \frac{g_r}{a} + \frac{g_s}{a^3} + \frac{P_T}{a} \right]. \quad (6.1)$$

Na equação (6.1), definimos $k = 1$, a fim de considerar apenas hipersuperfícies espaciais com curvaturas constantes positivas e $\omega = 1/3$, que restringem o conteúdo de matéria do universo a ser radiação. A dinâmica clássica é governada pelas equações de Hamilton, derivadas da equação (6.1).

Para ter uma ideia do comportamento clássico do fator de escala, vamos derivar a equação de Friedmann de (6.1). A equação de Friedmann é obtida variando a equação (6.1), com relação a N , e igualando a equação resultante a zero. No formalismo ADM, essa equação é também conhecida como a equação do vínculo superhamiltoniano [10]. Agora, no gauge conforme $N = a$, temos que:

$$P_a = -2\dot{a}, \quad (6.2)$$

onde o ponto significa derivada em relação ao tempo conforme. Portanto, podemos escrever a equação de Friedmann em termos de \dot{a} , como,

$$\dot{a}^2 + V_c(a) = 0, \quad (6.3)$$

onde

$$V_c(a) = g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2} - P_T. \quad (6.4)$$

O comportamento do fator de escala depende da forma do potencial clássico $V_c(a)$ (6.4). Por outro lado, a forma de $V_c(a)$ depende dos valores dos parâmetros presentes nela. Os parâmetros g_c e P_T são positivos. O primeiro é positivo porque está associado à constante de acoplamento da curvatura e o segundo porque está relacionado com a densidade de energia do fluido. Os outros parâmetros podem ser positivos ou negativos. No presente trabalho, estudaremos os modelos onde: g_r é positivo e g_s e g_Λ são negativos. Para

essas escolhas, $V_c(a)$ (6.4) produz modelos em que o fator de escala é limitado. Em outras palavras, oscila entre valores máximos e mínimos. Esses modelos estão livres da singularidade do big bang.

6.2 Interpretação de Muitos Mundos

6.2.1 Equação de autovalor e método espectral

Para esse modelo a equação de Wheeler-DeWitt é dada por (4.4):

$$\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a^2} + g_c a^2 - g_\Lambda a^4 - g_r - \frac{g_s}{a^2}\right)\psi(a, \tau) = i\frac{\partial}{\partial \tau}\psi(a, \tau). \quad (6.5)$$

onde $m = 0$ e a nova variável $\tau = -T$ foi introduzida.

A equação de Wheeler-DeWitt (6.5) pode ser resolvida escrevendo $\Psi(a, \tau)$ como,

$$\Psi(a, \tau) = e^{-iE\tau} \eta(a) \quad (6.6)$$

em que $\eta(a)$ depende unicamente de a e satisfaz a equação de valor próprio

$$-\frac{d^2\eta(a)}{da^2} + V(a)\eta(a) = 4E\eta(a), \quad (6.7)$$

onde o potencial $V(a)$ é

$$V(a) = 4g_c a^2 - 4g_\Lambda a^4 - 4g_r - \frac{4g_s}{a^2}. \quad (6.8)$$

Do mesmo modo que no regime clássico, o potencial $V(a)$ dá origem a estados ligados. Portanto, os valores possíveis da energia E na equação (6.7) desses estados pertencerão a um conjunto discreto de autovalores E_n , no qual $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Para cada autovalor E_n , haverá um autovetor correspondente $\eta_n(a)$. A solução geral para a equação de Wheeler-DeWitt (6.5) é uma combinação linear de todos os autovetores,

$$\Psi(a, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \eta_n(a) e^{-iE_n \tau}, \quad (6.9)$$

onde C_n são coeficientes constantes a serem especificados.

Usaremos o método de Galerkin ou espectral (ME) [55], para resolver a equação de autovalor (6.7). Este método já foi utilizado na cosmologia quântica [56–58] e também

em diversas áreas da relatividade geral clássica [59–62]. Uma condição importante do ME é que as funções, que são soluções para a equação que queremos resolver, devem cair suficientemente rápido para grandes valores da variável. Na situação atual, essa variável é o fator de escala a . Levando em conta essa propriedade da solução, restringimos o domínio de a a: $0 < a < L$, no qual L é um número real a ser escolhido adequadamente. Devido ao comportamento das soluções para a equação (6.7), consideraremos aqui as funções de onda que satisfazem a condição $\Psi(0, \tau) = 0$. É conveniente, então, escolher nossas funções bases para serem funções senoidais. Portanto, podemos escrever $\eta_n(a)$ na equação (6.7) como,

$$\eta(a) \approx \sum_{n=1}^N A_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right), \quad (6.10)$$

em que os coeficientes A_n ainda estão por ser determinados, e um número finito N de funções base foi escolhido. Para o mesmo domínio de a , também usamos a mesma base para expandir os termos da equação (6.7),

$$V(a)\eta(a) \approx \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{m,n} A_m \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right), \quad (6.11)$$

$$4\eta(a) \approx \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C'_{m,n} A_m \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right), \quad (6.12)$$

em que $V(a)$ é dado na equação (6.8) e os coeficientes $C_{m,n}$ e $C'_{m,n}$ podem ser facilmente determinados,

$$C_{m,n} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi a}{L}\right) V(a) \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) da, \quad (6.13)$$

$$C'_{m,n} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi a}{L}\right) 4 \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) da. \quad (6.14)$$

Introduzindo os resultados dados pelas equações (6.10)-(6.14) na equação de autovalor (6.7) e devido a ortonormalidade das funções de base, obtemos,

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n + \sum_{m=1}^N C_{m,n} A_m = E \sum_{m=1}^N C'_{m,n} A_m. \quad (6.15)$$

A última equação (6.15), pode ser escrita em uma notação compacta como,

$$C'^{-1} D A = E A, \quad (6.16)$$

onde C' é a matriz quadrada de $N \times N$ cujos elementos são dados por (6.14) e D é uma matriz quadrada de $N \times N$ com elementos da forma,

$$D_{m,n} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta_{m,n} + C_{m,n}. \quad (6.17)$$

A solução para a equação (6.16) fornece os autovalores e as autofunções correspondentes aos estados ligados do nosso modelo de cosmologia quântica.

6.2.2 Valores esperados do fator de escala e desvio padrão

Na presente subseção, resolvemos a equação de autovalor (6.7), usando o ME. Para entender como cada parâmetro de HL modifica o valor esperado do fator de escala ($\langle a \rangle$), computamos o $\langle a \rangle$ fixando todos os parâmetros, exceto um. Esse cálculo nos permite aprender como $\langle a \rangle$ depende do parâmetro de HL que varia. Então, repetimos o cálculo, da mesma maneira, para todos os parâmetros de HL. Nós também estudamos como $\langle a \rangle$ depende do número de funções base \mathcal{N} , presente em $\eta_n(a)$ (6.10). Consideramos os casos em que $2 \leq \mathcal{N} \leq 10$. Um ingrediente importante no MS é L . Para melhorar nossos resultados, calculamos o melhor valor de L para cada valor de um determinado parâmetro de HL.

Calculamos o valor esperado do fator de escala utilizando a equação (4.6), adaptada para a presente situação:

$$\langle a \rangle = \frac{\int_0^\infty a |\Psi(a, \tau)|^2 da}{\int_0^\infty |\Psi(a, \tau)|^2 da}, \quad (6.18)$$

onde $\Psi(a, \tau)$ é dado pela equação (6.9). Para calcular $\Psi(a, \tau)$, usamos os autovetores $\eta_n(a)$ e os autovalores E_n , derivados da equação (6.7) com o ME. Nós também definimos todos os coeficientes C_n iguais a um na equação (6.9).

Como veremos, para todos os parâmetros de HL e valores de \mathcal{N} considerados, $\langle a \rangle$ oscila entre valores máximos e mínimos e nunca vai a zero. Isso dá uma indicação inicial de que esses modelos são livres de singularidades, no nível quântico. O domínio onde $\langle a \rangle$ oscila depende da energia média (\bar{E}) do pacote de onda considerado. Essa quantidade é especificada pelo número \mathcal{N} , das funções base que contribuem para o pacote de onda, e os autovalores de energia dessas funções de base \mathcal{N} . Podemos melhorar o resultado de que o $\langle a \rangle$ nunca vai a zero calculando $\langle a \rangle - \sigma_a$, onde σ_a representa o desvio padrão de a . Se essa

quantidade for sempre positiva como $\langle a \rangle$, será uma indicação mais forte de que o modelo está livre de singularidades, no nível quântico. Calculamos $\langle a \rangle - \sigma_a$, para o modelo atual. Por definição, o desvio padrão de a é dado por,

$$\sigma_a = \sqrt{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}, \quad (6.19)$$

onde

$$\langle a^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty a^2 |\Psi(a, \tau)|^2 da}{\int_0^\infty |\Psi(a, \tau)|^2 da}, \quad (6.20)$$

e $\langle a \rangle^2$ é dado pelo quadrado da equação (6.18). Usando a função de onda (6.9) e repetindo alguns procedimentos que fizemos para calcular o $\langle a \rangle$, calculamos $\langle a \rangle - \sigma_a$ para todos os parâmetros de HL e valores de \mathcal{N} , considerados. Vamos agora apresentar nossos resultados sobre como $\langle a \rangle$ depende dos parâmetros de HL (g_c, g_r, g_s, g_Λ) e \mathcal{N} . Os valores dos parâmetros de HL e de \mathcal{N} , nas figuras abaixo, foram escolhidos para uma melhor visualização dos resultados.

Resultados para g_c

Depois de calcular o $\langle a \rangle$ para vários valores diferentes de g_c , \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando os outros parâmetros de HL fixos, notamos que essa quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca vai a zero. Dando uma indicação inicial de que esses modelos estão livres de singularidades, no nível quântico. Agora, se fixarmos \mathcal{N} , juntamente com os outros parâmetros de HL e variando g_c , observamos as seguintes propriedades de $\langle a \rangle$: (i) o valor máximo do $\langle a \rangle$ diminui com o aumento de g_c ; (ii) a amplitude de oscilação para o $\langle a \rangle$ diminui com o aumento de g_c ; (iii) o número de oscilações do $\langle a \rangle$, em um intervalo de τ fixo, aumenta com o aumento de g_c . Esses comportamentos podem ser entendidos pela observação do potencial, que limita o fator de escala. Quando há aumento de g_c , o $\langle a \rangle$ é forçado a oscilar em uma região cada vez menor. Nestas condições, para os \mathcal{N} e para os outros parâmetros de HL fixos, o valor máximo e a amplitude do $\langle a \rangle$ decresce. Além disso, como o domínio em que o $\langle a \rangle$ oscila está diminuindo, o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, aumenta. Todas essas propriedades podem ser vistas nas Figuras 6.1 e 6.2. Cada figura mostra exemplos do comportamento de $V(a)$ e

do $\langle a \rangle$, para dois valores diferentes de g_c enquanto o intervalo τ , \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL permanecem fixos.

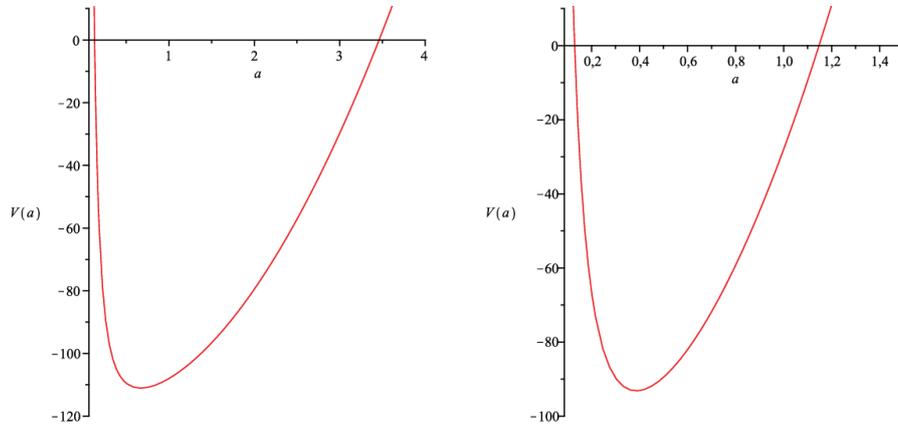


Figura 6.1: As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$. Na esquerda $V(a)$ usamos $g_c = 10$ e na direita $g_c = 90$.

Na Figura 6.1, $\bar{E} = -104.592479205836$ para $g_c = 10$. Portanto, o domínio onde $\langle a \rangle$ oscila é: $[0.3782813789, 1.182224715]$, que tem o comprimento: 0.8039433361 . Por outro lado, $\bar{E} = -73.7774376335110$ para $g_c = 90$. Portanto, o domínio onde $\langle a \rangle$ oscila é: $[0.2184008560, 0.6825577576]$, que tem o comprimento: 0.4641569016 .

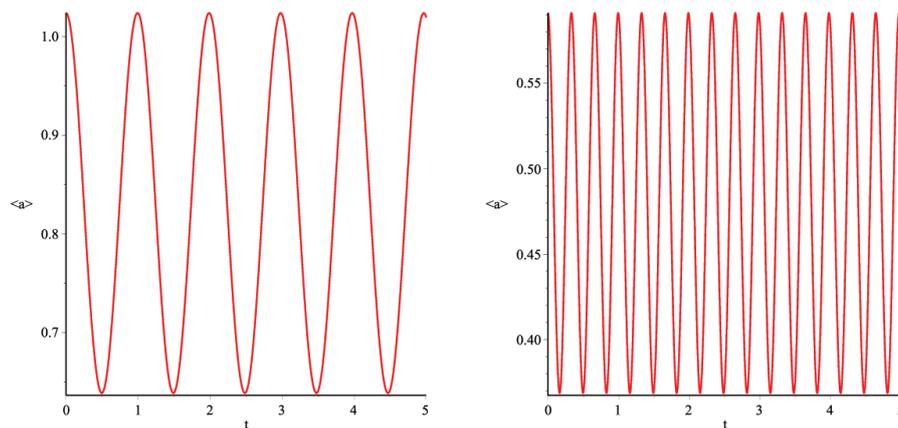


Figura 6.2: As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$. À esquerda para o $\langle a \rangle$ usamos $g_c = 10$ e à direita $g_c = 90$.

Resultados para g_Λ

Depois de calcular o $\langle a \rangle$ para vários valores diferentes de g_Λ , \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando fixo os outros parâmetros de HL, notamos que esta quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca vai a zero. Isso dá uma indicação inicial de que esses modelos são livres de singularidades, no nível quântico. Agora, se fixarmos \mathcal{N} , juntamente com os outros parâmetros de HL, e variar g_Λ , observamos as seguintes propriedades de $\langle a \rangle$: (i) o valor máximo do $\langle a \rangle$ diminui com a diminuição de g_Λ ; (ii) a amplitude de oscilação para o $\langle a \rangle$ diminui com a diminuição de g_Λ ; (iii) o número de oscilações de $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, aumenta com a diminuição de g_Λ . Esses comportamentos podem ser entendidos pela observação do potencial, que limita o fator de escala. Quando se diminui g_Λ , o $\langle a \rangle$ é forçado a oscilar em uma região cada vez menor. Nessas condições, para os \mathcal{N} e para os outros parâmetros de HL fixos, o valor máximo e a amplitude do $\langle a \rangle$ diminuem. Além disso, como o domínio em que o $\langle a \rangle$ oscila está diminuindo, o número de oscilações de $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, aumenta. Todas essas propriedades podem ser vistas nas Figuras 6.3 e 6.4. Cada figura mostra exemplos do comportamento de $V(a)$ e $\langle a \rangle$, para dois valores diferentes de g_Λ , enquanto o intervalo de τ , \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL permanecem fixos.

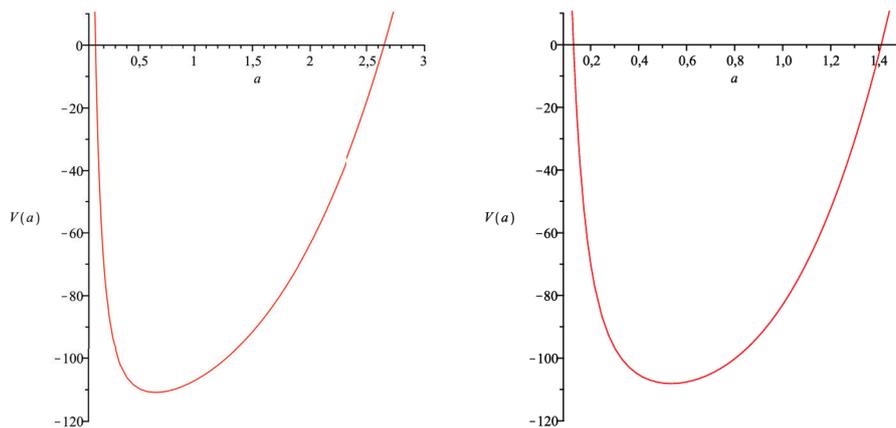


Figura 6.3: As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_c = 10$. Na esquerda, para $V(a)$, usamos $g_\Lambda = -1$ e à direita $g_\Lambda = -25$.

Na Figura 6.3, $\bar{E} = -103.833980119716$ para $g_\Lambda = -1$. Portanto, o domínio onde

$\langle a \rangle$ oscila é: $[0.3676565615, 1.137772203]$, que tem o tamanho: 0.7701156415. Por outro lado, $\bar{E} = -95.6220677191430$ para $g_\Lambda = -25$. Portanto, o domínio onde o $\langle a \rangle$ oscila é: $[0.2927449802, 0.8679732690]$, que tem o comprimento: 0.5752282888.

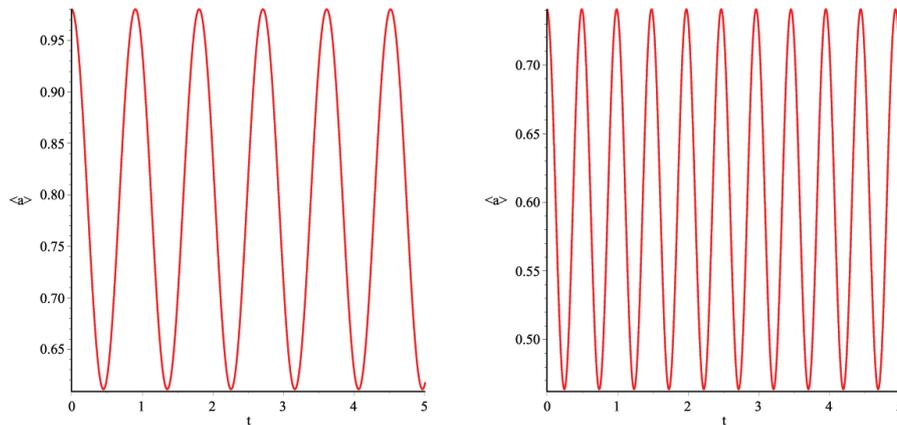


Figura 6.4: As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_c = 10$. À esquerda o $\langle a \rangle$ sendo usado $g_\Lambda = -1$ e no lado direito $g_\Lambda = -25$.

Resultados para g_r

Depois de calcular o $\langle a \rangle$ para vários valores diferentes de g_r , \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando fixo os outros parâmetros de HL, notamos que esta quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca nunca vai a zero. Isso dá uma indicação inicial de que esses modelos são livres de singularidades, no nível quântico. Agora, se fixarmos \mathcal{N} , juntamente com os outros parâmetros de HL, e variar g_r , observamos as seguintes propriedades para o $\langle a \rangle$: seu valor máximo, sua amplitude de oscilação e o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, não variam com g_r . Quando se muda g_r , o tamanho e o posição do intervalo em que o $\langle a \rangle$, é forçado a oscilar, não é modificado. Nestas condições, fixando \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL, o valor máximo do $\langle a \rangle$, o número de oscilações do $\langle a \rangle$ e sua amplitude não são modificados, quando se altera g_r . Todas essas propriedades podem ser vistas na Figura 6.5 e 6.6. Elas mostram exemplos do comportamento do $\langle a \rangle$, para dois valores diferentes de g_r , enquanto o intervalo de τ , \mathcal{N} e o outros parâmetros de HL permanecem fixos.

Na Figura 6.5, $\bar{E} = -18.2104751421654$ para $g_r = 40$. Portanto, o domínio onde

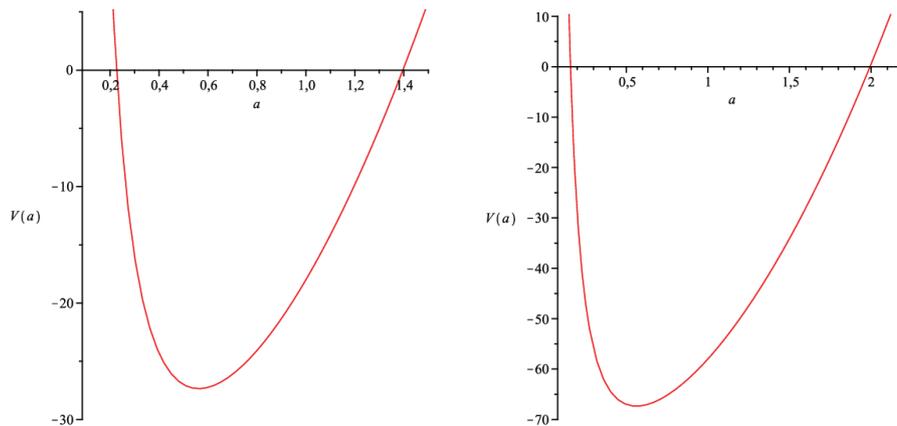


Figura 6.5: As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_s = -2$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. Na esquerda, usamos para $V(a)$, $g_r = 40$ e à direita $g_r = 80$.

$\langle a \rangle$ oscila é: $[0.3180954556, 0.9941285249]$, que tem o comprimento: 0.6760330693. Por outro lado, $\bar{E} = -58.2104751421655$ para $g_r = 80$. Portanto, o domínio onde $\langle a \rangle$ oscila é: $[0.3180954556, 0.9941285249]$, que tem o comprimento: 0.6760330693.

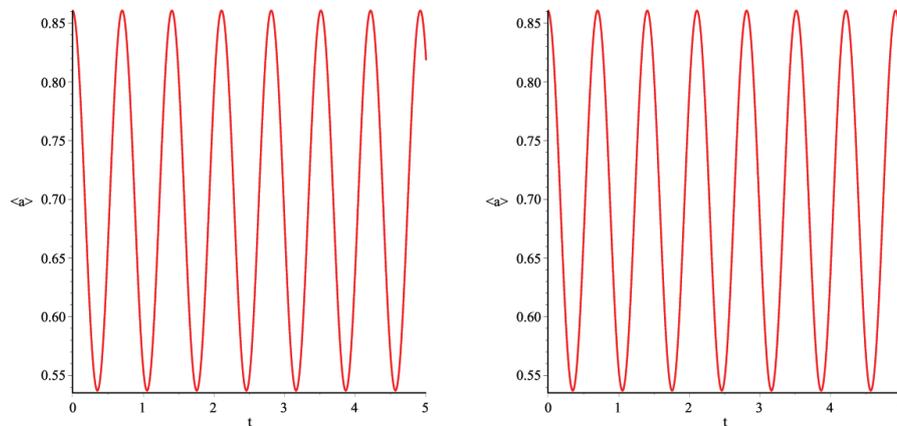


Figura 6.6: As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. À esquerda o $\langle a \rangle$ usamos $g_r = 40$ e à direita $g_r = 80$.

Resultados para g_s

Depois de calcular o $\langle a \rangle$ para vários valores diferentes de g_s , \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando fixo os outros parâmetros de HL, notamos que esta quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca vai a zero. Isso dá uma indicação inicial de que esses

modelos são livres de singularidades, no nível quântico. Agora, se fixarmos \mathcal{N} , junto com os outros parâmetros de HL, e variar g_s , observaremos as seguintes propriedades de $\langle a \rangle$: (i) sua amplitude de oscilação e o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, não variam com g_s ; (ii) o valor máximo do $\langle a \rangle$ aumenta com a diminuição de g_s . Esses comportamentos podem ser entendidos observando o potencial, que limita o fator de escala. Quando se diminui g_s , o tamanho do intervalo onde o $\langle a \rangle$, é forçado a oscilar, não é modificado. Nessas condições, para as quantidades \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL fixados, o número de oscilações do $\langle a \rangle$ e sua amplitude não são modificadas, quando se altera g_s . Por outro lado, quando se diminui g_s , todo o intervalo em que o $\langle a \rangle$, é forçado a oscilar, é deslocado para a direita, onde o fator de escala assume valores maiores. Nessas condições, para as quantidades de \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL fixados, o valor máximo do $\langle a \rangle$ aumenta, quando se diminui g_s . Todas essas propriedades podem ser vistas nas Figuras 6.7 e 6.8. Cada figura mostra exemplos do comportamento de $V(a)$ e do $\langle a \rangle$, para dois valores diferentes de g_s , enquanto o intervalo de τ , \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL permanecem fixos.

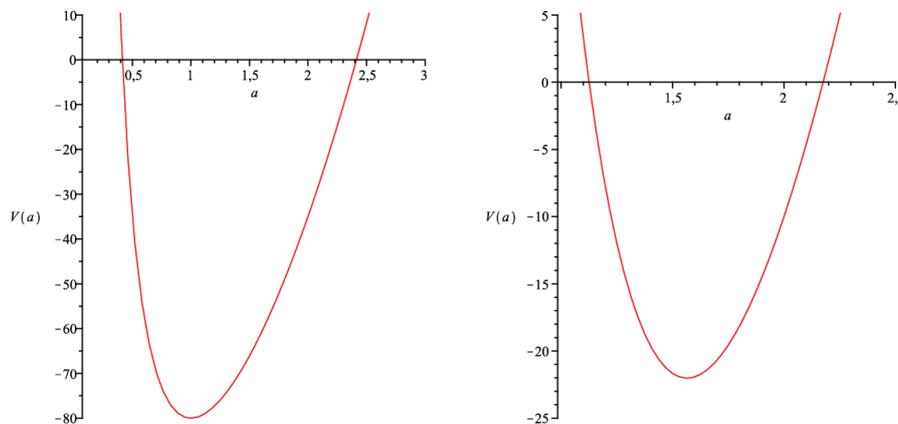


Figura 6.7: As figuras mostram o potencial $V(a)$ para $g_\Lambda = 0$, $g_r = 120$, $g_c = 20$. Na esquerda, usamos para $V(a)$, $g_s = -20$ e na direita $g_s = -120$.

Na Figura 6.6, $\bar{E} = -70.9932768412420$ para $g_s = -20$. Portanto, o domínio onde $\langle a \rangle$ oscila é: $[0.7192555414, 1.390326445]$, que tem o comprimento: 0.6710709036 . Por outro lado, $\bar{E} = -13.0506261790150$ para $g_s = -120$. Portanto, o domínio onde $\langle a \rangle$ oscila é: $[1.265657001, 1.935350368]$, que tem o tamanho: 0.669693367 .

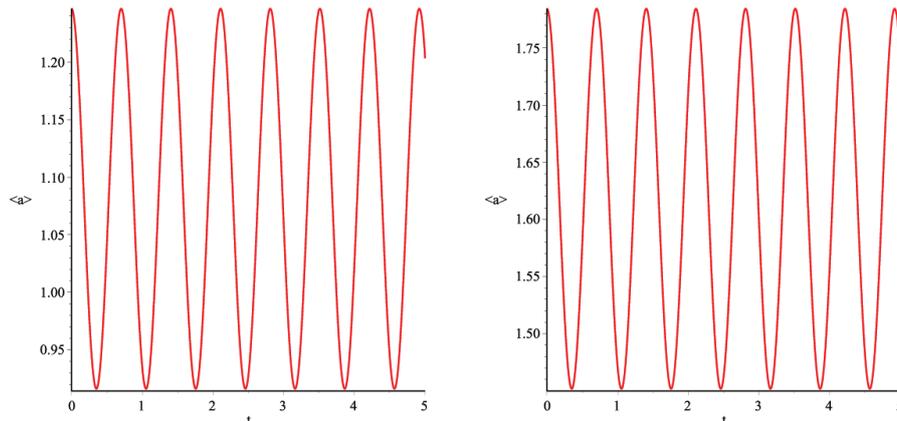


Figura 6.8: As figuras mostram o $\langle a \rangle$ para $\mathcal{N} = 2$, $g_\Lambda = 0$, $g_r = 120$, $g_c = 20$. Na esquerda para o $\langle a \rangle$ usamos $g_s = -20$ e na direita $g_s = -120$.

Resultados para \mathcal{N}

Se fixarmos todos os parâmetros de HL e variarmos \mathcal{N} , observamos as seguintes propriedades para $\langle a \rangle$: (i) o valor máximo do $\langle a \rangle$ cresce com o aumento de \mathcal{N} ; (ii) a amplitude de oscilação para o $\langle a \rangle$ aumenta com o aumento de \mathcal{N} ; (iii) o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo τ fixo, permanece constante com o aumento de \mathcal{N} . A fim de entender esses comportamentos, notamos que a energia média associada ao pacote de ondas aumenta com o aumento de \mathcal{N} . Portanto, para valores fixos dos parâmetros de HL, quando aumentamos \mathcal{N} , o domínio onde o $\langle a \rangle$ oscila aumenta. Desta forma, o valor máximo e a amplitude do $\langle a \rangle$ aumentam. Por outro lado, o resultado de que o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo τ fixo, permanece constante, pode ser explicado pelo fato de que a energia média aumenta, quando se aumenta \mathcal{N} , e a energia potencial não é modificada. Portanto, nesse caso, a energia cinética aumenta. Isso significa que o $\langle a \rangle$ vai oscilar mais rapidamente em uma região maior. O resultado mais interessante é que a velocidade de oscilação aumenta de tal forma que a frequência de oscilação permanece constante, quando se aumenta \mathcal{N} . Todas essas propriedades podem ser vistas na figura 6.1, que dá um exemplo para o potencial $V(a)$, e as figuras 6.2 e 6.9, fornecem três exemplos do $\langle a \rangle$, para os mesmos valores dos parâmetros de HL, com valores diferentes de \mathcal{N} .

Para $g_c = 10$, com $\mathcal{N} = 5$, temos que $\bar{E} = -95.1047199335060$. Por isso que para

$V(a)$, figura 6.1, o domínio em que o $\langle a \rangle$ oscila é: $[1.551262998, 0.2882899909]$, o qual possui comprimento: 1.262973007. Por outro lado, para $g_c = 10$, com $\mathcal{N} = 10$, temos que $\bar{E} = -79.2852819937343$. Portanto, o domínio em que o $\langle a \rangle$ oscila é: $[2.005428161, 0.2230015536]$, o qual tem comprimento: 1.782426607. Esses resultados devem ser comparados com os resultados dos exemplos dados nas figuras 6.1 e 6.2, onde $g_c = 10$ e $\mathcal{N} = 2$.

Resultados para os desvios padrão

Nós calculamos o $\langle a \rangle - \sigma_a$, onde o $\langle a \rangle$ é dado pela equação (6.18) e σ_a pela equação (6.19), para diferentes domínios dos parâmetros de HL (g_c, g_r, g_s, g_Λ) e valores de \mathcal{N} . Para todos os casos calculados, essa quantidade é sempre positiva. Esse resultado dá uma indicação mais forte de que os modelos atuais estão livres de singularidades, no nível quântico. Quanto ao significado matemático desse resultado, podemos mencionar que se nossa distribuição fosse normal e se o intervalo fosse $\langle a \rangle \pm \sigma_a$, em torno do valor médio, cobriria mais da metade da área sob a distribuição. Mais precisamente, 68,26% [66]. Dois exemplos de $\langle a \rangle$ e $\langle a \rangle - \sigma_a$, como uma função do tempo, são mostrados na Figura 6.9.

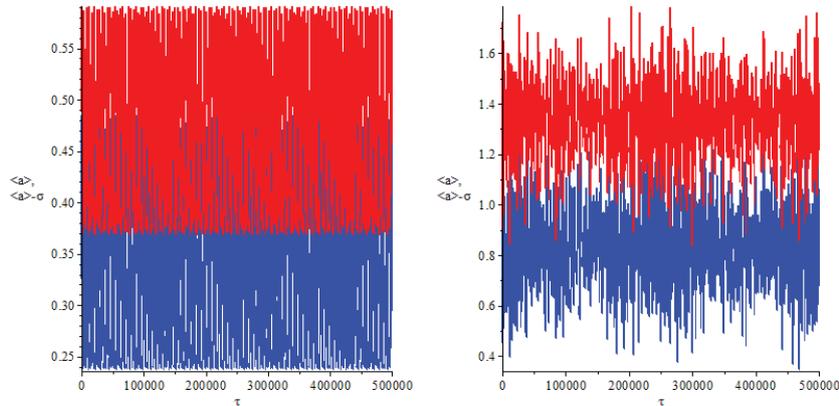


Figura 6.9: $\langle a \rangle$ e $\langle a \rangle - \alpha\sigma_a$ para dois modelos diferentes durante o intervalo de tempo $0 < \tau < 500000$. A figura da esquerda é para o modelo com: $g_c = 90, g_r = 120, g_\Lambda = 0, g_s = -2$ e $\mathcal{N} = 2$. A figura da direita é para o modelo com: $g_s = -20, g_r = 120, g_\Lambda = 0, g_c = 20$ and $\mathcal{N} = 10$.

6.3 Interpretação de de Broglie-Bohm

Nesta seção, queremos aplicar a interpretação de *de Broglie-Bohm* [30, 63] ao atual modelo. Nossa principal motivação é comparar os resultados que obteremos com essa interpretação com os que obtivemos na seção anterior, em que usamos a interpretação de *Muitos Mundos*.

6.3.1 Trajetórias Bohmianas de a

Usando o pacote de ondas determinado na seção anterior pela equação (6.9), obtemos a forma polar da função de onda. Calculamos as trajetórias Bohmianas de a , para diferentes valores de todos os parâmetros de HL. Usamos, aqui, o mesmo procedimento da seção anterior, a fim de investigar como as trajetórias Bohmianas de a dependem dos parâmetros de HL. Fixamos todos os parâmetros, exceto um, e deixamos esse parâmetro variar em uma ampla faixa de valores. Então, repetimos o cálculo, da mesma maneira, para todos os parâmetros de HL. Estudamos também como as trajetórias Bohmianas de a depende do número de funções base de \mathcal{N} , presente em $\eta_n(a)$ (6.9). Consideramos os casos em que $2 \leq \mathcal{N} \leq 10$ e muitos valores diferentes de g_c , g_Λ , g_r , g_s e N , encontramos o mesmo comportamento qualitativo para as trajetórias Bohmianas de $a(\tau)$, em todos esses casos. Eles oscilam entre valores máximos e mínimos e nunca passam pelo valor zero. Isso significa que, do ponto de vista quântico, nesses modelos não há singularidades, o que confirma o resultado obtido na seção anterior usando a interpretação de *Muitos Mundos*. Do nosso estudo, também notamos que as trajetórias Bohmianas de a são, qualitativamente, muito semelhantes aos correspondentes valores esperados de a . Esse resultado ajuda a verificar a equivalência entre as duas interpretações da mecânica quântica. Em seguida, vamos comparar algumas trajetórias Bohmianas de a , com o correspondente valor esperado de a . A fim de melhor comparar essas duas interpretações da mecânica quântica, usamos como condições iniciais para $a(\tau)$ em $\tau = 0$, nas trajetórias Bohmianas de a , os valores esperados de a em $\tau = 0$, para os modelos correspondentes.

Resultados para g_c

Para vários valores diferentes de g_c , de \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando os outros parâmetros de HL fixos, observamos as seguintes propriedades de a , a partir das trajetórias Bohmianas de a : (i) o valor máximo de a diminui com o aumento de g_c ; (ii) a amplitude de oscilação de a diminui com o aumento de g_c ; (iii) o número de oscilações de a , para um intervalo de τ fixo, aumenta com o aumento de g_c . Esses comportamentos estão de acordo com aqueles obtidos, na seção anterior, para o valor esperado de a . Dois exemplos desses acordos, entre o $\langle a \rangle$ e as trajetórias bohmiânicas de a , podem ser vistos nas Figuras 6.2 e 6.10.

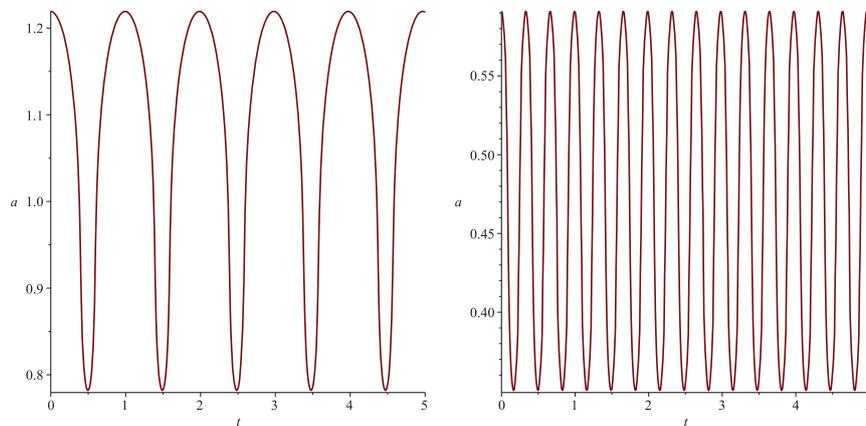


Figura 6.10: As figuras mostram as trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_c = 10$ e na direita $g_c = 90$.

Resultados para g_Λ

Para vários valores diferentes de g_Λ , de \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando fixos os outros parâmetros de HL, observamos as seguintes propriedades de a , a partir das trajetórias Bohmianas de a : (i) o valor máximo de a diminui com a diminuição de g_Λ ; (ii) a amplitude de oscilação para a diminui com a diminuição de g_Λ ; (iii) o número de oscilações de a , para um intervalo fixo de τ , aumenta com a diminuição de g_Λ . Esses comportamentos estão de acordo com aqueles obtidos, na seção anterior, para o valor esperado de a . Dois exemplos desses acordos, entre $\langle a \rangle$ e as trajetórias bohmiânicas de a , podem ser vistos nas Figuras 6.4 e 6.11.

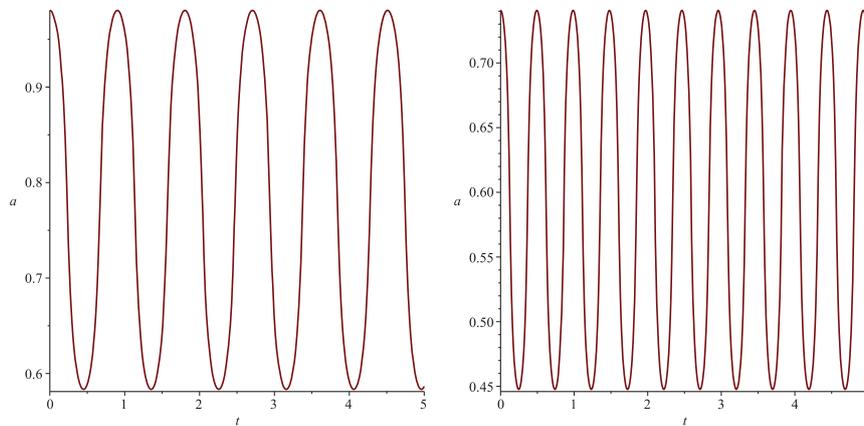


Figura 6.11: As figuras das trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_r = 120$, $g_c = 10$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_\Lambda = -1$ e na direita $g_\Lambda = -25$.

Resultados para g_r

Para vários valores diferentes de g_r , de \mathcal{N} e vários intervalos de τ , deixando os outros parâmetros de HL fixos, observamos as seguintes propriedades de a , das trajetórias Bohmianas de a : seu valor máximo, sua amplitude de oscilação e o número de oscilações de a , para um intervalo de τ fixo, não variam com g_r . Esses comportamentos estão de acordo com aqueles obtidos, na seção anterior, para o valor esperado de a . Dois exemplos desses acordos, entre $\langle a \rangle$ e as trajetórias Bohmianas de a , podem ser vistos nas Figuras 6.6 e 6.12.

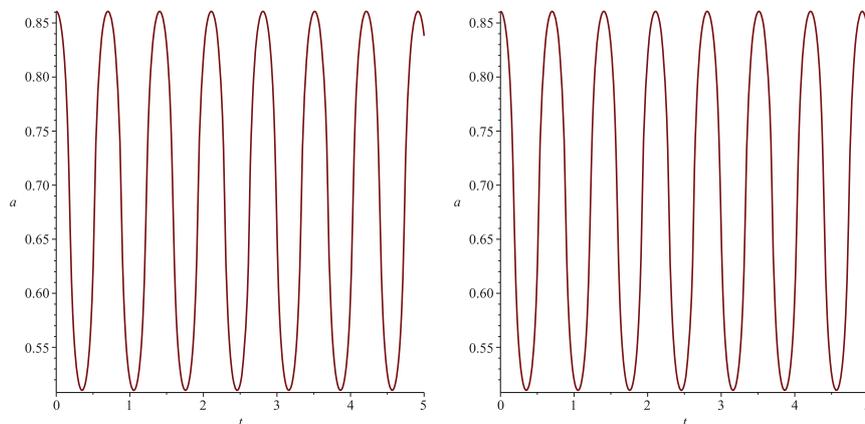


Figura 6.12: As figuras das trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_s = -2$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_r = 40$ e na direita $g_r = 80$.

Resultados para g_s

Para vários valores diferentes de g_s , de \mathcal{N} e vários intervalos de τ , enquanto deixamos os outros parâmetros de HL fixos, observamos as seguintes propriedades de a , das trajetórias Bohmianas de a : (i) sua amplitude de oscilação e o número de oscilações de a , para um intervalo de τ fixo, não variam com g_s ; (ii) o valor máximo de a aumenta com a diminuição de g_s . Esses os comportamentos estão de acordo com aqueles obtidos, na seção anterior, para o valor esperado de a . Dois exemplos desses acordos, entre $\langle a \rangle$ e as trajetórias Bohmianas de a , podem ser vistos nas Figuras 6.8 e 6.13.

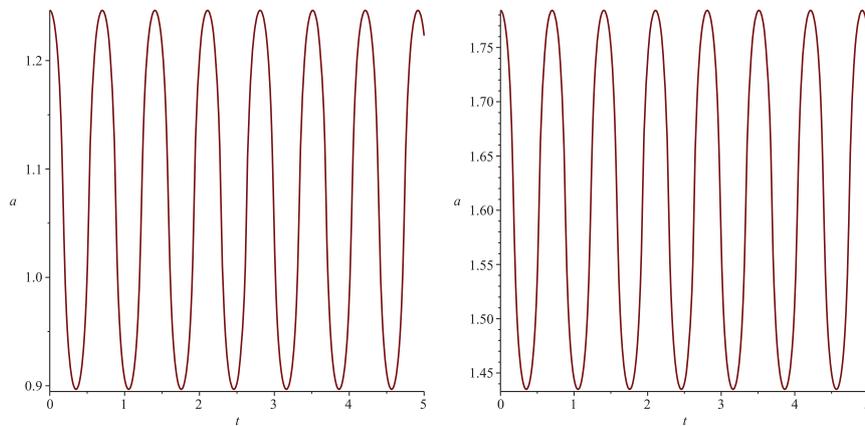


Figura 6.13: As figuras das trajetórias Bohmianas de a para $\mathcal{N} = 2$, $g_r = 120$, $g_\Lambda = 0$, $g_c = 20$. Na esquerda para a trajetória Bohmiana de a usamos $g_s = -20$ e na direita $g_s = -120$.

6.3.2 Potencial quântico de Bohm Q

A ausência de singularidades nos modelos atuais é fácil de entender quando se observa o potencial quântico, equação (4.21), para esses modelos. Calculamos $Q(a, \tau)$, para vários valores dos parâmetros de HL e de \mathcal{N} . Os cálculos foram feitos sobre as trajetórias Bohmianas de a . Obtivemos Q em função de τ , bem como em função de a . Encontramos o mesmo comportamento qualitativo de Q , em todos esses casos. Inicialmente, considerando Q em função de τ , em $\tau = 0$, existe uma barreira de potencial (B_0) que impede que o valor de a cresça mais do que seu valor máximo permitido. Então, a barreira se torna um poço por um breve momento e novamente uma nova barreira aparece (B_1). B_1 impede que o valor de a nunca vá a zero. Depois de um tempo, B_1 se transforma em um poço por um breve momento e então outra barreira idêntica a B_0 aparece. Depois disso, Q , periodicamente, se repete. B_0 é diferente de B_1 . B_0 existe por um período maior e é menor que B_1 . Pode-se interpretar a forma desse potencial da seguinte maneira. Inicialmente, em $\tau = 0$, a está no seu valor máximo. Começa a diminuir, primeiro lentamente, e então sua velocidade começa a aumentar até que a atinja seu valor mínimo diferente de zero. Depois disso, a cresce a partir de seu valor mínimo diferente de zero, primeiro rapidamente, e então sua velocidade começa a diminuir até chegar a zero, no valor máximo de a . Lá, sua velocidade muda de sinal e a começa a diminuir mais uma vez, como descrito acima. Essa dinâmica é representada em Q , inicialmente, por B_0 , depois o primeiro poço, então B_1 e finalmente o outro poço logo após B_1 . Depois disso, o movimento de a se repete periodicamente. Esses modelos não têm singularidades porque B_1 e suas repetições periódicas evitam que a nunca vá a zero. Para exemplificar esse comportamento, mostramos, na figura 6.14, o potencial quântico, equação (4.21), para o modelo com $g_\Lambda = -1$, $g_c = 10$, $g_r = 120$, $g_s = -2$ e $\mathcal{N} = 2$. No lado esquerdo dessa figura, mostramos Q como uma função do tempo τ . Para uma melhor visualização do comportamento de Q , escolhemos um pequeno intervalo de tempo na figura 6.14. No lado direito da figura 6.14, mostramos Q em função de a . Nesse caso, podemos ver claramente B_0 e B_1 . Para uma compreensão mais clara do comportamento de Q , é importante observar a trajetória Bohmiana de a , para o modelo atual, plotada no lado esquerdo da figura 6.11. A trajetória bohmiana mostrada na figura 6.11 é plotada durante o mesmo intervalo de tempo de Q , figura 6.14,

e sua condição inicial $a(\tau)$ em $\tau = 0$, foi obtido a partir do cálculo do valor esperado de a , para o mesmo modelo.

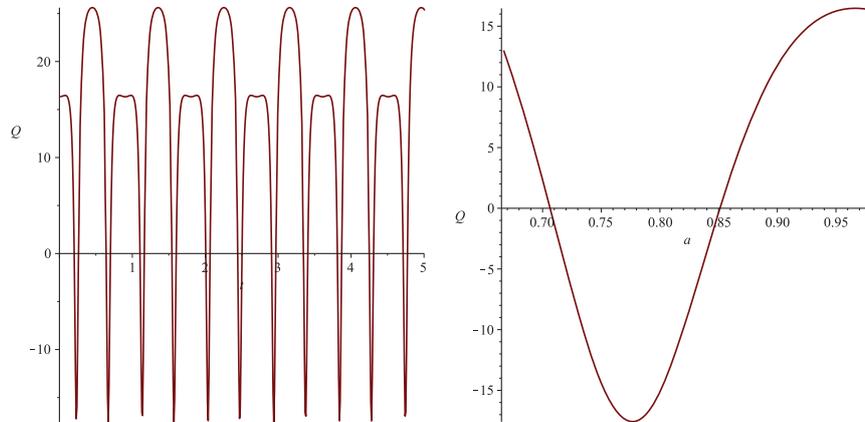


Figura 6.14: Na figura da esquerda, mostramos o potencial quântico Q como uma função do tempo τ . No lado direito da figura, mostramos o potencial quântico Q como uma função do fator de escala a . Para ambas as figuras, o modelo tem os seguintes valores para os parâmetros: $g_\Lambda = -1$, $\mathcal{N} = 2$, $g_c = 10$, $g_r = 120$ and $g_s = -2$. O Q mostrado acima, corresponde à trajetória Bohmiana de a apresentado no lado esquerdo da figura 6.11.

6.4 Considerações finais

Para o presente modelo, quantizamos canonicamente um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico de Hořava-Lifshitz, com seções espaciais positivas constantes e acoplado à radiação. Consideramos a versão projetável dessa teoria gravitacional sem a condição de *equilíbrio detalhado*. Usamos o formalismo ADM para escrever o hamiltoniano gravitacional do modelo e o formalismo variacional de Schutz para escrever o hamiltoniano do fluido perfeito. Encontramos a equação de Wheeler-DeWitt para o modelo. Essa equação depende de vários parâmetros. Estudamos o caso onde os valores dos parâmetros são escolhidos, de forma que as soluções para a equação de Wheeler-DeWitt são limitadas. Inicialmente, resolvemos usando a interpretação de *Muitos Mundos*. Usando pacotes de onda calculados com as soluções para a equação de Wheeler-DeWitt, obtemos o valor esperado do fator de escala $\langle a \rangle$. Mostramos que essa quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca vai a zero. Esse resultado dá uma indicação de que o modelo é livre de singularidades, no nível quântico. Melhoramos esse resultado mostrando que, se subtraímos um desvio padrão de um de $\langle a \rangle$, essa quantidade ainda é positiva. Em seguida, usamos a interpretação de *de Broglie-Bohm*. Calculamos as trajetórias de Bohm para o fator de escala e mostramos que ele nunca vai à zero. Mostramos que cada trajetória está de acordo com o correspondente $\langle a \rangle$. Também calculamos o potencial quântico. Essa quantidade ajuda a entender por que o fator de escala nunca vai a zero.

Entropia de von Neumann para um modelo cosmológico quântico com fluido perfeito

Esse capítulo tem como objetivo calcular a entropia emaranhada de von Neumann para um universo num contexto cosmológico, descrito por um pacote de ondas ψ , que descreve o estado primordial. Nesse sentido, estudamos a entropia do universo dada através da entropia emaranhada para um modelo cosmológico quântico, homogêneo e isotrópico, com fluido perfeito, estudado na literatura, por meio da interpretação de *de Broglie-Bohm* [82]. Nesse modelo cosmológico foi acoplado um fluido perfeito, cuja equação de estado é dada por $p = \omega\rho$, onde p é a pressão, ρ é a densidade e ω é uma constante que caracteriza o tipo de matéria que permeia o espaço. Neste trabalho estudamos o caso da radiação ($\omega = +1/3$) e o caso da poeira ($\omega = 0$) para constante de curvatura $k = 0$.

Nas seções 7.1 foi feita uma motivação para um melhor entendimento sobre a importância em se estudar a entropia emaranhada do Universo, por meio da proposta de von Neumann. Na seção 7.2 foi apresentado o modelo. A seção 7.3 traz os conceitos básicos da entropia emaranhada de von Neumann. Nas seções 7.4 e 7.5, foram calculadas a entropia emaranhada de von Neumann para o modelo descrito pela RG [82], para o caso em que se considerou como fluido perfeito a radiação e posteriormente a poeira. Foi determinada a

entropia emaranhada de von Neumann em função do fator de escala e em função do tempo, para os fluidos perfeitos de radiação e poeira, respectivamente. Por fim, apresentamos nossas conclusões.

7.1 Motivação

A questão de como ocorreu a evolução das estruturas do Universo primordial a partir de um determinado estado inicial, podem ser conciliadas com as leis da Termodinâmica [26, 53, 54]. Em especial, pode-se destacar a segunda lei da Termodinâmica e o aumento da entropia do Universo, o qual está associado com todos os processos irreversíveis englobando todas as escalas. Isso se deve ao fato, de que a medida que o Universo evolui ao longo do tempo, ocorrem mudanças, das quais se percebe que este sempre vai da *ordem* para a *desordem*, caracterizando um processo irreversível, portanto, ocorrendo um aumento na entropia [67].

Em 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen, propuseram um experimento de pensamento que visava demonstrar que a mecânica quântica descreve uma realidade física incompleta [80]. Esse artigo deu origem ao famoso paradoxo EPR. Neste experimento os autores tentam mostrar que a função de onda não contém as informações completas sobre a realidade física do sistema, além de apresentar uma discussão da violação local causal das leis da Física. No paradoxo EPR há o princípio da localidade que estabelece que processos físicos que ocorrem em um determinado lugar não devem ter um efeito imediato em elementos da realidade em outro local, ou seja, a informação nunca pode ser transmitida mais rapidamente que a velocidade da luz sem violar o princípio da causalidade. Nesse sentido, a mecânica quântica para Einstein, não era uma teoria quântica errada, mas incompleta. Dessa maneira, ele considerava que para se ter uma teoria completa e capaz de fazer as mesmas previsões que a mecânica quântica, esta deveria possuir variáveis adicionais, que foram chamadas de variáveis ocultas. Outro ponto que pode ser destacado com o paradoxo EPR é o fenômeno do emaranhamento, expressão elaborada por Erwin Schrödinger. O resultado de uma medição realizada em uma parte do sistema quântico pode ter um efeito instantâneo no resultado de uma medição realizada em outra

parte, independentemente da distância que separa as duas partes, quando as medições forem realizadas em sistemas que estão emaranhados [81]. Portanto, sempre haverá uma correlação entre os resultados e o resultado global, sendo bem definidos para o conjunto. Em 1964, John S. Bell por meio dos princípios do realismo e da localidade, formulou um teorema, o qual é demonstrado através de desigualdades, conhecidas por desigualdades de Bell [85, 86]. Nesse teorema, as desigualdades de Bell são satisfeitas por teorias que respeitam os princípios do realismo e da localidade. Na década de 1970, foram realizados diversos experimentos [87, 88], em especial, quando os testes foram feitos com sistemas quânticos, verificou-se a violação das desigualdades de Bell, levando muitos cientistas a aceitarem a existência do emaranhamento quântico.

Essa discussão sobre os fundamentos da mecânica quântica gerou uma grande curiosidade entre os físicos, inspirando várias propostas de interpretação, entre elas, destacamos a interpretação de *de Broglie-Bohm* discutida no capítulo 4. [28, 63]. Nessa interpretação, a partícula é guiada por uma fase que depende apenas das coordenadas sobre ela, portanto descrevendo trajetórias no espaço de fases para cada variável dinâmica, conhecidas como trajetórias de Bohm. A evolução desse sistema é devido a presença do potencial quântico que surge de forma natural da equação de Wheeler-DeWitt. O potencial quântico ajuda explicar como o fator de escala de muitos modelos cosmológicos quânticos nunca vão à zero [23, 82]. Essa é uma das interpretações alternativas para a função de onda do Universo utilizadas na cosmologia quântica, pois a interpretação de Copenhague assume que o processo fundamental de medida de tudo que está incluso no Universo ocorre fora do mundo quântico, ou seja, fora do Universo [27]. Essa interpretação possui um aspecto interessante, pois ao se tratar do estudo do Universo e este por definição, abrange tudo, os conceitos probabilísticos não podem ser aplicados, os experimentos não podem ser repetidos para esse sistema. A interpretação de *de Broglie-Bohm* faz uso da noção de trajetória $a(t)$ sendo aplicada a vários modelos de cosmologia quântica com grande sucesso [23, 68, 69]. Em muitos desses trabalhos, o fator de escala é calculado e é mostrado que nunca vai à zero. Esse resultado é um forte indício que esses modelos estão livres de singularidades no nível quântico.

Por outro lado, temos a Mecânica Estatística emergindo como uma teoria que trata

de sistemas clássicos que possuem uma quantidade muito grande de partículas, de tal maneira que é impossível resolver todas as equações de movimento e mesmo que isso fosse possível, a interpretação dos resultados seria uma tarefa complicada. Assim, para se estudar a termodinâmica desses sistemas, torna-se conveniente associar uma distribuição de probabilidades para as configurações microscópicas e as grandezas físicas mensuráveis serão entendidas como valores médios sobre essa distribuição. Em 1927, von Neumann introduziu uma extensão do conceito de entropia para a mecânica quântica com o intuito de caracterizar a incerteza sobre o estado de um sistema quântico. A grandeza física entropia passou a ser entendida como a medida da incerteza em relação ao estado de um sistema físico, sendo que esses estados podem apresentar diferentes probabilidades [89]. Nesse sentido, a entropia emaranhada de von Neumann pode trazer informações interessantes do Universo primordial, ao ser interpretada como um canal de comunicação [70]. A entropia de von Neumann já tem sido aplicada a alguns anos com sucesso na cosmologia [71, 73–75].

Vamos considerar que temos um sistema dado por uma região espacial esférica, em que a parte observável para um dado tempo t estará necessariamente limitada por um raio a_D . Esse sistema será subdividido em dois subsistemas A e B , como pode ser visto na figura 7.1. O subsistema A está contido na região interna ao raio a_D , enquanto que o subsistema B é toda a região restante. Podemos escrever o espaço de Hilbert total \mathcal{H} , como o produto direto dos espaços de Hilbert dos dois subsistemas A (\mathcal{H}_A) e B (\mathcal{H}_B): $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ [75]. O observador que tem acesso somente ao subsistema A sentirá como se o sistema total fosse descrito pela matriz densidade reduzida $\rho_A = \text{tr}_B \rho_{\text{tot}}$, onde o traço de ρ_{tot} é tomado apenas sobre os elementos do espaço de Hilbert \mathcal{H}_B . Assim a entropia do subsistema A pode ser definida como a entropia de von Neumann da matriz densidade reduzida ρ_A , como sendo $\mathcal{S} = -\text{tr} \rho_A \ln \rho_A$.

7.2 Modelo cosmológico

No presente trabalho estudamos um modelo cosmológico quântico, homogêneo e isotrópico, do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). A matéria desse modelo é descrita por um fluido perfeito, cuja equação de estado é dada por $p = \omega\rho$, onde p é a

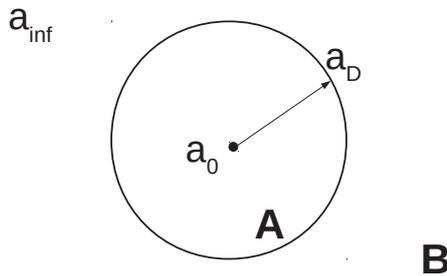


Figura 7.1: Região espacial esférica dividida em dois subsistemas A e B.

pressão, ρ é a densidade de energia e ω é uma constante que caracteriza o tipo de matéria que permeia o espaço. O modelo foi descrito em sua forma Hamiltoniana, utilizando-se o formalismo ADM [76], e a matéria foi introduzida através do formalismo variacional de Schutz [77, 78]. O super-Hamiltoniano que descreve esse modelo, pode ser obtido a partir da equação (3.203). Para isso, os parâmetros $g_\Lambda = g_r = g_s = 0$ e g_c assumindo um valor apropriado, obteremos que o super-Hamiltoniano será dado por:

$$\mathcal{H} = -\frac{P_a^2}{24a} - 6ka + \frac{P_T}{a^{3\omega}}, \quad (7.1)$$

onde a é o fator de escala, T é uma variável associada ao fluido e P_a e P_T são os momentos canonicamente conjugados das variáveis a e T , respectivamente. Foi usado o gauge $N = a^{3\omega}$. O parâmetro k define a curvatura da seção espacial, tomando os valores 0, 1, -1 para a curvatura do Universo plano, esférico ou hiperbólico, respectivamente.

Impondo as condições de quantização padrão para o momento canônico, podemos reescrever a equação (7.1) na sua forma operatorial e exigindo que ela aniquile a função de onda $\psi_E(a, t)$, obtemos a seguinte equação de Wheeler-DeWitt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - 144ka^2 + i24a^{1-3\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_E(a, t) = 0. \quad (7.2)$$

A função de onda $\psi_E(a, t)$ depende apenas do fator de escala a e de uma variável canônica associada ao fluido, que no formalismo variacional de Schutz desempenha um papel de tempo. Por simplicidade, nós redefinimos que $T = -t$. A equação (7.2) pode ser solucionada por separação de variáveis. Para $k = 0$, têm-se que a solução geral é dada

por [82]:

$$\psi_E(a, t) = e^{-iEt} \sqrt{a} \left[c_1 J_{\frac{1}{3(1-\omega)}} \left(\frac{\sqrt{96E}}{3(1-\omega)} a^{\frac{3(1-\omega)}{2}} \right) + c_2 Y_{\frac{1}{3(1-\omega)}} \left(\frac{\sqrt{96E}}{3(1-\omega)} a^{\frac{3(1-\omega)}{2}} \right) \right].$$

Como as soluções estacionárias encontradas não possuem uma norma finita, foi construído um pacote de ondas com a superposição das soluções com o intuito de obter funções de onda que descrevam estados físicos. Assim, o pacote de ondas possui a forma [82]:

$$\psi(a, t) = a \frac{e^{-\frac{3(1-\omega)}{4B}}}{(-2B)^{\frac{4-3\omega}{3(1-\omega)}}}, \quad (7.3)$$

onde $B = \gamma - i\frac{3}{32}(1-\omega)^2 t$ e γ é uma constante positiva arbitrária. A função de onda dada por (7.3) pode ser escrita na forma polar, $\psi(a, t) = R(a, t)e^{iS(a, t)}$, onde $R(a, t)$ e $S(a, t)$ são funções reais. Reescrevendo a equação (7.3) na sua forma polar, obtemos:

$$R(a, t) = \left[4\gamma^2 + \left(\frac{3}{16} \right)^2 (1-\omega)^4 t^2 \right]^{-\frac{4-3\omega}{6(1-\omega)}} a \exp \left\{ -\frac{\gamma a^{3(1-\omega)}}{4 \left[\gamma^2 + \left(\frac{3}{32} \right)^2 (1-\omega)^4 t^2 \right]} \right\}, \quad (7.4)$$

$$S(a, t) = -\frac{3}{128} \frac{(1-\omega)^2 a^{3(1-\omega)} t}{\left[\gamma^2 + \left(\frac{3}{32} \right)^2 (1-\omega)^4 t^2 \right]} + \frac{(4-3\omega)}{3(1-\omega)} \arctan \left[\frac{3}{32} \frac{(1-\omega)^2 t}{\gamma} \right]. \quad (7.5)$$

Em seguida, utilizaremos a interpretação de *de Broglie-Bohm* [63] para o estudo da função de onda $\psi(a, t)$ do Universo.

A trajetória de Bohm $a(t)$, a qual descreve o comportamento do fator de escala, pode ser obtida por $P_a = \partial S(a, t)/\partial a$, equação (4.12), onde P_a é o momento linear da partícula a . Essa equação mostra que a partícula é guiada por uma fase $S(a, t)$ que apenas depende das coordenadas sobre ela. No modelo estudado temos que, $P_a = -12\dot{a}a/N$, onde o ponto é uma derivada com respeito ao tempo e $N = a^{3\omega}$. Utilizando a equação (4.12) e fazendo os cálculos encontramos que:

$$\dot{a} = - \left(\frac{a^{3\omega-1}}{12} \right) \left(\frac{\partial S(a, t)}{\partial a} \right), \quad (7.6)$$

ao substituir a equação (7.5) na expressão (7.6) e integrar em relação ao tempo, teremos para este modelo que a trajetória de Bohm será dada por:

$$a(t) = c_0 \left[\gamma^2 + \left(\frac{3}{32} \right)^2 (1-\omega)^4 t^2 \right]^{\frac{1}{3(1-\omega)}}, \quad (7.7)$$

onde c_0 é uma constante de integração.

7.3 Entropia de von Neumann

Agora, vamos calcular a entropia de von Neumann para esse modelo cosmológico quântico, para isso será utilizado a definição de entropia de von Neumann [90] para o subsistema A como sendo,

$$\mathcal{S}(a_D) = -\text{tr} \rho_A(a) \ln \rho_A(a) = - \int_{a_0}^{a_D} \rho_A(a) \ln \rho_A(a) da, \quad (7.8)$$

onde $\rho_A(a)$ é a matriz densidade reduzida. O subsistema A está localizado entre um valor inicial do fator de escala a_0 até o raio da região espacial esférica a_D . Dessa forma, devemos integrar a matriz densidade reduzida $\rho_A(a)$ multiplicada pelo seu logaritmo em relação a um elemento infinitesimal do fator de escala que está no intervalo de a_0 até um a_D .

A matriz densidade reduzida $\rho_A(a)$ será dada por:

$$\rho_A(a) = \text{tr}_B \hat{\rho}_{\text{tot}}(a) = \int_{a_D}^{a_{\text{inf}}} \hat{\rho}_{\text{tot}}(a) da, \quad (7.9)$$

onde o traço sobre o subsistema B corresponderá a integração da quantidade $\hat{\rho}_{\text{tot}}(a)$ em relação a um elemento infinitesimal do fator de escala que está no intervalo entre o raio da região espacial esférica a_D até um a_{inf} , sendo que este a_{inf} assume um valor grande para o fator de escala. A quantidade $\hat{\rho}_{\text{tot}}(a)$ é dada por:

$$\hat{\rho}_{\text{tot}}(a) = |\psi(a)\rangle\langle\psi(a)|,$$

que para o caso em que a função de onda está escrita em sua forma polar, teremos apenas:

$$\rho_{\text{tot}}^2(a) = R(a) \cdot R(a). \quad (7.10)$$

A quantidade $R(a)$ é uma função apenas de a . Ela é obtida a partir de $R(a, t)$, equação (7.4), ao se substituir t como função de a com a ajuda da trajetória de Bohm, equação (7.7). Fazendo isso, obtemos:

$$R(a) = \left[4 \left(\frac{a}{c_0} \right)^{3(1-\omega)} \right]^{-\frac{4-3\omega}{6(1-\omega)}} a e^{-\frac{\gamma c_0^{3(1-\omega)}}{4}}. \quad (7.11)$$

Com a obtenção da equação (7.11), escrita em termos apenas do fator de escala, será possível determinar a matriz densidade reduzida e assim calcular a entropia emaranhada de von Neumann para os casos da radiação ($\omega = +1/3$) e da poeira ($\omega = 0$), os quais serão apresentados a seguir.

7.4 Radiação ($\omega = 1/3$)

No presente modelo estudado, vamos considerar o caso da radiação ($\omega = 1/3$). Assim podemos reescrever a equação (7.11) como sendo:

$$R(a) = \left[4 \left(\frac{a}{c_0} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{4}} a e^{-\frac{\gamma c_0^2}{4}}. \quad (7.12)$$

A partir da equação (7.12) podemos determinar a equação dada por (7.10), obtendo:

$$\rho_{\text{tot}}^2(a) = \frac{c_0^3}{8} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}\gamma c_0^2} \right)^2}{a}. \quad (7.13)$$

Calculando a matriz reduzida dada pela equação (7.9), teremos:

$$\rho_A(a) = \int_{a_D}^{a_{inf}} \rho_{\text{tot}}^2(a) da = \frac{c_0^3}{8} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma c_0^2\right)^2 \ln(a_{inf}) - \frac{c_0^3}{8} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma c_0^2\right)^2 \ln(a_D), \quad (7.14)$$

onde a_{inf} é o valor máximo assumido pelo fator de escala.

Assim a entropia de von Neumann dada pela equação (7.8), é:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(a_D) = & - \int_{a_0}^{a_D} \left(\frac{c_0^3}{8} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma c_0^2\right)^2 \ln(a_{inf}) - \frac{c_0^3}{8} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma c_0^2\right)^2 \ln(a_D) \right) \times \\ & \left(\ln \left(\frac{c_0^3}{8} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma c_0^2\right)^2 \ln(a_{inf}) - \frac{c_0^3}{8} \exp\left(-\frac{1}{4}\gamma c_0^2\right)^2 \ln(a_D) \right) \right) da, \end{aligned} \quad (7.15)$$

que nos fornece:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(a_D) = & -\frac{1}{8} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma c_0^2\right) c_0^3 (a_0 - a_D) \times \\ & \left\{ \ln \left[\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma c_0^2\right) c_0^3 (\ln(a_{inf}) - \ln(a_D)) \right] - 3 \ln(2) \right\} \times \\ & [-\ln(a_{inf}) + \ln(a_D)], \end{aligned} \quad (7.16)$$

esta é a expressão da entropia em função do fator de escala a_D .

No presente modelo temos os seguintes parâmetros que podem ser variados a_0 , c_0 e γ . Na verdade, os parâmetros a_0 , c_0 e γ são relacionados pela trajetória de Bohm, equação (7.7), no instante $t = 0$. Dessa forma, consideraremos como parâmetros livres somente c_0 e γ . Fizemos um estudo extenso variando esses parâmetros e chegamos nas seguintes conclusões. Fixando c_0 e aumentando γ , temos que a entropia diminui. Um exemplo desse

comportamento pode ser visto nos gráficos dados pela figura 7.2. Para o caso em que o parâmetro γ é mantido fixo e aumentando c_0 , temos que a entropia aumenta, com o aumento de c_0 . Um exemplo desse comportamento pode ser visto nos gráficos dados pela figura 7.3.

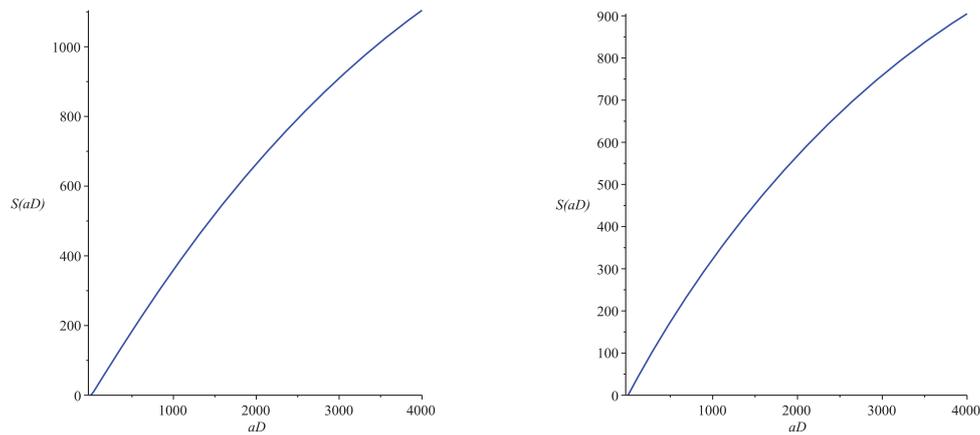


Figura 7.2: Diminuição da entropia $S(a_D)$ mantendo c_0 fixo e aumentando γ . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1/4$, $a_0 = 1/4$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1$, $a_0 = 1$ e $a_{inf} = 14345$.

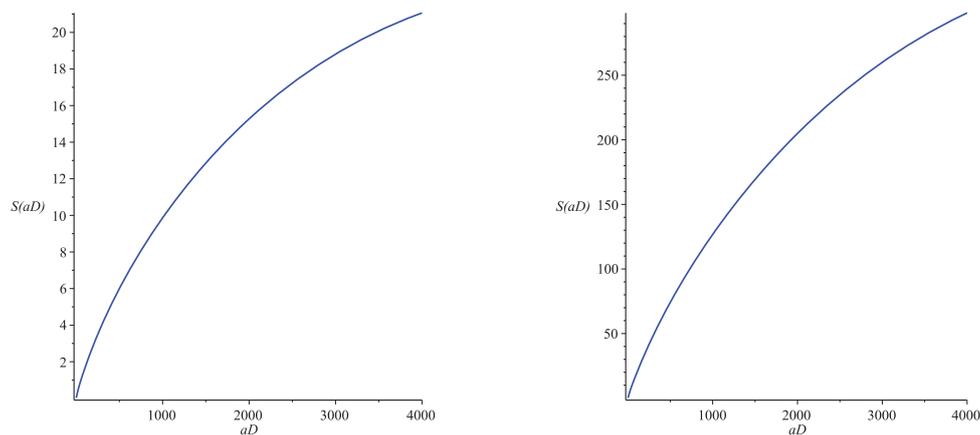


Figura 7.3: Aumento da entropia $S(a_D)$ mantendo γ fixo e aumentando c_0 . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/6$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = 1/12$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/2$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = 1/4$ e $a_{inf} = 14345$.

Para obtermos a entropia em função do tempo, vamos considerar que a expressão que descreve a evolução do fator de escala de uma região espacial esférica para o caso da radiação ($\omega = 1/3$), de acordo com a equação (7.7), pode ser escrita como:

$$a_D(t) = c_0 \left[\gamma^2 + \left(\frac{1}{576} \right) t^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (7.17)$$

Substituindo a equação (7.17) na equação (7.16), podemos obter a entropia em função do tempo, a qual é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) = & -\frac{1}{192} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma c_0^2\right) c_0^3 \left(c_0 \sqrt{576 \gamma^2 + t^2} - 24 a_0 \right) \times \\ & \left\{ \ln \left[\exp\left(-\frac{1}{2} \gamma c_0^2\right) c_0^3 \left(\ln(a_{inf}) + 3 \ln(2) + \ln(3) - \ln\left(c_0 \sqrt{576 \gamma^2 + t^2} \right) \right) \right] - \right. \\ & \left. 3 \ln(2) \right\} \left[\ln\left(c_0 \sqrt{576 \gamma^2 + t^2} \right) - \ln(a_{inf}) - 3 \ln(2) - \ln(3) \right], \quad (7.18) \end{aligned}$$

Fizemos o mesmo estudo para a variação das constantes e vimos que a entropia dada pela equação (7.18) possui as mesmas propriedades dos casos estudados anteriormente. É importante ressaltar que para todos esses casos estudados o resultado dado por (7.18) é sempre uma função crescente do tempo.

7.5 Poeira ($\omega = 0$)

Para o caso da poeira ($\omega = 0$), teremos a equação (7.11) sendo dada por:

$$R(a) = \left[4 \left(\frac{a}{c_0} \right)^3 \right]^{-\frac{2}{3}} a e^{-\frac{\gamma c_0^3}{4}}. \quad (7.19)$$

Substituindo a equação (7.19) na equação (7.10), temos:

$$\rho_{tot}^2(a) = \frac{c_0^4}{4^{4/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4} \gamma c_0^3} \right)^2}{a^2}. \quad (7.20)$$

Para determinar a matriz densidade reduzida dada em (7.9) utilizaremos a equação (7.20), obtendo:

$$\rho_A(a) = \int_{a_D}^{a_{inf}} \rho_{tot}^2(a) da = -\frac{c_0^4}{2^{8/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4} \gamma c_0^3} \right)^2}{a_{inf}} + \frac{c_0^4}{2^{8/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4} \gamma c_0^3} \right)^2}{a_D}, \quad (7.21)$$

onde a_{inf} é o valor máximo assumido pelo fator de escala.

Assim a entropia de von Neumann dada em (7.8), pode ser escrita como:

$$\mathcal{S}(a_D) = - \int_{a_0}^{a_D} \left(-\frac{c_0^4}{2^{8/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}\gamma c_0^3}\right)^2}{a_{inf}} + \frac{c_0^4}{2^{8/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}\gamma c_0^3}\right)^2}{a_D} \right) \times \left(\ln \left(-\frac{c_0^4}{2^{8/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}\gamma c_0^3}\right)^2}{a_{inf}} + \frac{c_0^4}{2^{8/3}} \frac{\left(e^{-\frac{1}{4}\gamma c_0^3}\right)^2}{a_D} \right) \right) da, \quad (7.22)$$

que nos fornece:

$$\mathcal{S}(a_D) = \frac{1}{24} \frac{c_0^4 2^{\frac{1}{3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma c_0^3\right) (a_D - a_{inf})}{a_{inf} a_D} \times \left[8 \ln(2) - 3 \ln \left(-\frac{c_0^4 \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma c_0^3\right) (a_D - a_{inf})}{a_{inf} a_D} \right) \right] (-a_D + a_0), \quad (7.23)$$

esta é a expressão da entropia em função do fator de escala a_D para o caso da poeira.

Para esse caso em que se considerou a poeira como fluido, também foi feita uma análise para os valores dos parâmetros da teoria da mesma forma como para o caso em que se tinha radiação. Obtemos os seguintes resultados. Inicialmente matendo c_0 constante e diminuindo γ , temos que a entropia em função de a_D aumenta, veja a figura 7.4. Se fizermos γ constante e diminuirmos c_0 , a entropia em função de a_D diminui, veja a figura 7.5.

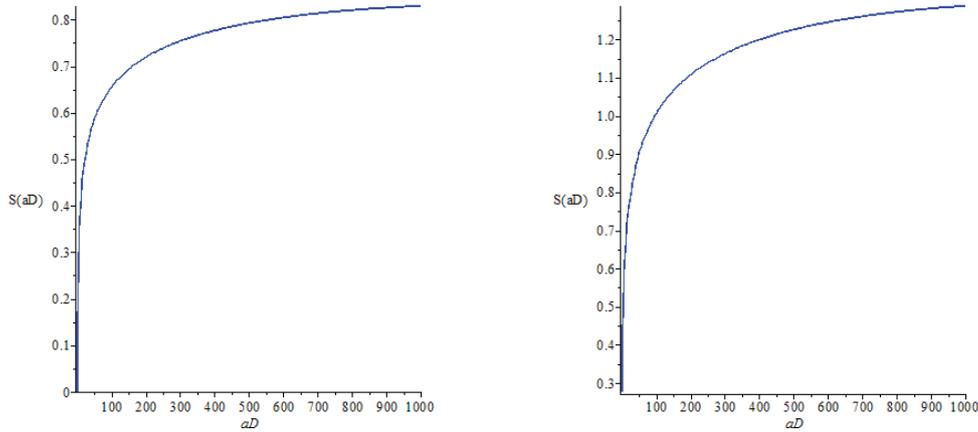


Figura 7.4: Aumento da entropia $S(a_D)$ mantendo c_0 e a_{inf} fixos e variando γ . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1$, $a_0 = 1$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1$, $\gamma = 1/100$, $a_0 = (1/100)^{2/3}$ e $a_{inf} = 14345$.

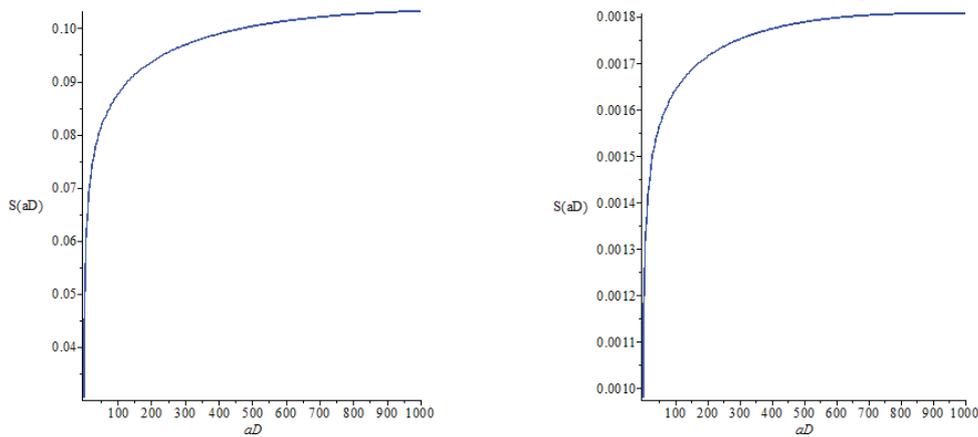


Figura 7.5: Diminuição da entropia $S(a_D)$ mantendo γ e a_{inf} fixos e variando c_0 . No gráfico à esquerda os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/2$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = (1/2)^{(5/3)}$ e $a_{inf} = 14345$. No gráfico à direita os valores dos parâmetros são $c_0 = 1/6$, $\gamma = 1/2$, $a_0 = (1/6)(1/2)^{2/3}$ e $a_{inf} = 14345$.

Assim como feito para o caso da radiação, vamos determinar a entropia emaranhada em função do tempo para o caso da poeira. Podemos reescrever a equação (7.7) como

sendo:

$$a_D(t) = c_0 \left[\gamma^2 + \left(\frac{9}{1024} \right) t^2 \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (7.24)$$

Substituindo a equação (7.24) na equação (7.23), obtemos a entropia emaranhada em função do tempo para o caso da poeira, a qual é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t) = & -\frac{1}{384} c_0^3 2^{\frac{1}{2}} \left[c_0 (4096 \gamma^2 + 36 t^2)^{\frac{1}{3}} - 16 a_{inf} \right] \left[c_0 (4096 \gamma^2 + 36 t^2)^{\frac{1}{3}} - 16 a_0 \right] \times \\ & \exp \left(-\frac{1}{2} \gamma c_0^3 \right) \left\{ 8 \ln(2) - 3 \ln \left[-\frac{c_0^3 \exp \left(-\frac{1}{2} \gamma c_0^3 \right) \left(c_0 (4096 \gamma^2 + 36 t^2)^{\frac{1}{3}} - 16 a_{inf} \right)}{a_{inf} (4096 \gamma^2 + 36 t^2)^{\frac{1}{3}}} \right] \right\} \times \\ & \frac{1}{a_{inf} (4096 \gamma^2 + 36 t^2)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Também fizemos um estudo detalhado para a variação das constantes e vimos que a entropia dada pela equação (7.25) possui as mesmas propriedades dos casos estudados anteriormente para a poeira. Concluimos que para todos esses casos estudados o resultado dado por (7.25) é sempre uma função crescente do tempo. Percebemos também que a entropia emaranhada para o caso da poeira cresce mais rapidamente do que para o caso da radiação.

7.6 Considerações finais

Neste trabalho estudamos a entropia do universo dada pela entropia emaranhada de von Neumann para um modelo cosmológico quântico, homogêneo e isotrópico, com fluido perfeito, estudado na literatura, por meio da interpretação de *de Broglie-Bohm*. Nosso objetivo foi calcular a entropia emaranhada e analisar uma conexão com a segunda lei da Termodinâmica. Nesse modelo cosmológico foi acoplado um fluido perfeito, cuja equação de estado é dada por $p = \omega \rho$, onde p é a pressão, ρ é a densidade de energia e ω é uma constante que caracteriza o tipo de matéria que permeia o espaço. Neste trabalho estudamos o caso da radiação ($\omega = +1/3$) e da poeira ($\omega = 0$) para constante de curvatura $k = 0$. Determinamos a entropia emaranhada de von Neumann para cada tipo de fluido e percebemos que estas crescem com o tempo, sendo válida a segunda lei da Termodinâmica para este modelo. Para o cálculo da entropia emaranhada usamos a expressão da entropia

de von Neumann, sendo que a matriz densidade foi construída através de um pacote de funções de onda devido a superposição das soluções da equação de Wheeler-DeWitt dependente do tempo. A entropia emaranhada obtida para o caso da poeira cresce mais rapidamente do que a entropia emaranhada para o caso da radiação.

CAPÍTULO 8

Conclusões

Ao longo do desenvolvimento dessa tese, foram obtidos três resultados, dois desses relacionados ao modelo de HL, sendo um para o modelo de HL simplificado para o início do Universo e o segundo para um modelo de HL mais geral. Nesses modelos a matéria é descrita por um fluido perfeito de radiação. Mostramos que esses modelos cosmológicos de gravitação de Hořava-Lifshitz são livres de singularidades. Nessa tese determinamos ainda a entropia emaranhada de von Neumann para um modelo de cosmologia quântica baseado na RG. Foram estudados dois casos em que o espaço-tempo é homogêneo e isotrópico e a matéria é descrita por um fluido de radiação, no primeiro caso, e de poeira no segundo caso. Para determinarmos a entropia emaranhada como uma função apenas do fator de escala utilizamos a trajetória de Bohm para essa quantidade. Verificamos que esta é uma função crescente estando em acordo com a segunda lei da Termodinâmica.

Referentes ao capítulo 5

Neste trabalho, consideramos a interpretação de *Muitos Mundos* e a de *de Broglie-Bohm* de um modelo quântico da teoria geométrica de Hořava-Lifshitz na presença de um fluido

perfeito de radiação, para um caso simplificado em que $g_c = g_\Lambda = g_r = 0$. Calculamos o valor esperado do fator de escala e a trajetória de Bohm para o fator de escala. Ajustando os parâmetros, mostramos que as expressões para essas duas quantidades são as mesmas e que nunca vão para zero. Esse resultado dá uma forte indicação de que esse modelo é livre de singularidades no nível quântico. Foram analisados três casos para diferentes valores de k e g_s : (i) $-4kg_s < 0$, (ii) $-4kg_s = 0$ e (iii) $-4kg_s > 0$. É importante notar que para o caso (i) $\langle a \rangle$ ou $a(T)$ será real apenas se a condição $1 - 4kg_s > 0$ é satisfeita. Essa restrição, nos valores do parâmetro g_s , para o caso (i), mostra as limitações da presente simplificação utilizada para obter a solução (5.5). Se o valor de g_s for fixado tal que $-4kg_s$ tenha o mesmo valor absoluto, para os casos (i) e (iii), obtém-se que: $\langle a \rangle$ e $a(T)$ sempre tem o maior a_0 para o caso (iii), o próximo para o caso (ii) e finalmente para o caso (i). Também é possível ver que: $\langle a \rangle$ e $a(T)$ sempre contrai e expande mais rapidamente para o caso (iii), o próximo para o caso (ii) e finalmente para o caso (i). Esses resultados estão de acordo com o modelo clássico correspondente [18].

Também foi calculado o potencial quântico. Essa quantidade ajuda a entender por que o fator de escala nunca desaparece. Para $Q(T)$, equação (5.19), descobrimos que para os três casos considerados acima: (i) $-4kg_s < 0$, (ii) $-4kg_s = 0$ e (iii) $-4kg_s > 0$, $Q(T)$ é positivo e finito em $T = 0$, diminui à medida que o valor absoluto de T aumenta e vai assintoticamente para zero quando $T \rightarrow \pm\infty$, para todos os valores possíveis de g_s (dependendo de cada caso). Note que, para o caso (i) $-4kg_s < 0$, observando o potencial clássico $V(a, T)$, equação (5.18), temos que $V(a, T)$ dá origem a um poço de potencial quando $T \rightarrow 0$. O potencial efetivo, que é dado pela soma de $V(a, T)$, equação (5.18) com $Q(a, T)$, equação (5.19), é positivo e finito em $T = 0$, diminui à medida que o valor absoluto de T aumenta e vai assintoticamente para zero quando $T \rightarrow \pm\infty$, para todos os possíveis valores de g_s . Para o caso (ii) $-4kg_s = 0$, o potencial clássico $V(a, T)$, equação (5.18), é zero. Para esse caso, o modelo se torna semelhante a um modelo correspondente em CQ baseado na RG acoplado a um fluido perfeito para radiação. A interpretação de *de Broglie-Bohm* desse modelo já foi tratada na Ref. [82] e seus resultados estão de acordo com os nossos. Para o caso (iii) $-4kg_s > 0$, observando o potencial clássico $V(a, T)$, equação (5.18), notamos que $V(a, T)$, juntamente com $Q(a, T)$, também produz uma barreira de

potencial que impede que o valor do fator de escala passe por zero, em $T = 0$. Portanto, para os três casos, haverá uma barreira de potencial, em $T = 0$, que impede que o valor do fator de escala passe por zero.

Referentes ao capítulo 6

No presente trabalho, quantizamos canonicamente um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico de Hořava-Lifshitz, com seções espaciais de curvatura positiva e acoplado à radiação. Consideramos a *versão projetável* dessa teoria gravitacional sem a condição de *balanço detalhado*. Usamos o formalismo ADM para escrever o hamiltoniano gravitacional do modelo e o formalismo variacional de Schutz para escrever o hamiltoniano do fluido perfeito. Encontramos a equação de Wheeler-DeWitt para o modelo. Essa equação depende de vários parâmetros provenientes da teoria HL. Nós estudamos o caso onde os valores dos parâmetros de HL são escolhidos, de tal forma que as soluções para a equação de Wheeler-DeWitt são limitadas. Inicialmente, utilizamos a interpretação de *Muitos Mundos* da mecânica quântica. Usando pacotes de ondas calculamos com as soluções da equação de Wheeler-DeWitt, o valor esperado do fator de escalar $\langle a \rangle$. Mostramos que essa quantidade oscila entre valores máximos e mínimos e nunca chega a zero. Esse resultado dá uma indicação de que o modelo é livre de singularidades, no nível quântico. Fizemos esses cálculos para todos os parâmetros do modelo de HL, variando um desses parâmetros e mantendo os demais fixos. Obtivemos os seguintes resultados. Para o parâmetro g_c variando temos que $\langle a \rangle$: (i) o valor máximo do $\langle a \rangle$ diminui com o aumento de g_c ; (ii) a amplitude de oscilação para o $\langle a \rangle$ diminui com o aumento de g_c ; (iii) o número de oscilações do $\langle a \rangle$, em um intervalo de τ fixo, aumenta com o aumento de g_c . Esses comportamentos podem ser entendidos pela observação do potencial, que limita o fator de escala. Quando há aumento de g_c , o $\langle a \rangle$ é forçado a oscilar em uma região cada vez menor. Nestas condições, para os \mathcal{N} e para os outros parâmetros de HL que foram fixados, o valor máximo e a amplitude do $\langle a \rangle$ decresce. Além disso, como o domínio em que o $\langle a \rangle$ oscila está diminuindo, o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, aumenta. Para o parâmetro g_Λ variando temos que $\langle a \rangle$: (i) o valor máximo do $\langle a \rangle$ diminui com a diminuição de g_Λ ; (ii) a amplitude

de oscilação para o $\langle a \rangle$ diminui com a diminuição de g_Λ ; (iii) o número de oscilações de $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, aumenta com a diminuição de g_Λ . Esses comportamentos podem ser entendidos pela observação do potencial, que limita o fator de escala. Quando se diminui g_Λ , o $\langle a \rangle$ é forçado a oscilar em uma região cada vez menor. Nessas condições, para os \mathcal{N} e para os outros parâmetros de HL fixos, o valor máximo e a amplitude do $\langle a \rangle$ diminuem. Além disso, como o domínio em que o $\langle a \rangle$ oscila está diminuindo, o número de oscilações de $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, aumenta. Para o parâmetro g_r variando temos que $\langle a \rangle$: seu valor máximo, sua amplitude de oscilação e o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, não variam com g_r . Quando se muda g_r , o tamanho e o posição do intervalo em que o $\langle a \rangle$, é forçado a oscilar, não é modificado. Nestas condições, fixando \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL, o valor máximo do $\langle a \rangle$, o número de oscilações do $\langle a \rangle$ e sua amplitude não são modificados, quando se altera g_r . Para o parâmetro g_s variando temos que $\langle a \rangle$: (i) sua amplitude de oscilação e o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, não variam com g_s ; (ii) o valor máximo do $\langle a \rangle$ aumenta com a diminuição de g_s . Esses comportamentos podem ser entendidos observando o potencial, que limita o fator de escala. Quando se diminui g_s , o tamanho do intervalo onde o $\langle a \rangle$, é forçado a oscilar, não é modificado. Nessas condições, para as quantidades \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL fixados, o número de oscilações do $\langle a \rangle$ e sua amplitude não são modificadas, quando se altera g_s . Por outro lado, quando se diminui g_s , todo o intervalo em que o $\langle a \rangle$, é forçado a oscilar, é deslocado para a direita, onde o fator de escala assume valores maiores. Nessas condições, para as quantidades de \mathcal{N} e os outros parâmetros de HL fixados, o valor máximo do $\langle a \rangle$ aumenta, quando se diminui g_s . Melhoramos esse resultado mostrando que se subtraímos um desvio padrão de a de $\langle a \rangle$, essa quantidade ainda é positiva. Fizemos esse procedimento para todos os parâmetros do modelo de HL. Também analisamos o caso em que variamos o \mathcal{N} mantendo os demais parâmetros fixos. Observamos as seguintes propriedades para o $\langle a \rangle$: (i) o valor máximo do $\langle a \rangle$ cresce com o aumento de \mathcal{N} ; (ii) a amplitude de oscilação para o $\langle a \rangle$ aumenta com o aumento de \mathcal{N} ; (iii) o número de oscilações do $\langle a \rangle$, para um intervalo de τ fixo, permanece constante com o aumento de \mathcal{N} . Usamos também na análise desse modelo de HL, a interpretação de *de Broglie-Bohm*. Primeiro, calculamos as trajetórias Bohmianas de a , para muitos valores

diferentes dos parâmetros de HL e de \mathcal{N} . Mostramos que a , para todas essas trajetórias, oscila entre valores máximos e mínimos e nunca chega a zero, de acordo com o comportamento do valor esperado de a . Fomos, também, capazes de avaliar como essas trajetórias dependem dos parâmetros de HL e de \mathcal{N} . Comparamos as trajetórias Bohmianas de a com o $\langle a \rangle$ e mostramos que eles concordam, para os modelos correspondentes. Finalmente, calculamos o potencial quântico Q , para muitos valores diferentes dos parâmetros de HL e de \mathcal{N} . Obtivemos Q em função de τ , bem como em função de a . Encontramos o mesmo comportamento qualitativo de Q , em todos esses casos. Inicialmente, considerando Q em função de τ , em $\tau = 0$, existe uma barreira de potencial (B_0) que impede que o valor de a cresça mais do que seu valor máximo permitido. Então, a barreira se torna um poço por um breve momento e novamente uma nova barreira aparece (B_1). B_1 impede que o valor de a vá a zero. Depois de um tempo, B_1 se transforma em um poço por um breve momento e então outra barreira idêntica a B_0 aparece. Depois disso, Q , periodicamente, se repete. B_0 é diferente de B_1 . B_0 existe por um período maior e é menor que B_1 . Pode-se interpretar a forma desse potencial da seguinte maneira. Inicialmente, em $\tau = 0$, a está no seu valor máximo. Começa a diminuir, primeiro lentamente, e então sua velocidade começa a aumentar até que a atinja seu valor mínimo diferente de zero. Depois disso, a cresce a partir de seu valor mínimo diferente de zero, primeiro rapidamente, e então sua velocidade começa a diminuir até chegar a zero, no valor máximo de a . Lá, sua velocidade muda de sinal e a começa a diminuir mais uma vez, como descrito acima. Essa dinâmica é representada em Q , inicialmente, por B_0 , depois o primeiro poço, então B_1 e finalmente o outro poço logo após B_1 . Depois disso, o movimento de a se repete periodicamente. Esses modelos não têm singularidades porque B_1 e suas repetições periódicas evitam que a vá a zero. Mostramos como essa quantidade ajuda a entender por que o fator de escala nunca desaparece, no modelo cosmológico atual de HL.

Referentes ao capítulo 7

Neste trabalho calculamos a entropia emaranhada de von Neumann para um modelo cosmológico quântico, homogêneo e isotrópico, para $k = 0$ e para dois tipos de fluidos per-

feitos, radiação e poeira. Este modelo foi estudado na literatura, por meio da interpretação de DeBroglie-Bohm [82]. Neste trabalho [82], os autores encontraram a função de onda que descreve o Universo, construindo um pacote de funções de onda por meio da superposição das soluções da equação de Wheeler-DeWitt dependente do tempo. Conseguiram expressar essa quantidade em sua forma polar assim como determinaram a trajetória de Bohm, que descreve a evolução do fator de escala ao longo do tempo.

A partir desses resultados, calculamos a entropia emaranhada de von Neumann, por meio da matriz densidade, a qual foi construída através do pacote de funções de onda dado pela superposição das soluções da equação de Wheeler-DeWitt. Determinamos a expressão da entropia emaranhada para os dois tipos de fluidos e observamos que as duas funções são crescentes ao longo do tempo, sendo que a entropia emaranhada para o caso em que se tem poeira, cresce mais rapidamente do que para a radiação. Foram feitos também, estudos detalhados dos parâmetros desses modelos de radiação e poeira com intuito de analisar a influência desses sobre o comportamento da entropia emaranhada de Von Neumann. Vimos que a entropia emaranhada para o caso em que se considerou como fluido perfeito a radiação, depende dos seguintes parâmetros que podem ser variados a_0 , c_0 e γ . Percebemos que, os parâmetros a_0 , c_0 e γ estão relacionados pela trajetória de Bohm, equação (7.7), no instante $t = 0$. Dessa forma, consideraremos como parâmetros livres somente c_0 e γ . Fizemos um estudo extenso variando esses parâmetros e chegamos nas seguintes conclusões. Fixando c_0 e aumentando γ , temos que a entropia diminui. Para o caso em que o parâmetro γ é mantido fixo e variando c_0 , temos que a entropia aumenta, com o aumento de c_0 . Fazendo essa mesma análise para o caso da poeira, obtemos os seguintes resultados. Concluímos que matendo c_0 constante e diminuindo γ , temos que a entropia em função de a_D aumenta. Se fizermos γ constante e diminuirmos c_0 , a entropia em função de a_D diminui. Obtivemos para os dois casos, radiação e poeira, que a segunda lei da Termodinâmica é válida para estes modelos.

9.1 Formalismo ADM

Demonstração que se G_{ijkl} é dado por (3.38):

$$\begin{aligned}
 G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} &= h^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right), \\
 &= -\frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) (\Pi^{ij}\Pi^{kl}), \\
 &= \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} (\Pi_{kl}\Pi^{kl} + \Pi_{lk}\Pi^{kl} - \Pi^i{}_i\Pi^k{}_k),
 \end{aligned}$$

e usando a simetria de Π_{ij} :

$$\begin{aligned}
 G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} &= \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} (2\Pi_{kl} - \Pi^2), \\
 &= h^{-\frac{1}{2}} \left(\Pi_{kl}\Pi^{kl} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right).
 \end{aligned}$$

9.2 Ação para o modelo de Hořava-Lifshitz

9.2.1 Parte cinética

Esse apêndice é dedicado aos cálculos da ação referentes a parte cinética do modelo. Para calcular, utilizaremos o conceito de curvatura extrínseca dado pela equação (3.21). Para o caso em que consideraremos a métrica dada pela equação (3.53), a curvatura extrínseca se torna:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right]. \quad (9.1)$$

As componentes de K_{ij} diferentes de zero são dadas por:

$$\begin{aligned} K_{rr} &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{rr}}{\partial t} \right], \\ &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{a^2}{1 - kr^2} \right\} \right], \\ &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{2a\dot{a}}{1 - kr^2} \right], \\ &= -\frac{\dot{a}a}{N(1 - kr^2)}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta} &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{\theta\theta}}{\partial t} \right], \\ &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \{a^2 r^2\} \right], \\ &= \frac{1}{2N} [-2a\dot{a}r^2], \\ &= -\frac{\dot{a}ar^2}{N}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} K_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{\varphi\varphi}}{\partial t} \right], \\ &= \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \{a^2 r^2 \text{sen}^2\theta\} \right], \\ &= \frac{1}{2N} [-2a\dot{a}r^2 \text{sen}2\theta], \\ &= -\frac{\dot{a}ar^2 \text{sen}^2\theta}{N}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Os índices de (9.2)-(9.4) podem ser levantados da seguinte maneira,

$$K^{ij} = h^{li}h^{mj}K_{lm}.$$

Dessa forma obtém-se:

$$\begin{aligned} K^{rr} &= h^{lr}h^{mr}K_{lm}, \\ &= h^{rr}h^{rr}K_{rr}, \\ &= \left[\frac{1-kr^2}{a^2} \right] \left[\frac{1-kr^2}{a^2} \right] \left[-\frac{\dot{a}a}{N(1-kr^2)} \right], \\ &= -\frac{\dot{a}(1-kr^2)}{Na^3}. \end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned} K^{\theta\theta} &= h^{l\theta}h^{m\theta}K_{lm}, \\ &= h^{\theta\theta}h^{\theta\theta}K_{\theta\theta}, \\ &= \left[\frac{1}{a^2r^2} \right] \left[\frac{1}{a^2r^2} \right] \left[-\frac{\dot{a}ar^2}{N} \right], \\ &= -\frac{\dot{a}}{Na^3r^2}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$\begin{aligned} K^{\varphi\varphi} &= h^{l\varphi}h^{m\varphi}K_{lm}, \\ &= h^{\varphi\varphi}h^{\varphi\varphi}K_{\varphi\varphi}, \\ &= \left[\frac{1}{a^2r^2\text{sen}^2\theta} \right] \left[\frac{1}{a^2r^2\text{sen}^2\theta} \right] \left[-\frac{\dot{a}ar^2\text{sen}^2\theta}{N} \right], \\ &= -\frac{\dot{a}}{Na^3r^2\text{sen}^2\theta}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Assim $K_{ij}K^{ij}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} K_{ij}K^{ij} &= K_{rr}K^{rr} + K_{\theta\theta}K^{\theta\theta} + K_{\varphi\varphi}K^{\varphi\varphi}, \\ &= \left[-\frac{\dot{a}a}{N(1-kr^2)} \right] \left[-\frac{\dot{a}(1-kr^2)}{Na^3} \right] + \left[-\frac{\dot{a}ar^2}{N} \right] \left[-\frac{\dot{a}}{Na^3r^2} \right] \\ &+ \left[-\frac{\dot{a}ar^2\text{sen}^2\theta}{N} \right] \left[-\frac{\dot{a}}{Na^3r^2\text{sen}^2\theta} \right], \\ &= \frac{\dot{a}^2}{N^2a^2} + \frac{\dot{a}^2}{N^2a^2} + \frac{\dot{a}^2}{N^2a^2}, \\ &= \frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Contraindo os índices de K_{ij} , obtemos:

$$\begin{aligned}
K &= h_{ij}K^{ij}, \\
&= h_{rr}K^{rr} + h_{\theta\theta}K^{\theta\theta} + h_{\varphi\varphi}K^{\varphi\varphi}, \\
&= \left[\frac{a^2}{1-kr^2} \right] \left[-\frac{\dot{a}(1-kr^2)}{Na^3} \right] + [a^2r^2] \left[-\frac{\dot{a}}{Na^3r^2} \right] \\
&+ [a^2r^2\text{sen}^2\theta] \left[-\frac{\dot{a}}{Na^3r^2\text{sen}^2\theta} \right], \\
&= -\frac{\dot{a}}{Na} - \frac{\dot{a}}{Na} - \frac{\dot{a}}{Na}, \\
&= -\frac{3\dot{a}}{Na}.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Utilizando a equação (9.9) podemos obter que,

$$K^2 = \frac{9\dot{a}^2}{N^2a^2}. \tag{9.10}$$

Para se obter a parte cinética, devemos substituir as equações (9.8) e (9.10) em (3.52),

$$S_{cin} = \frac{M_p^2}{2} \int_{\mathcal{M}} dx^3 dt N \frac{r^2 a^3 \text{sen} \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \lambda \frac{9\dot{a}^2}{N^2 a^2} \right). \tag{9.11}$$

9.2.2 Parte potencial

Nesta subsecção iremos calcular os elementos da parte potencial. Para isso, serão necessários a definição de alguns elementos e propriedades que seguem abaixo:

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^i{}_{mk}\Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^i{}_{ml}\Gamma^m{}_{jk}, \tag{9.12}$$

$$R_{ij} = h^{kl}R_{kilj}, \tag{9.13}$$

$$R_{ijkl} = h_{im}R^m{}_{jkl}, \tag{9.14}$$

$$R = h^{ij}R_{ij}, \tag{9.15}$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}h^{li}(h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{kj,l}), \tag{9.16}$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{klij}, \tag{9.17}$$

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0. \tag{9.18}$$

Aplicando as fórmulas acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
R &= h^{ij}R_{ij}, \\
&= h^{rr}R_{rr} + h^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + h^{\varphi\varphi}R^{\varphi\varphi}.
\end{aligned} \tag{9.19}$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= h^{kl} R_{krlr}, \\
&= h^{rr} R_{rrrr} + h^{\theta\theta} R_{\theta r\theta r} + h^{\varphi\varphi} R_{\varphi r\varphi r},
\end{aligned} \tag{9.20}$$

onde

$$R_{rrrr} = h_{rr} R^r{}_{rrr}, \tag{9.21}$$

e

$$\begin{aligned}
R^r{}_{rrr} &= \Gamma^r{}_{rr,r} - \Gamma^r{}_{rr,r} + \Gamma^r{}_{mr} \Gamma^m{}_{rr} - \Gamma^r{}_{mr} \Gamma^m{}_{rr}, \\
R_{rrrr} &= 0.
\end{aligned} \tag{9.22}$$

O resultado dado por (9.22) implica que:

$$R_{rrrr} = 0, \tag{9.23}$$

$$R_{\theta r\theta r} = h_{\theta\theta} R^\theta{}_{r\theta r}, \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned}
R^\theta{}_{r\theta r} &= \Gamma^\theta{}_{rr,\theta} - \Gamma^\theta{}_{r\theta,r} + \Gamma^\theta{}_{m\theta} \Gamma^m{}_{rr} - \Gamma^\theta{}_{mr} \Gamma^m{}_{r\theta}, \\
&= \Gamma^\theta{}_{rr,\theta} - \Gamma^\theta{}_{r\theta,r} + \Gamma^\theta{}_{r\theta} \Gamma^r{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} \Gamma^\theta{}_{rr} + \Gamma^\theta{}_{\varphi\theta} \Gamma^\varphi{}_{rr} \\
&\quad - \Gamma^\theta{}_{rr} \Gamma^r{}_{r\theta} - \Gamma^\theta{}_{\theta r} \Gamma^\theta{}_{r\theta} - \Gamma^\theta{}_{\varphi r} \Gamma^\varphi{}_{r\theta},
\end{aligned} \tag{9.25}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta{}_{rr} &= \frac{1}{2} h^{j\theta} (h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}), \\
&= \frac{1}{2} h^{\theta\theta} (h_{\theta r,r} + h_{\theta r,r} - h_{rr,\theta}), \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{9.26}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta{}_{r\theta} &= \frac{1}{2} h^{j\theta} (h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}), \\
&= \frac{1}{2} h^{\theta\theta} (h_{\theta r,\theta} + h_{\theta\theta,r} - h_{\theta r,\theta}), \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 r^2} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} (a^2 r^2) \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 r^2} \right] [2a^2 r], \\
&= \Gamma^\theta{}_{\theta,r} = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{9.27}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2}h^{jr}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{rr}(h_{rr,r} + h_{rr,r} - h_{rr,r}), \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1-kr^2}{a^2}\right]\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a^2}{1-kr^2}\right)\right], \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1-kr^2}{a^2}\right]\left[\frac{2a^2kr}{(1-kr^2)^2}\right], \\
&= \frac{kr}{1-kr^2}.
\end{aligned} \tag{9.28}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\theta,\theta} + h_{\theta\theta,\theta} - h_{\theta\theta,\theta}), \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{9.29}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\varphi,\theta} + h_{j\theta,\varphi} - h_{\theta\varphi,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\varphi,\theta} + h_{\theta\theta,\varphi} - h_{\theta\varphi,\theta}), \\
&= \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\varphi_{rr} &= \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi r,r} + h_{\varphi r,r} - h_{rr,\varphi}), \\
&= \Gamma^\varphi_{rr} = 0.
\end{aligned} \tag{9.31}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{r\theta} &= \frac{1}{2}h^{jr}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{rr}(h_{rr,\theta} + h_{r\theta,r} - h_{\theta r,r}), \\
&= \Gamma^r_{\theta r} = 0.
\end{aligned} \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{\varphi r} &= \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\varphi,r} + h_{jr,\varphi} - h_{r\varphi,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\varphi,r} + h_{\theta r,\varphi} - h_{r\varphi,\theta}), \\
&= \Gamma^\theta_{r\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\varphi}_{r\theta} &= \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi r,\theta} + h_{\varphi\theta,r} - h_{\theta r,\varphi}), \\
&= \Gamma^{\varphi}_{\theta r} = 0.
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Agora, basta substituir os símbolos de Kristoffel (9.26)-(9.34) calculados em (9.25) para obter:

$$\begin{aligned}
R^{\theta}_{r\theta r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \right] + \left[\frac{1}{r} \right] \left[\frac{kr}{1-kr^2} \right] - \left[\frac{1}{r} \right] \left[\frac{1}{r} \right], \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{k}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2}, \\
&= \frac{k}{1-kr^2}.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

Finalmente, basta substituir (9.35) em (9.24) obtendo:

$$R_{\theta r\theta r} = [a^2 r^2] \left[\frac{k}{1-kr^2} \right] = \frac{a^2 r^2 k}{1-kr^2}. \tag{9.36}$$

De maneira análoga é calculado:

$$R_{\varphi r\varphi r} = h_{\varphi\varphi} R^{\varphi}_{r\varphi r}, \tag{9.37}$$

calculando o termo $R^{\varphi}_{r\varphi r}$, temos que:

$$\begin{aligned}
R^{\varphi}_{r\varphi r} &= \Gamma^{\varphi}_{rr,\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} + \Gamma^{\varphi}_{m\varphi} \Gamma^m_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{mr} \Gamma^m_{r\varphi}, \\
&= \Gamma^{\varphi}_{rr,\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} \Gamma^r_{rr} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} \Gamma^{\theta}_{rr} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} \Gamma^{\varphi}_{rr}, \\
&- \Gamma^{\varphi}_{rr} \Gamma^r_{r\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{\theta r} \Gamma^{\theta}_{r\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}.
\end{aligned} \tag{9.38}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} &= \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{jr,\varphi} + h_{j\varphi,r} - h_{\varphi r,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi r,\varphi} + h_{\varphi\varphi,r} - h_{\varphi r,\varphi}), \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} (a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta) \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] \left[\frac{\partial}{\partial r} (2a^2 r \text{sen}^2 \theta) \right], \\
&= \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r}.
\end{aligned} \tag{9.39}$$

Ao substituir (9.26), (9.28), (9.34) e (9.39) em (9.38), obtemos:

$$\begin{aligned}
 R^\varphi_{r\varphi r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \right] + \left[\frac{1}{r} \right] \left[\frac{kr}{1-kr^2} \right] - \left[\frac{1}{r} \right] \left[\frac{1}{r} \right], \\
 &= \frac{1}{r^2} + \frac{k}{1-kr^2} - \frac{1}{r^2}, \\
 &= \frac{k}{1-kr^2}.
 \end{aligned} \tag{9.40}$$

Finalmente substituindo (9.40) em (9.37), teremos:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi r \varphi r} &= [a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta] \left[\frac{k}{1-kr^2} \right], \\
 &= \frac{ka^2 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1-kr^2}.
 \end{aligned} \tag{9.41}$$

Substituindo (9.23), (9.36) e (9.41) em (9.20), obtemos:

$$\begin{aligned}
 R_{rr} &= \left[\frac{1}{a^2 r^2} \right] \left[\frac{a^2 r^2 k}{1-kr^2} \right] + \left[\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] \left[\frac{ka^2 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1-kr^2} \right], \\
 &= \frac{2k}{1-kr^2}.
 \end{aligned} \tag{9.42}$$

De forma análoga é calculado:

$$\begin{aligned}
 R_{\theta\theta} &= h^{kl} R_{k\theta l\theta}, \\
 &= h^{rr} R_{r\theta r\theta} + h^{\theta\theta} R_{\theta\theta\theta\theta} + h^{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta}.
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

Pela assimetria dada em (9.17), obtém-se:

$$R_{\theta\theta\theta\theta} = 0, \tag{9.44}$$

e

$$R_{r\theta r\theta} = R_{\theta r \theta r} = \frac{ka^2 r^2}{1-kr^2}. \tag{9.45}$$

Fazendo o cálculo de:

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = h_{\varphi\varphi} R^\varphi_{\theta\varphi\theta}, \tag{9.46}$$

$$\begin{aligned}
 R^\varphi_{\theta\varphi\theta} &= \Gamma^\varphi_{\theta\theta,\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi,\theta} + \Gamma^\varphi_{m\varphi} \Gamma^m_{\theta\theta} - \Gamma^\varphi_{m\theta} \Gamma^m_{\theta\varphi}, \\
 &= \Gamma^\varphi_{\theta\theta,\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi,\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi} \Gamma^r_{\theta\theta} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} \Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\theta} \\
 &\quad - \Gamma^\varphi_{r\theta} \Gamma^r_{\theta\varphi} - \Gamma^\varphi_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{\theta\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi},
 \end{aligned} \tag{9.47}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\varphi_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi\theta,\theta} + h_{\varphi\theta,\theta} - h_{\theta\theta,\varphi}), \\
&= \Gamma^\varphi_{\theta\theta} = 0,
\end{aligned} \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{j\theta,\varphi} + h_{j\varphi,\theta} - h_{\varphi\theta,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi\theta,\varphi} + h_{\varphi\varphi,\theta} - h_{\varphi\theta,\varphi}), \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta] \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] [2a^2 r^2 \text{sen} \theta \cos \theta], \\
&= \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \cot \theta,
\end{aligned} \tag{9.49}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}h^{jr}(h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{rr}(h_{r\theta,\theta} + h_{r\theta,\theta} - h_{\theta\theta,r}), \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - kr^2}{a^2} \right] \left[-\frac{\partial}{\partial r} [a^2 r^2] \right], \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - kr^2}{a^2} \right] [-2a^2 r], \\
&= \Gamma^r_{\theta\theta} = -r(1 - kr^2),
\end{aligned} \tag{9.50}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{j\varphi,\varphi} + h_{j\varphi,\varphi} - h_{\varphi\varphi,j}), \\
&= \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi\varphi,\varphi} + h_{\varphi\varphi,\varphi} - h_{\varphi\varphi,\varphi}), \\
&= \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{9.51}$$

Finalmente substituindo (9.29), (9.30), (9.34) e (9.48)-(9.51) em (9.47), obtemos:

$$\begin{aligned}
R^\varphi_{\theta\varphi\theta} &= -\frac{\partial}{\partial\theta}[\cot\theta] + \left[\frac{1}{r}\right] [-r(1-kr^2)] - [\cot\theta][\cot\theta], \\
&= \csc^2\theta - (1-kr^2) - \cot^2\theta, \\
&= \frac{1}{\text{sen}^2\theta} - \frac{\cos^2}{\text{sen}^2\theta} - (1-kr^2), \\
&= \frac{1-\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} - (1-kr^2), \\
&= \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - (1-kr^2), \\
&= 1 - 1 + kr^2, \\
&= kr^2.
\end{aligned} \tag{9.52}$$

Substituindo (9.52) em (9.46), temos:

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = ka^2r^4\text{sen}^2\theta. \tag{9.53}$$

Substituindo (9.44), (9.45) e (9.53) em (9.43), obtemos:

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= \left[\frac{1-kr^2}{a^2}\right] \left[\frac{a^2r^2k}{1-kr^2}\right] + \left[\frac{1}{a^2r^2\text{sen}^2\theta}\right] [ka^2r^4\text{sen}^2\theta], \\
&= 2kr^2.
\end{aligned} \tag{9.54}$$

Calculando o último termo, temos:

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi} &= h^{kl}R_{k\varphi l\varphi}, \\
&= h^{rr}R_{r\varphi r\varphi} + h^{\theta\theta}R_{\theta\varphi\theta\varphi} + h^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi\varphi\varphi}.
\end{aligned} \tag{9.55}$$

Novamente pela antissimetria, temos:

$$R_{r\varphi r\varphi} = R_{\varphi r\varphi r} = \frac{ka^2r^2\text{sen}^2\theta}{1-kr^2}, \tag{9.56}$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi\theta} = ka^2r^4\text{sen}^2\theta, \tag{9.57}$$

$$R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = 0. \tag{9.58}$$

Substituindo as equações (9.56)-(9.58) em (9.55), temos que:

$$R_{\varphi\varphi} = \left[\frac{1-kr^2}{a^2}\right] \left[\frac{ka^2r^2\text{sen}^2\theta}{1-kr^2}\right] + \left[\frac{1}{a^2r^2}\right] [ka^2r^4\text{sen}^2\theta], \tag{9.59}$$

$$= 2kr^2\text{sen}^2\theta. \tag{9.60}$$

As equações (9.42), (9.54) e (9.60) podem ser generalizadas de acordo com a métrica,

$$R_{ij} = \frac{2k}{a^2} h_{ij}. \quad (9.61)$$

Finalizando este cálculo, vamos substituir as equações (9.42), (9.54) e (9.60) em (9.19) para determinar o seguinte escalar de Ricci:

$$\begin{aligned} R &= \left[\frac{1 - kr^2}{a^2} \right] \left[\frac{2k}{1 - kr^2} \right] + \left[\frac{1}{a^2 r^2} \right] [2kr^2] + \left[\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right] [2kr^2 \text{sen}^2 \theta], \\ &= \frac{2k}{a^2} + \frac{2k}{a^2} + \frac{2k}{a^2}, \\ &= \frac{6k}{a^2}. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Esse resultado leva a:

$$R^2 = \frac{36k^2}{a^4}, \quad (9.63)$$

$$R^3 = \frac{216k^3}{a^6}. \quad (9.64)$$

Os índices de (9.61) podem ser levantados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R^{ij} &= h^{ki} h^{lj} R_{kl}, \\ &= h^{ki} h^{lj} \left[\frac{2k}{a^2} h_{kl} \right], \\ &= \frac{2k}{a^2} h^{ki} h^{lj} h_{kl}, \\ &= \frac{2k}{a^2} h^{ki} h_k^j, \\ &= \frac{2k}{a^2} h^{ij}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Com (9.61) e (9.65), obtém-se:

$$\begin{aligned} R^{ij} R_{ij} &= \frac{2k}{a^2} h^{ij} \frac{2k}{a^2} h_{ij}, \\ &= \frac{4k^2}{a^4} h^{ij} h_{ij}, \\ &= \frac{4k^2}{a^4} (h^{rr} h_{rr} + h^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + h^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi}), \\ &= 3 \frac{4k^2}{a^4}, \\ &= \frac{12k^2}{a^4}. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Calculando também:

$$\begin{aligned}
 R^i_j &= h^{ki} R_{kj}, \\
 &= h^{ki} \left[\frac{2k}{a^2} h_{kj} \right], \\
 &= \frac{2k}{a^2} h^{ki} h_{kj}, \\
 &= \frac{2k}{a^2} h^i_j.
 \end{aligned} \tag{9.67}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 R^i_j R^j_i &= \left[\frac{2k}{a^2} \right] \left[\frac{2k}{a^2} \right] h^i_j h^j_i, \\
 &= \frac{4k^2}{a^4} h^i_i, \\
 &= 3 \frac{4k^2}{a^4}, \\
 &= \frac{12k^2}{a^4}
 \end{aligned} \tag{9.68}$$

Substituindo (9.62) e (9.68), temos que:

$$\begin{aligned}
 RR^i_j R^j_i &= \left[\frac{6k}{a^2} \right] \left[\frac{12k^2}{a^4} \right], \\
 &= \frac{72k^3}{a^6}.
 \end{aligned} \tag{9.69}$$

Calculando o outro elemento, obtemos que:

$$\begin{aligned}
 R^i_j R^j_k R^k_i &= \left[\frac{2k}{a^2} h^i_j \right] \left[\frac{2k}{a^2} h^j_k \right] \left[\frac{2k}{a^2} h^k_i \right], \\
 &= \frac{8k^3}{a^6} h^i_j h^j_k h^k_i, \\
 &= \frac{8k^3}{a^6} h^i_j h^j_i, \\
 &= \frac{8k^3}{a^6} h^i_i, \\
 &= 3 \frac{8k^3}{a^6}, \\
 &= \frac{24k^3}{a^6}.
 \end{aligned} \tag{9.70}$$

Por outro lado, como a expressão dada por (9.61) depende apenas da métrica e de escalares, podemos escrever:

$$\nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} = 0. \tag{9.71}$$

Para o cálculo do último termo, o qual envolve o laplaciano, que para uma função genérica f é dada por:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{h} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right].$$

Para o caso em que $f = R$, teremos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 R &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \frac{\partial R}{\partial r} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Como o escalar de Ricci, equação (9.62), não depende das coordenadas r , θ e φ , temos que:

$$\nabla^2 R = 0. \quad (9.73)$$

O resultado dado por (9.73) implica em:

$$R \nabla^2 R = 0. \quad (9.74)$$

9.3 Ação completa

Considerando $g_0 M_p^2 = 2\Lambda$, $g_1 = -1$, como em [18] e substituindo os elementos calculados em (9.8), (9.10), (9.62), (9.63), (9.64), (9.66), (9.69), (9.70), (9.71), (9.74), na ação total de Hořava-Lifshitz, equação (3.52), obtém-se:

$$\begin{aligned} S &= \beta \int dt N \left[3(1-3\lambda) \frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + 6ka - 2\Lambda a^3 - M_p^{-2} \left\{ \frac{12k^2}{a} (3g_2 + g_3) \right\} \right. \\ &\left. - M_p^{-4} \left\{ \frac{24k^3}{a^3} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right\} \right], \end{aligned}$$

9.4 Interpretação de de Broglie-Bohm

Para obter a parte real e imaginária das expressões na interpretação de *de Broglie-Bohm* considere:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 (R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}) + V R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}.$$

Calculando as derivadas, temos:

$$\begin{aligned}
i\hbar \left(\frac{\partial R(\vec{x}, t)}{\partial t} e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} + \frac{i}{\hbar} R(\vec{x}, t) \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} + \frac{i}{\hbar} R(\vec{x}, t) \right. \\
&\quad \left. \times \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \right) + V R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}, \\
i\hbar \left(\frac{\partial R(\vec{x}, t)}{\partial t} e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} + \frac{i}{\hbar} R(\vec{x}, t) \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\nabla^2 R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \right. \\
&\quad + \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} R(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \\
&\quad + \frac{i}{\hbar} \vec{\nabla} R(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} + \\
&\quad + \frac{i}{\hbar} R(\vec{x}, t) \nabla^2 S(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \\
&\quad \left. - \frac{1}{\hbar^2} R(\vec{x}, t) (\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2 e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar} \right) \\
&\quad + V R(\vec{x}, t) e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar},
\end{aligned}$$

dividindo ambos os lados da equação acima por $e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
i\hbar \left(\frac{\partial R(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} R(\vec{x}, t) \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) &= -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\nabla^2 R(\vec{x}, t) + \frac{2i}{\hbar} \vec{\nabla} R(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{\hbar} R(\vec{x}, t) \nabla^2 S(\vec{x}, t) - \frac{1}{\hbar^2} R(\vec{x}, t) (\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2 \right) \\
&\quad + V R(\vec{x}, t),
\end{aligned}$$

fazendo algumas simplificações

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial R(\vec{x}, t)}{\partial t} - R(\vec{x}, t) \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\nabla^2 R(\vec{x}, t) - \frac{1}{\hbar^2} R(\vec{x}, t) (\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2 \right) \\
&\quad + V R(\vec{x}, t) - \frac{i\hbar}{2M} \left(2\vec{\nabla} R(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) + R(\vec{x}, t) \nabla^2 S(\vec{x}, t) \right).
\end{aligned}$$

Vamos separar a equação acima em sua parte real e imaginária. Considere para a parte real:

$$\left[-R(\vec{x}, t) \frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\nabla^2 R(\vec{x}, t) - \frac{1}{\hbar^2} R(\vec{x}, t) (\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2 \right) + V R(\vec{x}, t) \right],$$

dividindo a equação acima, em ambos os lados, por $R(\vec{x}, t) (\neq 0)$, teremos:

$$\frac{\partial S(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} S(\vec{x}, t))^2}{2M} - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 R(\vec{x}, t)}{R(\vec{x}, t)} + V = 0. \quad (9.75)$$

Para a parte imaginária,

$$i\hbar \frac{\partial R(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2M} \left(2\vec{\nabla} R(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) + R(\vec{x}, t) \nabla^2 S(\vec{x}, t) \right)$$

multiplicando a equação acima, em ambos os lados, por $2R(\vec{x}, t)/(i\hbar)$, teremos que:

$$2R(\vec{x}, t) \frac{\partial R(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{M} \left(2R(\vec{x}, t) \vec{\nabla} R(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} S(\vec{x}, t) + R^2(\vec{x}, t) \nabla^2 S(\vec{x}, t) \right) = 0,$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial R^2(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{R^2(\vec{x}, t) \vec{\nabla} S(\vec{x}, t)}{M} \right) = 0. \quad (9.76)$$

Referências Bibliográficas

- [1] B. P. Abbott & R. Abbott; *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.
- [2] S. Hawking & G. Ellis; *The large scale structure of space-time*, (Cambridge: Cambridge University - 1973).
- [3] S. W. Hawking & A. Einstein; *General relativity; an Einstein centenary survey*, (Cambridge: CUP Archive, Cambridge University Press - 1979).
- [4] K. S. Stelle; *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D. **16** (1977) 953.
- [5] P. Hořava; *Quantum gravity at a Lifshitz point*, Phys. Rev. D. **79** (2009) 084008.
- [6] S. K. Ma; *Modern Theory of Critical Phenomena*, (New York: Benjamin - 1976).
- [7] P. C. Hohenberg & B. I. Halperin; *Theory of dynamic critical phenomena*, Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 435.
- [8] S. Sachdev; *Quantum phase transitions*, (Cambridge: Cambridge University Press - 1999).
- [9] E. Ardonne, P. Fendley & E. Fradkin, Ann. Phys. (N. Y.) **310**, (2004) 493.

- [10] R. Arnowitt, S. Deser & C. W. Misner; *Gravitation: an introduction to current research*, (Wiley, New York - 1973).
- [11] D. Blas, & O. Pujolas; *Consistent extension of Hořava gravity*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 181302.
- [12] D. Blas, O. Pujolas & S. Sibiryakov; *On the extra mode and inconsistency of Hořava-Lifshitz*, JHEP. **04** (2011).
- [13] T. P. Sotiriou & M. Visser; *Phenomenologically viable lorentz-violating quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **25** (2009) 251601.
- [14] T. P. Sotiriou & M. Visser; *Quantum gravity without lorentz invariance*, JHEP. **10** (2009) 033.
- [15] A. Wang & R. Maartens; *Cosmological perturbations in horava-lifshitz theory without detailed balance*, Phys. Rev. D. **2** (2010) 024009.
- [16] O. Bertolami & C. A. D. Zarro; *Hořava-Lifshitz quantum cosmology*, Phys. Rev. D. **84** (2011) 044042.
- [17] J. P. M. Pitelli & A. Saa; *Quantum singularities in Hořava-Lifshitz cosmology*, Phys. Rev. D. **86** (2012) 063506.
- [18] B. Vakili & V. Kord; *Classical and quantum Hořava-Lifshitz cosmology in a minisuperspace perspective*, Gen. Rel. Grav. **45** (2013) 1313.
- [19] H. Ardehali & P. Pedram; *Chaplygin gas Hořava-Lifshitz quantum cosmology*, Phys. Rev. D. **93** (2016) 043532.
- [20] K. Maeda & Y. Misonoh; *Oscillating universe in Hořava-Lifshitz gravity*, Phys. Rev. D. **82**(2010) 064024.
- [21] R. Maier & I. D. Soares; *Hořava-Lifshitz bouncing Bianchi IX universes: A dynamical system analysis*, Phys. Rev. D. **96** (2017) 103532.

- [22] S. F. Bramberger, A. Coates, J. Magueijo, S. Mukohyama, R. Namba & Y. Watanabe; *Solving the flatness problem with an anisotropic instanton in Hořava-Lifshitz gravity*, Phys. Rev. D. **97** (2018) 043512.
- [23] G. Oliveira-Neto, L. G. Martins, G. A. Monerat & E. V. Corrêa Silva; *De Broglie-Bohm interpretation of a Hořava-Lifshitz quantum cosmology model*, Mod. Phys. Lett. A. **33** (2018) 1850014.
- [24] H. Everett III; *"Relative state" formulation of quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 454.
- [25] S. Frautschi; *Entropy in an expanding universe*, Science. **217** (1982) 593.
- [26] Y. B. Zeldovich; *A hypothesis, unifying the structure and the entropy of the Universe*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. **160** (1972) 1-3.
- [27] N. Pinto-Neto; *The Bohm interpretation of quantum cosmology*, Found. Phys. **35** (2005) 577.
- [28] D. Bohm; *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I*, Phys. Rev. **85** (1952) 166.
- [29] H. Everett III; *"Relative state" formulation of quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 454.
- [30] D. Bohm & B. J. Hiley; *The undivided universe: An ontological interpretation of quantum theory*. (Routledge - 2006)
- [31] J. A. de Barros, N. Pinto-Neto & M. A. Sagiuro-Leal; *The causal interpretation of dust and radiation fluid non-singular quantum cosmologies*, Phys. Lett. A. **241** (1998) 229.
- [32] P. Pedram & S. Jalalzadeh; *Quantum cosmology with varying speed of light: Canonical approach*, Phys. Lett. B. **660** (2008) 1-6.
- [33] G. A. Monerat, L. G. Ferreira Filho, G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva & C. Neves; Phys. Lett. A. **374** (2010) 4741.

- [34] B. Vakili; *Scalar field quantum cosmology: A Schrödinger picture*, Phys. Lett. B. **718** (2012) 34.
- [35] S. Das; *Quantum Raychaudhuri equation*, Phys. Rev. D. **89** (2014) 084068.
- [36] A. F. Ali & S. Das; *Cosmology from quantum potential*, Phys. Lett. B. **741** (2015) 276.
- [37] G. Oliveira-Neto, M. Silva de Oliveira, G. A. Monerat & E. V. Corrêa Silva, Int. J. Mod. Phys. D. **26** (2016) 1750011.
- [38] S. Frautschi; *Entropy in an expanding universe*, Science. **217** (1982) 593.
- [39] d’Inverno, A. Ray; *Introducing Einstein’s relativity*.(Clarendon Press - 1992)
- [40] J. A. Aledo, J. M. Espinar & J. A. Gálvez; *The Codazzi equation for surfaces*, Adv. Math. **224** (2010) 2511.
- [41] S. T. Ali & M. Engliš; *Quantization methods: a guide for physicists and analysts*, Rev. Math. Phys. **17** (2005) 391.
- [42] P. Dirac; Can. J. Math. **2** (1950) 129.
- [43] P. Dirac; Proc. R. Soc. London Ser. A. **249** (1958) 326 e 333.
- [44] P. Dirac; *The theory of gravitation in Hamiltonian form*, Proc. R. Soc. Lond. A. **246** (1958) 333.
- [45] P. Dirac; *Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation*, Phys. Rev. **114** (1959) 924.
- [46] R. P. Feynman, R. B. Leighton & M. Sands; *Lições de física de Feynman: edição definitiva*. (Bookman **3** 2008).
- [47] R. Steigl; *Model Examples of Quantum Cosmology*. (MASARYK UNIVERSITY-Faculty of Sciences Department of Theoretical Physics and Astrophysics-2008).

- [48] N. Pinto-Neto; *Teorias e interpretações da mecânica quântica*. (Editora Livraria da Física-2010).
- [49] B. S. DeWitt; *Quantum mechanics and reality*, Phys. Tod. **23** (1970) 30.
- [50] B. S. DeWitt; *Foundations of quantum mechanics*. (Academic Press Inc., New York - 1971)
- [51] F. Freitas & O. Freire Junior; *A formulação dos “estados relativos” da teoria quântica*. (SciELO Brasil - 2008).
- [52] E.ourgoulhon; *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*. (Springer Science & Business Media - 2012).
- [53] S. Frautschi; *Entropy in an expanding universe*, Science. **217** (1982) 593.
- [54] R. M. Wald; *The arrow of time and the initial conditions of the universe*, Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics. **37** (2006) 394.
- [55] J. P. Boyd; *Chebyshev and Fourier spectral methods*. (Courier Corporation - 2001).
- [56] P. Pedram, M. Mirzaei, S. Jalalzadeh, & S. S. Gousheh; *Perfect fluid quantum Universe in the presence of negative cosmological constant*, Gen. Rel. Grav. **40** (2008) 1663.
- [57] G. Oliveira-Neto, G. A. Monerat, E. V. Corrêa Silva, C. Neves & L. G. Ferreira Filho; *Quantization of Friedmann-Robertson-Walker Spacetimes in the Presence of a Cosmological Constant and Stiff Matter*, Int. J. Theor. Phys. **52** (2013) 2991.
- [58] E. V. Corrêa Silva, G. A. Monerat, G. Oliveira-Neto & L. G. Ferreira Filho; *Spectral: Solving Schroedinger and Wheeler-DeWitt equations in the positive semi-axis by the spectral method*, Comput. Phys. Commun. **185** (2014) 380.
- [59] R. F. Aranha, I. D. Soares & E. V. Tonini; *Mass-energy and momentum extraction by gravitational wave emission in the merger of two colliding black holes: The non-head-on case*, Phys. Rev. D. **85** (2012) 024003.

- [60] J. Celestino, H. P. Oliveira & E. L. Rodrigues; *Nonlinear evolution of cylindrical gravitational waves: Numerical method and physical aspects*, Phys. Rev. D. **93** (2016) 104018.
- [61] P. C. M. Clemente & H. P. De Oliveira; *Puncture black hole initial data: A single domain Galerkin-collocation method for trumpet and wormhole data sets*, Phys. Rev. D. **96** (2017) 24035.
- [62] W. Barreto, P. C. M. Clemente, H. P. de Oliveira & B. Rodriguez-Mueller; Phys. Rev. D. **97** (2018) 104035.
- [63] P. R. Holland; *The quantum theory of motion: an account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics*, (Cambridge University Press - 1995).
- [64] V. G. Lapchinskii & V. A. Rubakov; *Quantum gravitation: Quantization of the Friedmann model*, Theor. Math. Phys. **33** (1977) 1076.
- [65] N. A. Lemos; *Radiation-dominated quantum Friedmann models*, J. Math. Phys. **37** (1996) 1449.
- [66] P. L. Meyer; *Introductory probability and statistical applications* (Oxford and IBH Publishing - 1970).
- [67] F. Dyson, A. Eddington & C. Davidson, *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919*, Philos. T. R. Soc. Lond. **220** (1920) 291.
- [68] G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva, N. A. Lemos & G. A. Monerat; *Probing singularities in quantum cosmology with curvature scalars*, Phys. Lett. A. **373** (2009) 2012.
- [69] N. Pinto-Neto & J. C. Fabris; *Quantum cosmology from the de Broglie-Bohm perspective*, Class. Quant. Grav. **30** (2013) 143001.
- [70] D. Petz; *Entropy, von Neumann and the von Neumann entropy*, John von Neumann and the foundations of quantum physics. (Springer - 2001) 83-96.

- [71] B. S. DeWitt; *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (Gordon and Breach - 1965).
- [72] B. S. DeWitt; *The global approach to quantum field theory, Vol. II*, (Clarendon Press, Oxford - 2003).
- [73] M. Cramer, J. Eisert, M. B. Plenio & J. Dreibig; *Entanglement-area law for general bosonic harmonic lattice systems*, Phys. Rev. A. **73** (2006) 012309.
- [74] C. A. Egan & C. H. Lineweaver; *A larger estimate of the entropy of the universe*. Astrophys. J. **710** (2010) 1825.
- [75] D. Bak; *Entropy of universe as entanglement entropy*, Phys. Lett. B. **721** (2013) 323.
- [76] R. Arnowitt, S. Deser & C. W. Misner; *Gravitation: an introduction to current research ed L Witten*. (New York: Wiley - 1962).
- [77] B. F. Schutz; *Perfect fluids in general relativity: velocity potentials and a variational principle*, Phys. Rev. D. **2** (1970) 2762.
- [78] B. F. Schutz; *Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid*, Phys. Rev. D. **4** (1971) 3559.
- [79] D. He, D. Gao & Q. Cai; *Spontaneous creation of the universe from nothing*, Phys. Rev. D. **89** (2014) 083510.
- [80] A. Einstein, B. Podolsky & N. Rosen; *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47** (1935) 777.
- [81] P. Chen, P. Hsin & Y. Niu; *Evolution of entanglement entropy in the early universe*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2014** (2014) 040.
- [82] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos & G. A. Monerat; *Quantum cosmological perfect fluid models*, Gen. Rel. Grav. **34** (2002) 651.
- [83] G. t'Hooft & M. J. G. Veltman; *One loop divergencies in the theory of gravitation*, Ann. Poincare Phys. Theor. A **20** (1974) 69.

- [84] M. H. Goroff & A. Sagnotti; *The ultraviolet behavior of Einstein gravity*, Nucl. Phys. B **266** (1986) 709.
- [85] K. S. Stelle; *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.
- [86] B. L. Voronov & I. V. Tyutin; *On renormalization of R^2 gravitation*, Sov. J. Nucl. Phys. **39** (1984) 998.
- [87] E. S. Fradkin & A. A. Tseytlin; *Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity*, Nucl. Phys. B **201** (1982) 469.
- [88] I. G. Avramidi & A. O. Barvinsky; *Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity*, Phys. Lett. B **159** (1985) 269.
- [89] I. G. Avramidi; *Asymptotic behavior of the quantum theory of gravity with higher derivatives*, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986) 255.
- [90] S. Ryu & T. Takayanagi; *Aspects of holographic entanglement entropy*, JHEP. **2006** (2006) 045.